МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.375

© 2000 г. В.В. СИЛЬВЕСТРОВ, А.В. ШУМИЛОВ

К ЗАДАЧЕ СОЕДИНЕНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ПАКЕТ ВДОЛЬ КРИВЫХ

Путем диагонализации матрицы-коэффициента системы сингулярных интегральных уравнений, к которой указанная задача в случае разомкнутых кривых была сведена раньше, доказывается ее эквивалентность конечному числу хорошо изученных задач теории упругости для отдельных пластин с тонкими жесткими включениями. Выводятся формулы, выражающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в пластинах, соединенных в пакет, через соответствующие напряжения и КИН в отдельных пластинах, никаким образом не связанных между собой, вообще говоря, других по упругим свойствам, содержащих определенные тонкие жесткие включения и подверженных на бесконечности действиям определенных нагрузок, выражаемых линейно через исходные данные задачи.

1. Система интегральных уравнений задачи. В [1] рассматривается пакет тонких упругих однородных изотропных бесконечных пластин $E_1, E_2, \ldots, E_n$, которые наложены одна на другую и жестко соединены друг с другом вдоль разомкнутых кривых Ляпунова $L_1, L_2, \ldots, L_m$, не имеющих между собой общих точек. Пластина E_k имеет толщину h_k, модуль сдвига μ_k и коэффициент Пуассона ν_k. В точке ∞ пластины E_k заданы напряжения $(\sigma_x^\infty)_k, (\sigma_y^\infty)_k, (\tau_{xy}^\infty)_k$, вращение ω_k^∞ и сила $P_k = X_k + iY_k$; все механические величины берутся в расчете на единицу толщины пластины. Передача усилий с одной пластины в другую происходит только через линии соединения. Изучается обобщенное плоское напряженное состояние, описываемое в пластинах E_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) комплексными потенциалами

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{\pi i(1+\varkappa_k)} \int_L \frac{q_k(t)}{t-z} dt + \gamma_k \tag{1.1}$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{\pi i(1+\varkappa_k)} \int_L \left[\frac{\varkappa_k \overline{q_k(t)}}{t-z} \overline{dt} - \frac{\bar{t} q_k(t)}{(t-z)^2} dt \right] + \gamma'_k \tag{1.2}$$

$$\varkappa_k = (3-\nu_k)/(1+\nu_k), \qquad L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_m$$

$$\gamma_k = \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)_k + \frac{2i\mu_k}{1+\varkappa_k}\omega_k^\infty, \qquad \gamma'_k = \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)_k + i(\tau_{xy}^\infty)_k \tag{1.3}$$

неизвестные плотности $q_k(t)$ которых, равные половине скачка вектора $(N+iT)_k$ нормальной и касательной напряжений в пластине E_k при переходе через линию L, находятся из системы сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[\left(\frac{2}{\tau - t} + M_1(\tau, t) \right) q(\tau) d\tau + A^{-1} B M_2(\tau, t) \overline{q(\tau) d\tau} \right] = A^{-1} f(t), \quad t \in L \tag{1.4}$$

$$A = \| a_{kl} \|, \quad B = \| b_{kl} \|, \quad q(\tau) = \mathrm{col}\{q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}\}, \quad f(t) = \mathrm{col}\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}$$

$$a_{kl} = \frac{h_l}{h_n} + \frac{\varkappa_k \mu_n (1+\varkappa_n)}{\varkappa_n \mu_k (1+\varkappa_k)} \delta_{kl}, \quad b_{kl} = \frac{1}{\varkappa_n}\left(\frac{h_l}{h_n} + \frac{\mu_n(1+\varkappa_n)}{\mu_k(1+\varkappa_k)}\delta_{kl}\right)$$

$$f_k(t) = \frac{1+\varkappa_n}{\varkappa_n}\left[\varkappa_n \gamma_n - \bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}'_n \frac{d\bar{t}}{dt} - \frac{\mu_n}{\mu_k}\left(\varkappa_k \gamma_k - \bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}'_k \frac{d\bar{t}}{dt}\right)\right] \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$M_1(\tau, t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}, \quad M_2(\tau, t) = -\frac{d}{dt} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}$$

и условий

$$\sum_{k=1}^{n} h_k q_k(t) = 0 \tag{1.5}$$

$$\int_L q(t) dt = \frac{i}{2} P \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[2 \ln \left| \frac{\tau - t_j}{\tau - t_{j+1}} \right| q(\tau) d\tau + A^{-1} B \left(\frac{\tau - t_j}{\bar{\tau} - \bar{t}_j} - \frac{\tau - t_{j+1}}{\bar{\tau} - \bar{t}_{j+1}} \right) \overline{q(\tau) d\tau} \right] = A^{-1} s \tag{1.7}$$

$(j = 1, 2, \ldots, m-1)$

$P = \mathrm{col}\,\{P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}\}, \quad s = \mathrm{col}\,\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$

$$s_k = \frac{1+\varkappa_n}{\varkappa_n}\left[\left(\varkappa_n \gamma_n - \bar{\gamma}_n - \frac{\mu_n}{\mu_k}(\varkappa_k \gamma_k - \bar{\gamma}_k)\right)(t_{j+1} - t_j) - \left(\bar{\gamma}'_n - \frac{\mu_n}{\mu_k} \bar{\gamma}'_k\right)(\bar{t}_{j+1} - \bar{t}_j)\right]$$

где t_j – произвольно фиксированные точки контуров L_j, причем условия (1.7) должны выполняться лишь при $m \geqslant 2$; δ_{kl} – символ Кронекера.

В [1] показана разрешимость системы уравнений (1.4) в классе функций $H^*(L)$ и единственность решения, удовлетворяющего условиям (1.6), (1.7). В случае, когда все упругие постоянные $\varkappa_k$ одинаковы (при этом постоянные μ_k необязательно одинаковы), установлена линейная связь между напряжениями, вращениями, коэффициентами интенсивности напряжения в пластинах E_k, соединенных в пакет, и соответствующими величинами в пластинах E_k, рассматриваемых по отдельности без какой-либо взаимосвязи между ними. В данной работе покажем, что аналогичная связь имеет место и в общем случае, когда постоянные $\varkappa_k$, вообще говоря, неодинаковы.

2. Сведение системы уравнений к отдельным уравнениям. Покажем, что матрица $A^{-1}B$ порядка $n-1$ системы (1.4) имеет $n-1$ линейно независимых собственных векторов.

Непосредственными вычислениями (они из-за громоздкости не приводятся) устанавливаем, что характеристическое уравнение $\det(A^{-1}B - \lambda I) = 0$ (I – единичная матрица равносильное), уравнению $\det(\lambda A - B) = 0$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1,\, j \neq k}^{n} \alpha_j \left(\lambda - \frac{1}{\varkappa_j}\right) = 0 \tag{2.1}$$

$$\alpha_j = h_n \mu_n \varkappa_j (1+\varkappa_n) / [h_j \mu_j \varkappa_n (1+\varkappa_j)]$$

где α_j – определенные положительные числа.

Пусть все постоянные $\varkappa_j$ различны между собой. Без ограничения общности можем считать, что $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_n$. В противном случае этого можно добиться, перенумеровав пластины. Тогда при $\lambda = 1/\varkappa_1$ все слагаемые суммы (2.1) обращаются в ноль, кроме первого, которое имеет знак "плюс". Следовательно, левая часть уравнения (2.1), которую обозначим $F(\lambda)$, при $\lambda = 1/\varkappa_1$ положительна. При $\lambda = 1/\varkappa_2$ функция $F(\lambda)$ отрицательна, при $\lambda = 1/\varkappa_3$ положительна и т.д., т.е. ее знаки в точках $1/\varkappa_1, 1/\varkappa_2, \ldots, 1/\varkappa_n$ чередуются, поэтому она в каждом из интервалов $(1/\varkappa_j, 1/\varkappa_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ имеет хотя бы один корень. Так как $F(\lambda)$ – многочлен степени $n-1$, а число упомянутых интервалов равно $n-1$, то в каждом из этих интервалов характеристическое уравнение (2.1) матрицы $A^{-1}B$ имеет ровно по одному простому корню. Тогда [2] соответствующие этим корням $n-1$ собственных векторов матрицы $A^{-1}B$ будут всегда линейно независимы между собой.

Пусть из постоянных $\varkappa_j$ некоторые l_1 постоянных равны $\varkappa_{(1)}$, другие l_2 постоянных равны $\varkappa_{(2)}$ и т.д., наконец, оставшиеся l_p постоянных равны $\varkappa_{(p)}$. Тогда уравнение (2.1) имеет вид

$$\left(\lambda - \frac{1}{\varkappa_{(1)}}\right)^{l_1-1} \left(\lambda - \frac{1}{\varkappa_{(2)}}\right)^{l_2-1} \cdots \left(\lambda - \frac{1}{\varkappa_{(p)}}\right)^{l_p-1} F_1(\lambda) = 0 \tag{2.2}$$

где $F_1(\lambda)$ – многочлен степени $p-1$, обладающий всеми свойствами функции $F(\lambda)$. Поэтому $F_1(\lambda)$ имеет $p-1$ простых корней, расположенных в интервалах $(1/\varkappa_{(j)}, 1/\varkappa_{(j+1)})$ $(j = 1, 2, \ldots, p-1)$. Остальные $n-p$ корней характеристического уравнения (2.2) совпадают с теми числами $1/\varkappa_{(j)}$, для которых $l_j \geqslant 2$.

Покажем, что при $l_j \geqslant 2$ собственному значению $\lambda_j = 1/\varkappa_{(j)}$ матрицы $A^{-1}B$, имеющему кратность $l_j - 1$, соответствуют $l_j - 1$ собственных векторов матрицы. Для этого найдем ранг матрицы $A^{-1}B - \lambda_j I$, совпадающий с рангом матрицы $\lambda_j A - B$. Элементы последней матрицы имеют вид

$$\lambda_j a_{kl} - b_{kl} = \left(\frac{1}{\varkappa_{(j)}} - \frac{1}{\varkappa_n}\right)\frac{h_l}{h_n} + \left(\frac{1}{\varkappa_{(j)}} - \frac{1}{\varkappa_n}\right)\frac{\varkappa_k \mu_n (1+\varkappa_n)}{\varkappa_n \mu_k (1+\varkappa_k)}\delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Если $\varkappa_{(j)} \neq \varkappa_n$, то в силу того, что l_j постоянных $\varkappa_k$ совпадают с $\varkappa_{(j)}$, матрица $\lambda_j A - B$ имеет l_j одинаковых строк с ненулевыми элементами $\lambda_j a_{kl} - b_{kl} = c_l$, а элементы остальных строк имеют вид $\lambda_j a_{kl} - b_{kl} = c_l + d_k \delta_{kl}$, $d_k \neq 0$. Если $\varkappa_{(j)} = \varkappa_n$, то эта матрица имеет $l_j - 1$ нулевых строк, а элементы остальных строк имеют вид $\lambda_j a_{kl} - b_{kl} = d_k \delta_{kl}$, $d_k \neq 0$. Следовательно, в обоих случаях rang $(\lambda_j A - B) = n - k_j$, поэтому для собственного значения $\lambda_j = 1/\varkappa_{(j)}$ имеется $l_j - 1$ линейно независимых собственных векторов матрицы $A^{-1}B$. Так как собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы, то число всех линейно независимых собственных векторов матрицы $A^{-1}B$ равно

$$p - 1 + \sum_{j=1}^{n} (p_j - 1) = p - 1 + n - p = n - 1$$

Пусть S – матрица, составленная по столбцам из $n-1$ линейно независимых собственных векторов матрицы $A^{-1}B$. Тогда [2] $S^{-1}A^{-1}BS = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}$, где λ_k – собственные значения матрицы $A^{-1}B$, взятые с учетом кратностей. Для дальнейшего удобно брать их в виде $\lambda_k = 1/\varkappa_k^*$, где значения $\varkappa_k^*$ принадлежат области физически возможных значений упругой постоянной $\varkappa$. Это следует из неравенств $\min\limits_j (1/\varkappa_j) \leqslant (1/\varkappa_k^*) \leqslant \min\limits_j (1/\varkappa_j)$, которые имеют место в силу уравнения (2.2) и свойств функции $F_1(\lambda)$. Так как $\varkappa_k^* = (3 - \nu_k^*)/(1 + \nu_k^*)$, то $\lambda_k = (1 + \varkappa^*)/(3 - \varkappa_k^*)$, откуда $\nu_k^* = (3\lambda_k - 1)/(\lambda_k + 1)$, причем значение ν_k^* также принадлежит области физически возможных значений коэффициента Пуассона.

Будем искать решение $q(t)$ системы (1.4), (1.6), (1.7) в виде $q(t) = Sr(t)$, где $r(t) = \mathrm{col}\,\{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\}$ – новый неизвестный столбец-функция, все компоненты которой принадлежат классу $H^*(L)$. Тогда на основании равенства $S^{-1}A^{-1}BS = \mathrm{diag}\,\{1/\varkappa_1^*, 1/\varkappa_2^*, \ldots, 1/\varkappa_{n-1}^*\}$ получим следующие $n-1$ автономных интегральных уравнений и условий для нахождения по отдельности функций $r_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\left(\frac{2}{\tau-t}+M_1(\tau,t)\right)r_k(\tau)d\tau+\frac{1}{\varkappa_k^*}M_2(\tau,t)\overline{r_k(\tau)d\tau}\right]=f_k^*(t),\quad t\in L \tag{2.3}$$

$$\int_L r_k(t)dt=\frac{i}{2}P_k^* \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left[2\ln\left|\frac{\tau-t_j}{\tau-t_{j+1}}\right|r_k(\tau)d\tau+\frac{1}{\varkappa_k^*}\left(\frac{\tau-t_j}{\bar\tau-\bar t_j}-\frac{\tau-t_{j+1}}{\bar\tau-\bar t_{j+1}}\right)\overline{r_k(\tau)d\tau}\right]=s_k^*\quad (j=1,2,\ldots,m-1) \tag{2.5}$$

$$f_k^*(t)=\sum_{j=1}^{n-1}c_{kj}f_j(t),\quad s_k^*=\sum_{j=1}^{n-1}c_{kj}s_j,\quad \|c_{kj}\|=(AS)^{-1}$$

$$P_k^*=\sum_{j=1}^{n-1}d_{kj}P_j,\quad \|d_{kj}\|=S^{-1} \tag{2.6}$$

3. Связь со второй основной задачей теории упругости. Рассмотрим вспомогательную задачу, когда в пластине единичной толщины, имеющей упругие постоянные μ, $\varkappa$, проведены разрезы вдоль линии L, на берегах которых заданы нулевые смещения, а на ∞ заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, вращение ω^∞ и сила P. Будем искать комплексные потенциалы в виде (1.1) – (1.3), опуская у всех функций и постоянных индекс k. Тогда аналогично [3] для нахождения $q(t)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\left(\frac{2}{\tau-t}+M_1(\tau,t)\right)q(\tau)d\tau+\frac{1}{\varkappa}M_2(\tau,t)\overline{q(\tau)d\tau}\right]=-\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\left(\varkappa\gamma-\bar\gamma-\bar\gamma'\frac{d\bar t}{dt}\right),\quad t\in L$$
(3.1)

с дополнительными условиями

$$\int_L q(t)dt=\frac{i}{2}P \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left[2\ln\left|\frac{\tau-t_j}{\tau-t_{j+1}}\right|q(\tau)d\tau+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\tau-t_j}{\bar\tau-\bar t_j}-\frac{\tau-t_{j+1}}{\bar\tau-\bar t_{j+1}}\right)\overline{q(\tau)d\tau}\right]=$$

$$=-\frac{1+\varkappa}{\varkappa}[(\varkappa\gamma-\bar\gamma)(t_{j+1}-t_j)-\bar\gamma'(\bar t_{j+1}-\bar t_j)]\quad (j=1,2,\ldots,m-1) \tag{3.3}$$

Левые части уравнения (2.3) и условий (2.4), (2.5) совпадают с левыми частями уравнения (3.1) и условий (3.2), (3.3), если положить $\varkappa = \varkappa_k^*$. Считая, что $\mu = \mu_k$, $\varkappa = \varkappa_k^*$ и на берегах разрезов смещения равны нулю, найдем, при каких напряжениях $(\sigma_x^*)_k^\infty, (\sigma_y^*)_k^\infty, (\tau_{xy}^*)_k^\infty$, вращении $(\omega^*)_k^\infty$ и силе P_k^* на ∞ совпадают также правые части этих уравнений и условий. Этой целью потребуем, чтобы правая часть $f_k^*(t)$ уравнения (2.3) удовлетворяла равенству

$$f_k^*(t)=\sum_{j=1}^{n-1}c_{kj}f_j(t)=-\frac{\varkappa_k^*+1}{\varkappa_k^*}\left(\varkappa_k^*\gamma_k^*-\bar\gamma_k^*-\bar\gamma_k^{*\prime}\frac{d\bar t}{dt}\right)$$

где постоянные $\gamma_k^*, \bar{\gamma}_k^{*\prime}$ находятся по формулам (1.3), соответствующим случаю, когда $\varkappa = \varkappa_k^*$ и на ∞ заданы разыскиваемые напряжения и вращение. Подставив в последнее равенство вместо функций $f_j(t)$ их выражения и приравняв свободные члены и коэффициенты при $d\bar{t}\,/\,dt$ в правой и левой частях полученного равенства, найдем

$$\varkappa_k^*\gamma_k^* - \bar{\gamma}_k^* = \frac{\varkappa_k^*(1+\varkappa_n)}{\varkappa_n(1+\varkappa_k^*)}\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}\left[\frac{\mu_n}{\mu_j}(\varkappa_j\gamma_j - \bar{\gamma}_j) - (\varkappa_n\gamma_n - \bar{\gamma}_n)\right] \tag{3.4}$$

$$\gamma_k^{*\prime} = \frac{\varkappa_k^*(1+\varkappa_n)}{\varkappa_n(1+\varkappa_k^*)}\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}\left(\frac{\mu_n}{\mu_j}\gamma_j' - \gamma_n'\right)$$

Из формул (1.3), вычисленных для искомых напряжений и вращения, находим

$$(\sigma_x^*)_k^\infty = \mathrm{Re}\left[\frac{2(\varkappa_k^*\gamma_k^* - \bar{\gamma}_k^*)}{\varkappa_k^* - 1} + \gamma_k^{*\prime}\right], \qquad (\sigma_y^*)_k^\infty = \mathrm{Im}\left[\frac{2(\varkappa_k^*\gamma_k^* - \bar{\gamma}_k^*)}{\varkappa_k^* - 1} - \gamma_k^{*\prime}\right]$$

$$(\tau_{xy}^*)_k^\infty = \mathrm{Im}\,\gamma_k^{*\prime}, \qquad (\omega^*)_k{}' = \frac{1}{2\mu_k}\mathrm{Im}\,(\varkappa_k^*\gamma_k^* - \bar{\gamma}_k^*)$$

Отсюда, подставив вместо $\varkappa_k^*\gamma_k^* - \bar{\gamma}_k^*, \gamma_k^{*\prime}$ их выражения (3.4), а вместо $\varkappa_j\gamma_j - \bar{\gamma}_j$, γ_j' их выражения, вычисленные на основе формул (1.3), найдем

$$(\sigma_x^*)_k^\infty = \frac{\varkappa_k^*(1+\varkappa_n)}{2\varkappa_n(1+\varkappa_k^*)(1-\varkappa_k^*)}\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}\left[\frac{\mu_n}{\mu_j}(2-\varkappa_k^*-\varkappa_j)(\sigma_x)_j^\infty - \right.$$

$$\left. -(2-\varkappa_k^*-\varkappa_n)(\sigma_x)_n^\infty + \frac{\mu_n}{\mu_j}(\varkappa_k^*-\varkappa_j)(\sigma_y)_j^\infty - (\varkappa_k^*-\varkappa_n)(\sigma_y)_n^\infty\right]$$

$$(\sigma_y^*)_k^\infty = \frac{\varkappa_k^*(1+\varkappa_n)}{2\varkappa_n(1+\varkappa_k^*)(1-\varkappa_k^*)}\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}\left[\frac{\mu_n}{\mu_j}(2-\varkappa_k^*-\varkappa_j)(\sigma_y)_j^\infty - \right. \tag{3.5}$$

$$\left. -(2-\varkappa_k^*-\varkappa_n)(\sigma_y)_n^\infty + \frac{\mu_n}{\mu_j}(\varkappa_k^*-\varkappa_j)(\sigma_x)_j^\infty - (\varkappa_k^*-\varkappa_n)(\sigma_x)_n^\infty\right]$$

$$(\tau_{xy}^*)_k^\infty = \frac{\varkappa_k^*(1+\varkappa_n)}{\varkappa_n(1+\varkappa_k^*)}\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}\left[\frac{\mu_n}{\mu_j}(\tau_{xy})_j^\infty - (\tau_{xy})_n^\infty\right]$$

$$(\omega^*)_k^\infty = \frac{\mu_n\varkappa_k^*(1+\varkappa_n)}{\mu_n\varkappa_n(1+\varkappa_k^*)}\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}\,(\omega_j^\infty - \omega_n^\infty), \qquad \|c_{kj}\| = (AS)^{-1}$$

При найденных напряжениях и вращении правые части условий (2.5) также совпадают с правыми частями условий (3.3), если положить $\varkappa = \varkappa_k^*$, $\gamma = \gamma_k^*$, $\gamma' = \gamma_k^{*\prime}$, а правые части условий (2.4) и (3.2) совпадают, если $P = P_k^*$. Следовательно, интегральное уравнение (2.3) и условия (2.4), (2.5) соответствуют второй основной задаче теории упругости для одной отдельной пластины E_k^*, которая имеет единичную толщину, упругие постоянные μ_k, $\varkappa_k^*$, и разрезана вдоль линии L, на берегах которых заданы нулевые смещения, а на ∞ заданы напряжения $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*)_k^\infty$, вращение $(\omega^*)_k^\infty$ и сила P_k^*, определяемые через данные исходной задачи по формулам (3.5) и (2.6).

4. Напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений в пластинах E_k. Обозначим, для краткости, через $\sigma_k(z)$ одно из напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} или вращение ω в точке z пластины E_k, а через $\sigma_k^*(z)$ те же самые механические параметры в точке z описанной выше пластины E_k^*. Так как [4] $\sigma_k(z)$ выражается линейно через комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$, которые в свою очередь согласно (1.1), (1.2) представляют сумму определенных постоянных и линейных интегральных операторов от $q_k(t)$, то $\sigma_k(z) = (Kq_k)(z)+\sigma_k(\infty)$, где K – некоторый линейный оператор, вид которого для дальнейших рассуждений неважен. Аналогично $\sigma_k^*(z) = (Kr_k)(z) + \sigma_k^*(\infty)$. Так как $q(t) = Sr(t)$, то

$$q_k(t) = \sum_{j=1}^{n-1} s_{kj} r_j(t), \quad \| s_{kj} \| = S \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4.1}$$

Тогда в силу линейности оператора K имеем

$$\sigma_k(z) = K\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_{kj} r_j\right)(z) + \sigma_k(\infty) = \sum_{k=1}^{n-1} s_{kj}(Kr_j)(z) + \sigma_k(\infty)$$

или

$$\sigma_k(z) = \sigma_k(\infty) + \sum_{j=1}^{n-1} s_{kj}[\sigma_j^*(z) - \sigma_j^*(\infty)], \quad \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega) \tag{4.2}$$

$\| s_{kj} \| = S \quad (k = 1, 2,\ldots, n-1)$

Формула (4.2) устанавливает линейную связь между напряжениями в пластине E_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, находящейся в составе пакета, и соответствующими напряжениями в отдельно взятых пластинах E_j^* $(j = 1, 2,\ldots, n-1)$. Напряжения и вращение в пластине E_n согласно (1.5) находятся через соответствующие напряжения и вращение в пластинах $E_1, E_2,\ldots, E_{n-1}$ по формуле

$$\sigma_n(z) = \sigma_n(\infty) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{h_n}[\sigma_k(z) - \sigma_k(\infty)] \tag{4.3}$$

В данном случае функции $r_k(t)$, являющиеся решениями класса $H^*(L)$ интегральных уравнений (2.3), имеют на концах линии L степенную особенность порядка 1/2, поэтому функции $q_k(t)$, выражаемые линейно через $r_k(t)$, имеют ту же особенность на концах L. Тогда согласно (1.1), (1.2) распределение напряжений вблизи концов линии L в пластинах E_j, соединенных в пакет вдоль L, будет таким же как вблизи вершин тонких жестких остроугольных включений в одной отдельной пластине. В связи с этим определим КИН $(k_1, k_2)_j$ вблизи вершины $z = c$ линии соединения L в пластине E_j по формуле [5]:

$$(k_1 - ik_2)_j = \pm\frac{2i\varkappa_j}{\varkappa_j + 1}\lim_{t\to c}\sqrt{\pm 2\pi(t-c)}\, q_j(t)$$

где верхние знаки соответствуют начальным точкам линии, а нижние – конечным. По той же формуле находятся КИН $(k_1^*, k_2^*)_l$ в пластинах E_l^*, если заменить $\varkappa_j$ и $q_j(t)$ на $\varkappa_l^*$ и $r_l(t)$ соответственно. Тогда в силу равенств (4.2) и (1.5) получим

$$(k_1 - ik_2)_j = \sum_{l=1}^{n-1} s_{jl}\frac{\varkappa_j(\varkappa_l^* + 1)}{\varkappa_l^*(\varkappa_j + 1)}(k_1^* - ik_2^*)_l, \quad \| s_{jl} \| = S \quad (j = 1, 2,\ldots, n-1) \tag{4.4}$$

$$(k_1 - ik_2)_n = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{h_j\varkappa_n(\varkappa_j + 1)}{h_n\varkappa_j(\varkappa_n + 1)}(k_1 - ik_2)_j, \tag{4.5}$$

На основании изложенного можно сделать следующий вывод.

Вывод. Задача соединения пластин $E_1, E_2, \dots, E_n$ в пакет вдоль конечной системы разомкнутых кривых L_j эквивалентна $n-1$ задачам о напряженном состоянии отдельных, никаким образом не связанных между собой, вообще говоря, других $n-1$ пластин $E_1^*, E_2^*, \dots, E_{n-1}^*$ при следующих условиях:

(*1*) пластина E_k^* имеет единичную толщину, модуль сдвига μ_k и коэффициент Пуассона $\nu_k^* = (3\lambda_k - 1)/(\lambda_k + 1)$, где λ_k является собственным значением (с учетом кратности) матрицы $A^{-1}B$, определенной в п. 1;

(*2*) все пластины содержат абсолютно жесткие включения нулевой толщины вдоль кривых L_j;

(*3*) на ∞ пластины E_k^* действуют сила P_k^*, напряжения $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*)_k^\infty$ и вращение ω_k^*, определяемые через исходные данные по формулам (2.6), (3.5), где $\varkappa_k^* = 1/k$, а S – матрица, составленная по столбцам из собственных векторов матрицы $A^{-1}B$.

При этом напряжения, вращение и КИН вблизи концов линий соединения в пластинах E_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$), находящихся в составе пакета, определяются через соответствующие им напряжения, вращение и КИН вблизи вершин жестких включений в пластинах E_k^* ($k = 1, 2, \dots, n-1$), по формулам (4.2) и (4.4), где σ означает одно из напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} или вращение ω, а КИН соответствуют одной и той же вершине линии соединения или включения. Напряжения, вращение и КИН в пластине E_n находятся через соответствующие им величины в пластинах $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ по формулам (4.3) и (4.5).

Таким образом, для нахождения напряжений и КИН в пластинах, соединенных в пакет, надо сначала найти их в описанных выше отдельных пластинах E_k^* или взять их из имеющейся литературы (если они уже найдены), и затем воспользоваться формулами (4.2) – (4.5). Как это сделать, покажем на следующих примерах.

Пусть в пакет вдоль линии $L = \cup L_j$ соединены три пластины, из которых крайние E_1, E_3 одинаковы по толщине и упругим свойствам, т.е. $h_1 = h_3$, $\mu_1 = \mu_3$, $\varkappa_1 = \varkappa_3$, а средняя E_2 имеет, вообще говоря, другую толщину h_2 и другие упругие постоянные μ_2, $\varkappa_2$. Тогда присутствующие в формулах (2.6), (3.5), (4.2) – (4.5) матрицы $S = \| s_{kj} \|$, $S^{-1} = \| d_{kj} \|$, $(AS)^{-1} = \| c_{kj} \|$ и упругие постоянные $\varkappa_1^*, \varkappa_2^*$ "вспомогательных" пластин E_1^*, E_2^* находятся по формулам

$$\| s_{kj} \| = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{2\eta} & -1 \\ 2\eta & \\ 0 & 2\eta \end{Vmatrix}, \quad \| d_{kj} \| = \begin{Vmatrix} 2\eta & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{2\eta} \end{Vmatrix}, \quad \| c_{kj} \| = \begin{Vmatrix} \eta & 0 \\ -\dfrac{\beta}{4\alpha + 2\beta} & \dfrac{\beta}{2\alpha + \beta} \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

$$\varkappa_1^* = \varkappa_1, \quad \varkappa_2^* = \frac{(2\alpha + \beta)\varkappa_1\varkappa_2}{2\alpha\varkappa_1 + \beta\varkappa_2}, \quad \alpha = \frac{h_1\mu_1}{h_2\mu_2}, \quad \beta = \frac{\varkappa_1(1 + \varkappa_2)}{\varkappa_2(1 + \varkappa_1)}, \quad \eta = \frac{h_1}{h_2} \tag{4.7}$$

Пример 1. Пусть на ∞ в пластинах E_1, E_3 заданы одинаковые силы $P_1 = P_3 = P_0$, в пластине E_2 – сила $P_2 = -2\eta P_0$, а все остальные исходные данные задачи – нулевые. Тогда согласно (2.6), (3.5), (4.6) все напряжения, вращения и силы на ∞ в пластинах E_1^*, E_2^* равны нулю, кроме $P_2^* = -P_0$. Следовательно, $(k_1 - ik_2)_1^* = 0$.

Пусть известны из литературы или найдены $(k_1 - ik_2)'$ – КИН вблизи того или иного конца линии L для пластины E_2^* при $P_2^* = 1$. Тогда вблизи этого конца $(k_1 - ik_2)_2^* = -P_0(k_1 - ik_2)'$ и согласно (4.4) – (4.6) для исходных пластин

$$(k_1 - ik_2)_1 = (k_1 - ik_2)_3 = \frac{\varkappa_1(1 + \varkappa_2^*)}{\varkappa_2^*(1 + \varkappa_1)} P_0(k_1 - ik_2)', \quad (k_1 - ik_2)_2 = -2\eta(k_1 - ik_2)_1$$

В частности, если пластины соединены только вдоль одного отрезка $L = [-a, a]$, то [4] $(k_1 - ik_2)'(\pm a) = \pm \varkappa_2^* / [(1+\varkappa_2^*)\sqrt{\pi a}]$, и

$$(k_1 - ik_2)_1(\pm a) = (k_1 - ik_2)_3(\pm a) = \pm \frac{\varkappa_1 P_0}{(1+\varkappa_1)\sqrt{\pi a}}$$

$$(k_1 - ik_2)_2(\pm a) = \mp \frac{2\eta\varkappa_2 P_0}{(1+\varkappa_2)\sqrt{\pi a}}$$

т.е. пластины в составе пакета ведут себя так же, как если бы взяли отдельные пластины E_1, E_2, E_3, содержащие абсолютно жесткие включения нулевой толщины вдоль отрезка $[-a, a]$ и нагруженные на ∞ силами $P_0, -2\eta P_0, P_0$ соответственно.

Пример 2. Пусть в пластинах E_1, E_3 на ∞ силы равны нулю и соответствующие напряжения и вращение одинаковы, а для пластины E_2 все исходные данные – нулевые. Тогда согласно (2.6), (3.5), (4.6) все данные на ∞ в пластинах E_1^*, E_2^* равны нулю, т.е. пластины в составе пакета ведут себя как сплошные пластины без каких-либо дефектов.

Пример 3. Пусть выполнены все условия примера 2, кроме напряжения $(\sigma_x)_2^\infty = \sigma_0$, действующего на ∞ в пластине E_2 (случай A). Тогда все данные для пластин E_1^*, E_2^* будут нулевые, кроме $(\sigma_x^*)_2^\infty = \xi(2 - \varkappa_2^* - \varkappa_2)\sigma_0$, $(\sigma_y^*)_2^\infty = \xi(\varkappa_2^* - \varkappa_2)\sigma_0$, где $\xi = \mu_1\beta\varkappa_2^*(1+\varkappa_1)/[2\mu_2(2\alpha+\beta)\varkappa_1(1+\varkappa_2^*)(1-\varkappa_2^*)]$.

Пусть известны $(k_1 - ik_2)''$ – КИН вблизи некоторого конца линии L в пластине E_2^* с жесткими включениями нулевой толщины вдоль L, когда $(\sigma_x^*)_2^\infty = 2 - \varkappa_2^* - \varkappa_2$ и $(\sigma_y^*)_2^\infty = \varkappa_2^* - \varkappa_2$. Тогда для этого конца $(k_1 - ik_2)_2^* = \xi\sigma_0(k_1 - ik_2)''$ и из формул (4.4) – (4.6), учитывая, что $(k_1 - ik_2)_1^* = 0$, получим

$$(k_1 - ik_2)_1^* = \frac{\mu_1\beta\sigma_0}{2\mu_2(2\alpha+\beta)(\varkappa_2^* - 1)}(k_1 - ik_2)'' \tag{4.8}$$

$$(k_1 - ik_2)_2 = -2\eta(k_1 - ik_2)_1, \quad (k_1 - ik_2)_3 = (k_1 - ik_2)_1$$

Формулы (4.8) остаются в силе и в случаях, когда условия примера 2 нарушены лишь для $(\sigma_y^\infty)_2 = \sigma_0$ (случай B) или лишь для $(\tau_{xy}^\infty)_2 = \tau_0$ (случай C). Для этого в формулах КИН $(k_1 - ik_2)''$ в случае B надо брать при $(\sigma_x^*)_2^\infty = \varkappa_2^* - \varkappa_2$, $(\sigma_y^*)_2^\infty = 2 - \varkappa_2^* - \varkappa_2$, а в случае C – при $(\tau_{xy}^*)_2^\infty = 2(1 - \varkappa_2^*)$ и еще заменить σ_0 на τ_0.

В чстности, если пластины соединены только вдоль отрезка $[-a, a]$, то [4] для пластины E_2^*, имеющей упругие постоянные μ_2, $\varkappa_2^*$, при $(\sigma_x^*)_2^\infty = 2 - \varkappa_2^* - \varkappa_2$, $(\sigma_y^*)_2^\infty = \varkappa_2^* - \varkappa_2$ коэффициент $(k_1 - ik_2)'' = (1 + \varkappa_2)(\varkappa_2^* - 1)\sqrt{\pi a}/2$. Тогда в случае А, описанном в начале примера

$$(k_1 - ik_2)_1 = \frac{\mu_1\beta(1+\varkappa_2)\sigma\sqrt{\pi a}}{4\mu_2(2\alpha+\beta)}$$

где постоянные α, β находятся по формулам (4.7). Аналогично, в случаях А и В имеем

$$(k_1 - ik_2)_1 = \frac{\mu_1\beta(\varkappa_2 - 3)\sigma\sqrt{\pi a}}{4\mu_2(2\alpha+\beta)}, \quad (k_1 - ik_2)_1 = i\frac{\mu_1\beta\tau_0\sqrt{\pi a}}{\mu_2(2\alpha+\beta)}$$

соответственно.

Используя результаты работы [5], приведем еще КИН для случая А при соединении пластин в пакет вдоль двух взаимно перпендикулярных отрезков $L_1 = [-a, a]$ и $L_2 = [i(d-a), i(d+a)]$, $d > a$. В этом случае коэффициенты k_1'', k_2'', через которые выражаются КИН по формулам (4.8), (4.7), находятся по асимптотическим формулам

$$k_1''(\pm a) = \frac{\sqrt{\pi a}}{4}\left\{(3-\varkappa)(2-2\varkappa_2) + \frac{\lambda^2}{8\varkappa}(1+\varkappa)[2-2\varkappa_2 \pm \frac{\lambda}{2}(2-\varkappa-\varkappa_2)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^4}{128\varkappa^2}[9\varkappa - 15\varkappa_2 + 6 + \varkappa(52\varkappa - 30\varkappa_2 - 22) - \varkappa^2(24\varkappa - 30\varkappa_2 + 6)] + O(\lambda^6)\right\}$$

$$k_2''(\pm a) = \sqrt{\pi a}(\varkappa_2 - \varkappa)\left\{\pm\lambda^3(1+\varkappa)(2+\varkappa)/(64\varkappa) + O(\lambda^5)\right\}$$

$$k_1''(i(d\pm a)) = \frac{\sqrt{\pi a}}{4}\left\{(1+\varkappa)(2\varkappa_2 - 2) + \frac{\lambda^2}{8\varkappa}[(1-\varkappa)(1+\varkappa_2) \pm \frac{\lambda}{2}(3-\varkappa)(\varkappa - \varkappa_2)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^4}{128\varkappa^2}[2\varkappa - 2\varkappa_2 - \varkappa(40\varkappa - 42\varkappa_2 + 82) - \varkappa^2(10\varkappa - 16\varkappa_2 + 26)] + O(\lambda^6)\right\}$$

$$k_2''(i(d\pm a)) = \sqrt{\pi a}(2-\varkappa-\varkappa_2)\left\{\pm\lambda^3(3-\varkappa)(2+\varkappa)/(64\varkappa) + O(\lambda^5)\right\}$$

$$\varkappa = \varkappa_2^*, \quad \lambda = a/d$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00308).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сильвестров В.В., Шумилов А.В.* Задача соединения упругих пластин в пакет вдоль кривых // Известия РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 165–170.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
3. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
22.10.1999