

УДК 539.3

© 2000 г. М.Я. ПАНОВКО

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОРА СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ
КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ПАРАМЕТРЫ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА

Для многих узлов трения, например, для зубчатых передач и подшипников качения, типичным является режим упругогидродинамической (УГД) смазки сосредоточенных контактов с зоной контакта в виде эллипса. Режим УГД смазки характеризуется наличием тонкой смазочной пленки, толщина которой в несколько раз превосходит высоту шероховатости поверхностей, и упругой деформацией тел в зоне контакта. Численными методами эллиптические УГД контакты исследованы весьма подробно для условий, когда вектор средней скорости смазываемых поверхностей совпадает с одной из осей эллипса контакта [1, 2]. Между тем в некоторых зубчатых передачах (винтовые, спиральные, гипоидные) вектор скорости может занимать промежуточные направления. Ранее этот случай исследовался для режимов умеренного нагружения путем решения УГД задачи методом верхней релаксации в [3]. Настоящая работа посвящена численному анализу эффектов, вызванных произвольной ориентацией вектора скорости контактирующих поверхностей, в тяжело нагруженном эллиптическом УГД контакта методом Ньютона.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарная задача об эллиптическом УГД контакте в изотермических условиях со смазочной пленкой, имеющей свойства несжи-маемой вязкой жидкости. Смазываемые поверхности контактирующих тел полагаются гладкими. В задаче используются типичные допущения УГД теории смазки [4]. Введем безразмерные переменные

$$(x', y') = \frac{(x, y)}{a_H}, \quad p' = \frac{p}{p_H}, \quad h' = \frac{h}{h_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad H_0 = \frac{2R'_x h_0}{a_H^2}, \quad \varepsilon = \frac{R'_x}{R'_y}$$

$$\beta = \frac{a_H}{b_H}, \quad e = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \phi(\beta) = \frac{K(e) - D}{\beta^4 D}, \quad D = \frac{K(e) - E(e)}{e^2}$$

$$V = \frac{24\mu_0 |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| R'_x^2}{p_H a_H^3}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}, \quad v_x = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}, \quad v_y = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

где x, y – декартовы координаты в плоскости контакта; R'_x, R'_y – приведенные радиусы кривизны контактирующих тел; p – давление в смазочной пленке; a_H и b_H – полуоси герцевского эллипса контакта ($a_H \leq b_H$, полуось a_H располагается по оси x , полуось b_H – по оси y); e – эксцентриситет эллипса контакта; p_H – максимальное герцевское напряжение; h – толщина смазочной пленки; h_0 – толщина смазочной пленки в начале координат; μ – вязкость смазки; μ_0 – вязкость смазки при давлении окружающей

среды; $\mathbf{v}_1(v_{1x}, v_{1y}), \mathbf{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$ – векторы и компоненты скоростей соответственно верхней и нижней контактирующих поверхностей; H_0 – безразмерная толщина пленки в начале координат; V – нагрузочно-скоростной параметр; $K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; постоянная β определяется из уравнения $\beta^2\phi(\beta) = R'/R_x'$; α – угол между направлением вектора средней скорости контактирующих поверхностей \mathbf{v} и малой осью эллипса контакта.

Уравнения УГД задачи имеют в безразмерных переменных следующий вид (далее штрихи опущены):

$$L(p) = \nabla \cdot \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$h(x, y) = 1 + \frac{x^2 + \epsilon y^2}{H_0} + \frac{\epsilon}{\pi \beta^2 D H_0} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.2)$$

$$M(p) = \frac{2\pi}{3\beta} - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.3)$$

$$p|_C = \frac{\partial p}{\partial n}|_{C_e} = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

где C – граница области контакта Ω , C_e – выходная граница (часть границы области контакта, на которой $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0$), \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали.

Система (1.1)–(1.4) является нелинейной интегродифференциальной системой, состоящей из уравнения Рейнольдса (1.1), соотношения для толщины смазочной пленки между упругими телами (1.2), условия равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (1.3), краевых условий для давления (1.4).

Для определения местоположения выходной (свободной) границы, отделяющей зону смазки от зоны кавитации, используются условия дополнительности [5], согласно которым

$$L(p) = 0, \quad p > 0; \quad L(p) < 0, \quad p = 0 \quad (1.5)$$

В системе уравнений (1.1)–(1.4) заданными являются геометрия входной границы смазочной пленки, нагрузочно-скоростной параметр V , параметр ϵ , угол α и зависимость $\mu(p)$. В расчетах использовалась зависимость $\mu = \mu_0 \exp(Qp)$, где Q – пьезокоэффициент вязкости. Для тяжело нагруженного УГД контакта $V \ll 1, Q \gg 1$.

Решением системы (1.1)–(1.4) являются при различных значениях угла α распределение давления $p(x, y)$, толщины смазочной пленки $h(x, y)$, безразмерная толщина смазочной пленки в начале координат H_0 и расположение выходной границы $x_e(y)$, отделяющей область положительного давления от области кавитации.

2. Численный метод. Исследуемая область контакта Ω в плоскости (x, y) задается в виде прямоугольника $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$, который покрывается неравномерной разнесенной декартовой сеткой с системой узлов $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Давление определяется в узлах (x_i, y_j) , толщина смазочной пленки – в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. После интегрирования уравнения (1.1) по области, занимаемой расчетной ячейкой, и преобразовании двойного интеграла в интеграл по контуру ячейки (l) получаем

$$L_l(p) = \iint_l [H_0^2 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h] dl = 0 \quad (2.1)$$

Оператор $L(p)$ в условиях дополнительности (1.5) заменяется на $L_1(p)$. Система УГД уравнений решалась методом Ньютона. Уравнения (1.3), (1.4), (2.1) после линеаризации около решения $(p_k(x, y), H_{0,k})$, где k – номер итерации, приобретают форму, используемую при выводе разностной схемы

$$\begin{aligned} \int_{(l)} \left\{ \left[H_0^2 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right]_k \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_k \Delta p_{k+1} + \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \right)_k \frac{\partial \Delta p_{k+1}}{\partial n} - \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial n} \right)_k \Delta p_{k+1} + \right. \\ \left. + \left[2H_0 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial H_0} + H_0^2 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial H_0} \right]_k \Delta H_{0,k+1} \right\} dl = \\ = - \int_{(l)} \left[H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right]_k dl \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} \Delta p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3\beta} \int_{\Omega_k} p_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

$$\Delta p_{k+1}|_C = 0 \quad (2.4)$$

Производная $(\partial h / \partial p)_k$ в уравнении (2.2) – линейный оператор, действующий на Δp_{k+1} , вида

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_k \Delta p_{k+1} = \frac{\epsilon}{\pi \beta^2 D H_{0,k}} \int_{\Omega_k} G(x, y, \xi, \eta) \Delta p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Из (2.2), (2.3) с учетом (2.5) следует, что система разностных уравнений на каждом итерационном шаге имеет следующую структуру

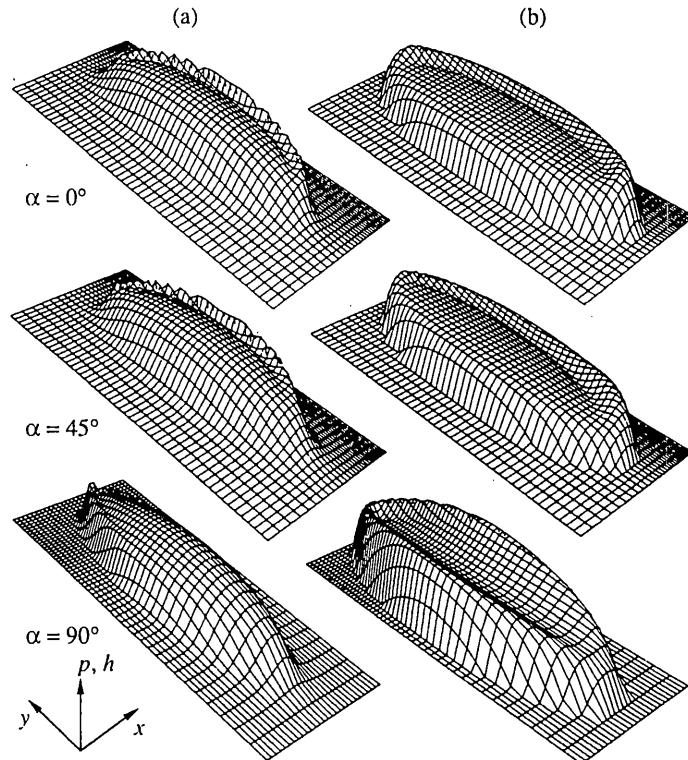
$$\begin{vmatrix} (a_{qr})_{nn} & (b_q)_n \\ (c_r)_n^T & 0 \end{vmatrix}_k \begin{vmatrix} (\Delta p_r)_n \\ \Delta H_0 \end{vmatrix}_{k+1} = - \begin{vmatrix} (L_1(p_r))_n \\ M(p_r) \end{vmatrix}_k$$

где элементами матрицы Якоби порядка $(n+1)$ являются полная квадратная матрица $(a_{qr})_{nn}$ порядка n , матрица-столбец $(b_q)_n$ и матрица-строка $(c_r)_n^T$ ($q, r = 1, \dots, n$). Значение n равно числу узлов сетки, в которых определяется давление, и зависит от местоположения выходной границы:

Интегралы в выражениях (1.2) и (2.5) вычислялись по кубатурной формуле, применяемой при вычислении сингулярных интегралов [6]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_{m-1/2} - \xi)^2 + (y_{n-1/2} - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}} \right) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \\ \cong \sum_{j=1}^{NY} \sum_{i=i1(j)}^{i2(j)} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_{m-1/2} - x_i)^2 + (y_{n-1/2} - y_j)^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x_{mo-1/2} - x_i)^2 + (y_{no-1/2} - y_j)^2}} \right) p(x_i, y_j) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}). \end{aligned}$$

где $i1(j)$, $i2(j)$ – целочисленные массивы, описывающие расположение входной и выходной границ соответственно ($m = 1, \dots, NX + 1$, $n = 1, \dots, NY + 1$). Массив $i2(j)$ опреде-

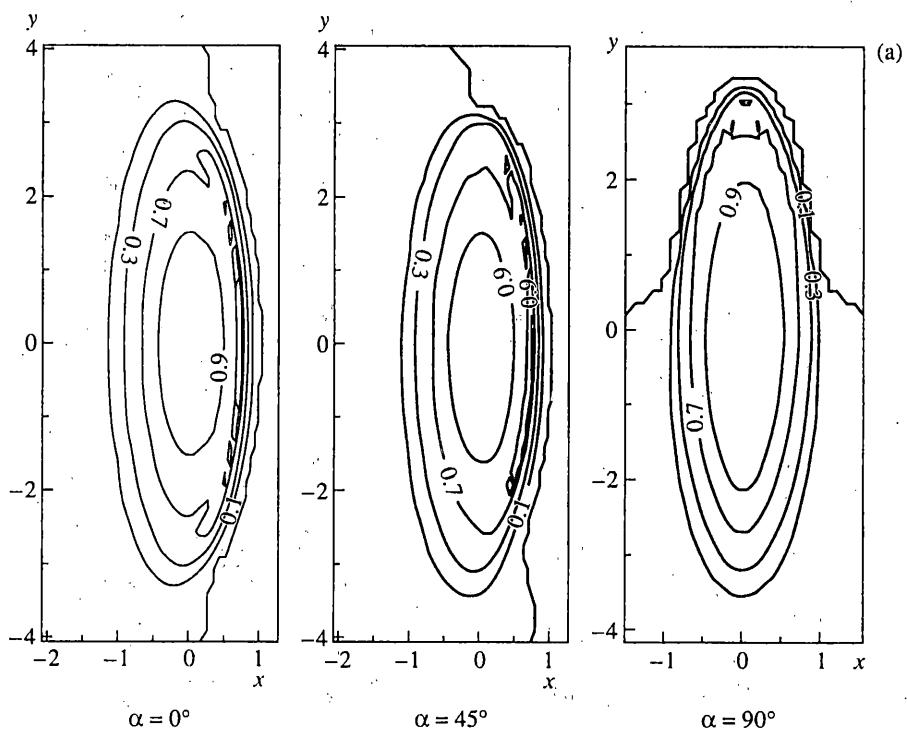


Фиг. 1

ляется на каждой итерации согласно условиям дополнительности (1.5). Узел ($mo - 1/2$, $no - 1/2$) располагается в начале координат.

Один шаг итерационного процесса состоит в решении системы конечно-разностных уравнений относительно $\Delta H_{0,k+1}$, $\Delta p_{k+1}(x_i, y_j)$ методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычислении $H_{0,k+1} = H_{0,k} + \Delta H_{0,k+1}$, $p_{k+1}(x_i, y_j) = p_k(x_i, y_j) + \Delta p_{k+1}(x_i, y_j)$, $h_{k+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ и определении выходной границы $x_{e,k+1}(y_j)$. Итерационный процесс продолжается до достижения относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1} / H_{0,k} - 1|, |p_{k+1} / p_k - 1|, |h_{k+1} / h_k - 1|, |x_{e,k+1} / x_{e,k} - 1|) < \delta$.

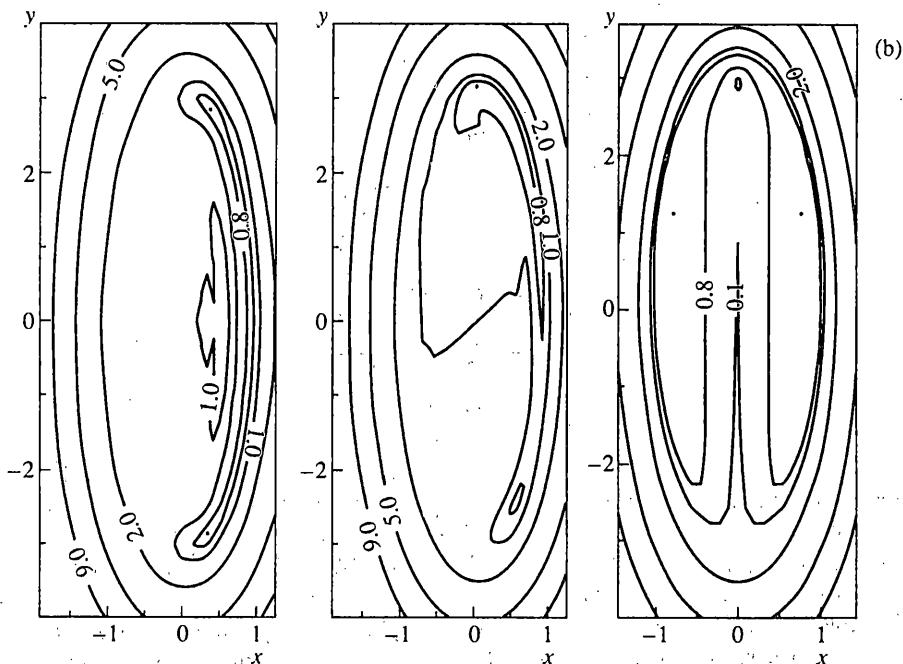
3. Результаты расчетов. Для значений угла α от 0° до 90° результаты расчетов эллиптического УГД контакта на сетке 30×50 при $\beta = 0,3$ ($\varepsilon = 0,1602$), $V = 0,1$, $Q = 5$ представлены на фиг. 1 распределениями $p(x, y)$, $h(x, y)$, на фиг. 2 – изолиниями, а также на фиг. 3 – распределениями $p(x)$, $h(x)$ вдоль малой оси и на фиг. 4 – распределениями $p(y)$, $h(y)$ вдоль большой оси эллипса контакта. (кривые 1–4 соответствуют $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Видно, что с изменением угла α изменяется расположение выходной границы, пиков давления и сужения зазора на выходе из контакта. Давление в центре контакта при $\alpha = 90^\circ$ превышает значения давления в этом месте для меньших значений угла α (см. фиг. 3, a и фиг. 4, a). При угле $\alpha = 0^\circ$ центральная часть зазора является практически плоскостью, параллельной плоскости (x, y) . С увеличением угла α наблюдается все большее отклонение центральной части зазора от поверхности, параллельной плоскости (x, y) . Изменение этого отклонения для сечений $y = 0$ и $x = 0$ показаны на фиг. 3, в и фиг. 4, в. На фиг. 5 показано изменение значений минимальной толщины пленки h_{\min} (светлые точки) и толщины смазочной пленки в центре контакта H_0 (тёмные точки) в зависимости от угла α . Значения h_{\min} с увеличением угла α умень-



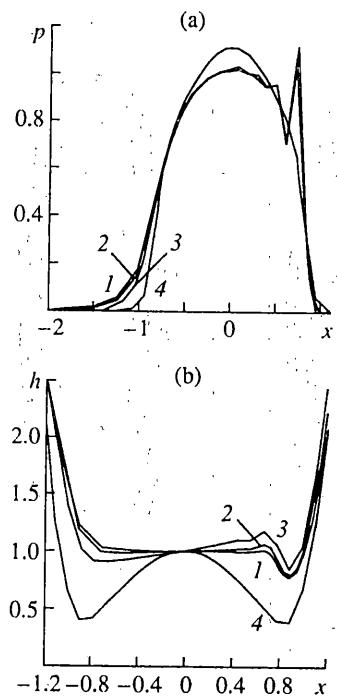
$\alpha = 0^\circ$

$\alpha = 45^\circ$

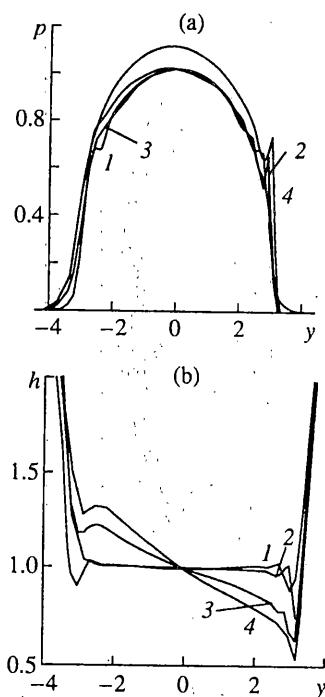
$\alpha = 90^\circ$



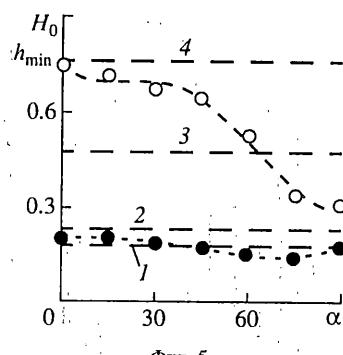
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

щаются особенно заметно при $\alpha > 45^\circ$. Для условий численного моделирования изменение направления вектора скорости от 0° на 90° приводит к уменьшению h_{\min} , более чем в два раза ($h_{\min} = 0,7447$ при $\alpha = 0^\circ$, $h_{\min} = 0,3105$ при $\alpha = 90^\circ$). Зависимость H_0 в отличие от h_{\min} имеет немонотонный характер: $H_0 = 0,202$ при $\alpha = 0^\circ$, $H_0 = 0,1764$ при $\alpha = 90^\circ$, при $\alpha = 75^\circ$ наблюдается минимум $H_0 = 0,1445$. Для сравнения укажем, что в круговом контакте $H_0 = 0,1786$, $h_{\min} = 0,4741$ (соответственно штриховые прямые 1 и 3 на фиг. 5); в линейном контакте $H_0 = 0,2342$, $h_{\min} = 0,7587$ (соответственно штриховые прямые 2 и 4 на фиг. 5).

Результаты численного моделирования свидетельствуют о заметном влиянии ориентации вектора средней скорости контактирующих поверхностей относительно осей эллипса контакта на распределения давления и толщины смазочной пленки в эллиптическом УГД контакте. При этом особенно сильно изменяются значения минимальной

толщины смазочной пленки. Наблюдаемые в настоящей работе особенности изменения параметров УГД контакта в зависимости от угла α проявлялись так же при исследовании умеренно нагруженного УГД контакта другим численным методом [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hamrock B.J., Dowson D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Pt III. Fully flooded results // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1977. V. 99. № 2. P. 264–275.
2. Chittenden R.J., Dowson D., Dunn J.F., Taylor C.M. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. I. Direction of lubricant entrainment coincident with the major axis of the Hertzian contact ellipse // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 397. № 1813. P. 245–269.
3. Chittenden R.J., Dowson D., Dunn J.F., Taylor C.M. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. II. General case, with lubricant entrainment along either principal axis of the Hertzian contact ellipse or at some intermediate angle // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 397. № 1813. P. 271–294.
4. Dowson D., Higginson G.R. Elastohydrodynamic lubrication. Oxford: Pergamon Press, 1966. 235 p.
5. Oh K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88–95.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.07.1999