

УДК 539.3

© 2000 г. А.Г. ГОРШКОВ, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г.В. ФЕДОТЕНКОВ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВЕРТИКАЛЬНОМ УДАРЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассматривается нестационарная контактная задача с изменяющейся областью контакта для тонкой упругой цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости. Для сверхзвукового этапа взаимодействия задача сведена к бесконечной системе интегродифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов Фурье разложения искомых функций. При этом использована интегральная формула связи контактного давления с нормальными перемещениями. Для произвольного временного интервала разрешающей является система интегральных уравнений относительно контактного давления, которая решается численно с использованием специальных квадратурных формул, позволяющих учитывать сингулярные особенности ядер интегральных операторов. Некоторые аспекты этой проблемы исследованы в работах [1–4]¹.

1. Постановка задачи. Тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка радиусом R_0 и толщиной δ_0 в начальный момент времени $t = 0$ по образующей входит в соприкосновение с упругим полупространством $z \geq 0$. В начальный момент времени полупространство находится в невозмущенном состоянии, а все точки оболочки обладают равными скоростями V_0 , вектор которых направлен по нормали к свободной поверхности полупространства $z = 0$. Материалы оболочки и полупространства предполагаются однородными, изотропными и линейно-упругими.

Уравнения движения упругого полупространства запишем в виде [5]:

$$\ddot{\phi} = \Delta\phi, \quad \eta^2 \ddot{\psi} = \Delta\psi, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2 \quad (1.1)$$

где ϕ – скалярный потенциал перемещений, а ψ – ненулевая компонента векторного потенциала перемещений.

Отличные от нуля компоненты вектора смещения u (вдоль оси Ox), w (вдоль оси Oz) и компоненты тензора напряжений связаны с потенциалами следующими дифференциальными выражениями [1]:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{22} = \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{33} = \kappa \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{13} = \frac{1 - \kappa}{\kappa} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Для описания движения оболочки используем записанные в полярной системе координат с центром на оси оболочки и углом ϑ уравнения, учитывающие сдвиг и инерцию

¹ См также: Попов С.Н., Богданов В.Р. Вертикальный удар цилиндрической оболочки об упругое полупространство – Деп. в ВИНТИ 12.11.91, № 4260–В91.

вращения поперечного сечения [1]:

$$\gamma_0^2 \ddot{u}_0 = \frac{\partial T_{11}}{\partial \vartheta} + T_{31} + \beta_1 q \quad (1.3)$$

$$\eta_0^2 \ddot{w}_0 = -\alpha_2 \left(T_{11} + \frac{\partial T_{31}}{\partial \vartheta} \right) + \beta_2 p, \quad \gamma_0^2 \ddot{\theta} = \frac{\partial M_1}{\partial \vartheta} - \alpha_1 T_{31}$$

где w_0, u_0 – смещения в оболочке по нормали к срединной поверхности и в тангенциальном направлении; θ – угол поворота нормального к срединной поверхности волокна вследствие сдвиговых деформаций в поперечном сечении; T_{11}, T_{31} – растягивающее и перерезывающее усилия; M_1 – изгибающий момент; p, q – проекции поверхностного давления на нормальное и тангенциальное направления.

При этом усилия, соответствующие деформации ε_{ij} , χ_{ij} и перемещения оболочки связаны между собой следующим образом:

$$T_{11} = \varepsilon_{11}, \quad T_{31} = 2 \frac{\varepsilon_{31}}{\alpha_2}, \quad M_1 = \chi_{11}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_0}{\partial \vartheta} + w_0 \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\theta + \partial w_0 / \partial \vartheta - u_0), \quad \chi_{11} = \partial \theta / \partial \vartheta$$

Полагая, что вне зоны контакта поверхности полупространства и оболочки свободны от напряжений, и контакт происходит в условиях свободного проскальзывания, приходим к следующим граничным условиям ($q = 0$):

$$\sigma_{13}(\tau, x, 0) = 0 \quad (x \in (-\infty, \infty))$$

$$\sigma_{33}(\tau, x, 0) = 0 \quad (|x| > b(\tau)) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{33}(\tau, x, 0) = p(\tau, x), \quad w(\tau, x, 0) = w_0 + \sqrt{1 - x^2} - 1 \quad (|x| \leq b(\tau)), \quad (|\vartheta| \leq \vartheta_*(\tau))$$

Здесь $2b(\tau) = 2 \sin \vartheta_*(\tau)$ – ширина области контакта. Она определяется приближенно из условия пересечения недеформированных границ полуплоскости и оболочки:

$$b = \sin \vartheta_* = \sqrt{1 - (1 - w_s)^2} = \sqrt{w_s(2 - w_s)} \quad (1.6)$$

где w_s – глубина проникания оболочки как абсолютно твердого тела.

Уравнение движения оболочки как твердого тела имеет следующий вид:

$$m \ddot{w}_s = R(\tau) = \int_{-\vartheta_*(\tau)}^{\vartheta_*(\tau)} p(\tau, \sin \alpha) d\alpha = \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} \frac{p(\tau, \xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \quad (1.7)$$

где R – результирующая контактного давления.

К задаче (1.1)–(1.7) необходимо добавить условие отсутствия возмущений на бесконечности и следующие начальные условия:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0, \quad w_s|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{w}_s|_{\tau=0} = V_0 \quad (1.8)$$

$$u_0|_{\tau=0} = w_0|_{\tau=0} = \theta_0|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}_0|_{\tau=0} = V_0 \sin \vartheta, \quad \dot{w}_0|_{\tau=0} = V_0 \cos \vartheta$$

В приведенной постановке и далее использованы следующие безразмерные величины (штрихом обозначены размерные параметры):

$$x = \frac{x'}{R_0}, \quad z = \frac{z'}{R_0}, \quad w = \frac{w'}{R_0}, \quad u = \frac{u'}{R_0}, \quad w_0 = \frac{w'_0}{R_0}, \quad u_0 = \frac{u'_0}{R_0}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{R_0}$$

$$\varphi = \frac{\varphi'}{R_0^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{R_0^2}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 &= \frac{c_1^2}{c_{01}^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{c_1^2}{c_{02}^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_{01}^2 = \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)\rho_0} \\
c_{02}^2 &= \frac{5E_0}{12(1 + \nu_0)\rho_0}, \quad T_{il} = \frac{T'_{il}}{E_{00}} (i=1,3), \quad M_1 = \frac{M'_1 R_0}{D_0}, \quad q = \frac{q'}{\lambda + 2\mu} \\
p &= \frac{p'}{\lambda + 2\mu}, \quad \alpha_1 = \frac{12R_0}{\delta_0^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\eta_0^2}{\gamma_0^2}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{E_0}, \quad \beta_2 = \alpha_2 \beta_1 \\
\beta &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho c_1^2}, \quad D_0 = \frac{E_{00} \delta_0^2}{12}, \quad E_{00} = \frac{E_0 \delta_0}{1 - \nu_0^2}, \quad m = \frac{m'}{\rho R_0^2}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность материала полупространства; c_1, c_2 – скорости распространения волн в упругом полупространстве; c_{01}, c_{02} – скорости распространения волн в оболочке; E_0, ν_0, ρ_0 – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала оболочки; D_0 – цилиндрическая жесткость, m – погонная масса оболочки.

2. Алгоритм решения на начальном (сверхзвуковом) этапе взаимодействия. Представим кинематические параметры оболочки и давление в виде рядов Фурье

$$\left\| \begin{matrix} u_0 \\ \theta \end{matrix} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \begin{matrix} u_{0n}(\tau) \\ \theta_n(\tau) \end{matrix} \right\| \sin n\vartheta, \quad \left\| \begin{matrix} w_0 \\ p \end{matrix} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{matrix} w_{0n}(\tau) \\ p_n(\tau) \end{matrix} \right\| \cos n\vartheta \tag{2.1}$$

При этом, как следует из (1.4) и (2.1), имеют место следующие равенства:

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_{11} \\ T_{11} \\ M_1 \end{matrix} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{matrix} w_{0n} + nu_{0n} \\ w_{0n} + nu_{0n} \\ n\theta_n \end{matrix} \right\| \cos n\vartheta \tag{2.2}$$

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_{31} \\ T_{31} \end{matrix} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\frac{1}{2}(\theta_n - nw_{0n} - u_{0n})}{\alpha_2} \right\| \sin n\vartheta$$

Тогда из (1.3), (1.6), (1.7) получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов Фурье

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_{0n}(\tau) &= \gamma_0^{-2} [-(1 + n^2)u_{0n}(\tau) - 2nw_{0n}(\tau) + \theta_{0n}(\tau)] \\
\ddot{w}_{0n}(\tau) &= \eta_0^{-2} [-2\alpha_2 nu_{0n}(\tau) - \alpha_2(1 + n^2)w_{0n}(\tau) + \alpha_2 n\theta_{0n}(\tau) + \beta_2 p_n(\tau)] \\
\ddot{\theta}_n(\tau) &= \gamma_0^{-2} [\alpha_1 u_{0n}(\tau) + \alpha_1 nw_{0n}(\tau) - (\alpha_1 + n^2)\theta_n(\tau)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
b(\tau) &= (1 - \nu_s) \dot{w}_s / \nu_s, \quad \ddot{w}(\tau) = R / m
\end{aligned} \tag{2.3}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned}
u_{0n}(0) &= w_{0n}(0) = \theta_{0n}(0) = w_{0s}(0) = b(0) = 0 \\
\dot{u}_{0n}(0) &= \dot{w}_{0n}(0) = 0 \quad (n \neq 1), \quad \dot{u}_{01}(0) = \dot{w}_{01}(0) = \dot{w}_{0s}(0) = V_0
\end{aligned}$$

Результирующая сила R в (2.3) после интегрирования (1.7) приобретает вид

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\tau) e_j(b(\tau)), \quad e_j(x) = 2 \int_0^x \frac{T_j(\sqrt{1 - \xi^2})}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \\
&= \frac{2}{j} x U_{j-1}(\sqrt{1 - x^2}) \quad (j \geq 1), \quad e_0(x) = 2 \arcsin x
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $T_n(x)$ и $U_n(x)$ – полиномы Чебышева первого и второго рода [6]. Система уравнений (2.3) не замкнута, так как не известны функции $p_n(\tau)$. Поэтому добавляем к ней справедливую при сверхзвуковом расширении области контакта связь давления p с перемещениями [5]:

$$p(x, \tau) = -\dot{w}_0(x, \tau)H(\tau)H(b - |x|) + \int_0^\tau \dot{w}_0(b, \tau) \frac{x - b(t)}{\tau - t} \Gamma_f(x - b, \tau - t) dt - \quad (2.5)$$

$$- \int_0^\tau \dot{w}_0(b, \tau) \frac{x + b(t)}{\tau - t} \Gamma_f(x + b, \tau - t) dt - \int_0^\tau dt \int_{-b(t)}^{b(t)} \frac{\partial \dot{w}_0(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{x - \xi}{\tau - t} \Gamma_f(x - \xi, \tau - t) d\xi$$

$$\Gamma_f(x, \tau) = -\frac{\beta}{\pi \eta^2 x^4} \frac{(\eta^2 x^2 - 2\tau^2)^2}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} H(\tau - |x|) + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{4\beta\tau^2}{\pi \eta^2 x^4} \sqrt{\tau^2 - \eta^2 x^2} H(\tau - \eta|x|)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, $\Gamma_f(x, \tau)$ – функция влияния для плоской задачи.

Используя представление (2.5), соответствующие формулы для коэффициентов рядов Фурье и замену $x = \sin \vartheta$, приходим к следующей связи $p_n(\tau)$ и $w_{0n}(\tau)$:

$$p_n = \sum_{j=0}^{\infty} [-\dot{w}_{0j}(\tau) f_{nj}(b(\tau)) + \int_0^\tau \dot{w}_{0j}(t) g_{nj}(b(\tau); -b(t), \tau - t) dt]$$

$$f_{nj}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{T_n(\sqrt{1-\xi^2}) T_j(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} [e_{n+j}(x) + e_{|n-j|}(x)]$$

$$g_{nj}(x; y, z) = g_{nj}^{(1)}(x; -y, z) - g_{nj}^{(1)}(x; y, z) - g_{nj}^{(2)}(x; y, z) \quad (2.7)$$

$$g_{nj}^{(1)}(x; y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\xi - y}{z} \frac{T_n(\sqrt{1-\xi^2}) T_j(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} \Gamma_f(\xi - y, z) d\xi$$

$$g_{nj}^{(2)}(x; y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \int_{-y}^y \frac{T_n(\sqrt{1-\xi^2}) T_j'(\sqrt{1-\eta^2})}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\eta^2}} \frac{\xi - \eta}{z} \Gamma_f(\xi - \eta, z) d\eta d\xi$$

При вычислении первого интеграла в (2.7) и интеграла в (2.4) использованы свойства полиномов Чебышева. Последние два интеграла в (2.7) в силу особенностей функций влияния являются сингулярными и понимаются в смысле регуляризованного значения. В общем случае они сводятся к эллиптическим, и при реализации алгоритма их удобнее находить численно.

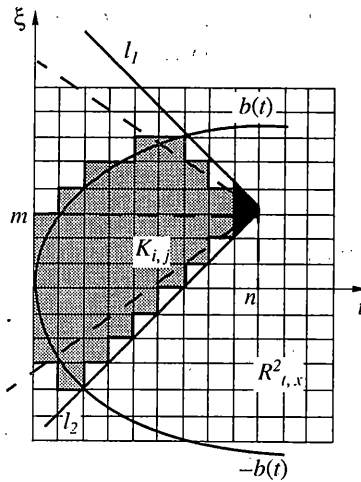
3. Произвольный интервал взаимодействия. Для решения задачи в этом случае используются функции влияния для полупространства $G_f(x, \tau)$ [5] и для оболочки $G_0(x, \tau)$ [1]. Они – соответственно решения краевой задачи (1.1), (1.2) при $\sigma_{13}(\tau, x, 0) = 0$, $\sigma_{33}(\tau, x, 0) = \delta(\tau)\delta(x)$ и (1.3) при $p(\tau, x) = \delta(\tau)\delta(x)$ и нулевых начальных условиях, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Тогда из граничных условий (1.5) получаем интегральное уравнение

$$J(\tau, x, b(\tau)) - J_0(\tau, x, b(\tau)) = \sqrt{1 - x^2} - 1 \quad (3.1)$$

$$J(\tau, x, y) = \int_{0-y}^\tau \int_y G_f(\tau - t, x - \xi) p(t, \xi) dt d\xi$$

$$J_0(\tau, x, y) = \int_{0-y}^\tau \int_y G_0(\tau - t, x - \xi) p(t, \xi) dt d\xi$$



Фиг. 1

Оно вместе с кинематическим условием (1.6) и уравнением (1.7), записанным в интегральной форме

$$w_s = V_0 \tau + \frac{1}{m} J_s(\tau, b(\tau)), \quad J_s(\tau, y) = \int_0^\tau \int_{-y}^y (\tau - t) p(t, \xi) dt d\xi \quad (3.2)$$

образует замкнутую систему.

Для решения системы уравнений (3.1), (3.2), (1.6) используем конечно-разностный метод. На пространственно-временную область $R_{t,\xi}^2$ наносим ортогональную сетку с равномерным шагом h :

$$t_i = ih, \quad \xi_j = jh, \quad R_{t,\xi}^2 = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij} \quad (i = 0, 1, 2, \dots; j \in Z)$$

$$K_{ij} = \{(t, \xi) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i, \xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j\}$$

Функциям одного и двух переменных $w_s(t)$, $b(t)$, $w_0(\tau, x)$, $p(\tau, x)$, $G_f(\tau, x)$, $G_0(\tau, x)$ поставим в соответствие сеточные функции

$$w_{sn} = w_s(t_n), \quad w_{0nm} = w_0(t_n, \xi_m), \quad b_n = b(t_n) \quad (3.3)$$

$$p_{nm} = p(t_n, \xi_m), \quad G_{fnm} = G_f(t_n, \xi_m), \quad G_{0nm} = G_0(t_n, \xi_m).$$

Области интегрирования в (3.1) и (3.2) определяются носителями ядер соответствующих интегральных операторов [5]. Носитель ядра оператора $J(\tau, x, b(\tau))$ ограничен границей области контакта $\xi = \pm b(t)$ и прямыми $l_1: \xi = -t + h(n+m)$ и $l_2: \xi = t - h(n-m)$, которые характеризуют распространение фронта волны растяжения – сжатия в упругой среде (фиг. 1). В численном алгоритме уравнения для l_1 и l_2 заменяем сеточными функциями $l_1: j = -i + n + m$, $l_2: j = i - n + m$.

Область интегрирования представим в виде объединения элементарных вертикальных полос

$$R_{t,\xi}^2 \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n-1} H_{i,p_i}^{q_i}, \quad p_i = \max\left(\left[\frac{-b_i}{h}\right], l_2\right), \quad q_i = \min\left(\left[\frac{b_i}{h}\right], l_1\right)$$

где $[\cdot]$ – целая часть действительного числа.

Для интегралов $J(\tau, x, b(\tau))$, $J_0(\tau, x, b(\tau))$ и $J_s(\tau, b(\tau))$ используем основанные на методе прямоугольников квадратурные формулы

$$J_{nm} = J_{n-1,m}^{(r)} + J_{n-1,m}^{(s)} - hp_{nm} \quad (3.4)$$

$$J_{n-1,m}^{(r)} = \iint_{B_{nm}} G_{fr}(nh-t, mh-\xi) p(\xi, t) dt d\xi \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=p_i}^{q_i} a_{n-i,m-j}^{(r)} p_{ij} \quad (3.5)$$

$$J_{n-1,m}^{(s)} = \iint_{B_{nm}} G_{fs}(nh-t, mh-\xi) p(\xi, t) dt d\xi \approx a_1 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=p_i}^{q_i} a_{n-i,m-j}^{(s)} p_{ij} \quad (3.6)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{[(\eta^2 c_R^2 - 2)^2 \sqrt{1 - c_R^2}]}{(c_R^4 - 2\alpha^2 c_R^2 + \beta^2)}$$

$$a_{nm}^{(r)} = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{fr}(2m+1-u, 2n+1-u) du dv$$

$$a_{nm}^{(s)} = \frac{h}{2c_R^2} \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{l=0}^1 (-1)^{p+l+1} g(q, m+l, n+p) \ln |g(q, m+l, n+p)|$$

$$g(q, m, n) = m + (-1)^q n c_R^2$$

$$J_{0,n-1,m} = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=p_i}^{q_i} G_{0,n-i,m-j} p_{ij} \quad (3.7)$$

$$J_{s,n-1,m} = h^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=p_i}^{q_i} (n-i) p_{ij} \quad (3.8)$$

Здесь G_{fr} и G_{fs} – регулярная и сингулярная составляющие функции влияния для полупространства G_f , которые имеют сингулярную особенность порядка (-1) на фронтах волны Рэлея $x = \pm c_R \tau$ [5].

В результате для системы уравнений (3.1), (3.2), (1.6) получаем следующую разностную схему:

$$b_n = \sqrt{1 - \left(1 - V_0 nh - \frac{J_{s,n-1,m}}{m}\right)^2} \quad (3.9)$$

$$p_{nm} = \frac{1}{h} (J_{n-1,m} - J_{0,n-1,m} + 1 - \sqrt{1 - m^2 h^2})$$

Первое уравнение в (3.9) получено из (1.6) и (3.2), а второе – разностный аналог интегрального уравнения (3.1).

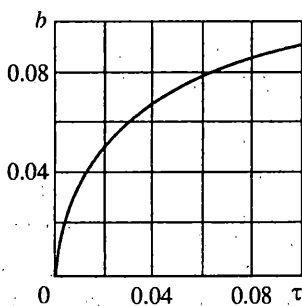
Система уравнений (3.9) распадается на два уравнения. На каждом шаге из первого из них сначала определяем границу области контакта, а затем из второго уравнения находим значения контактного давления в узлах пространственно-временной сетки для текущего значения времени $\tau = nh$.

Соответствующие начальные условия для системы (3.9) имеют вид [5]:

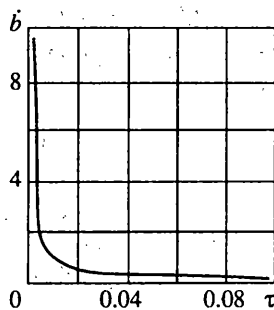
$$b_0 = 0, p_{00} = -V_0 \quad (3.10)$$

4. Пример. В качестве примера рассмотрена задача со следующими параметрами (материалы оболочки и полупространства – сталь): $\delta_0 = 0.05$, $m = 0.3$, $v_0 = v = 0.3$, $\alpha_1 = 4.8 \cdot 10^3$, $\alpha_2 = 3.4$, $\beta_2 = 4.5$, $V_0 = 0.05$.

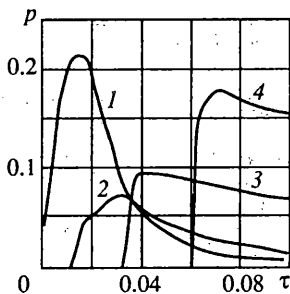
Решение задачи для сверхзвукового этапа было получено численным интегрированием системы функциональных уравнений (2.3) методом Рунге–Кутты в среде MathCad при учете первых пяти членов рядов разложения.



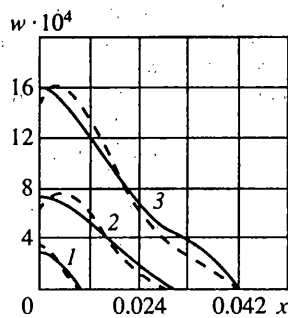
Фиг. 2



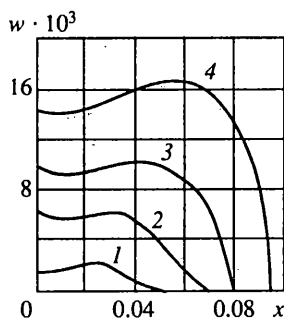
Фиг. 3



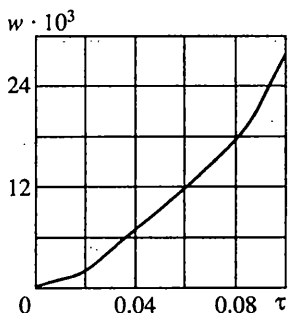
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 2, 3 представлены зависимости от времени границы области контакта и скорости ее расширения соответственно. Момент времени $\tau = 0.014$ соответствует верхней временной границе сверхзвукового этапа взаимодействия. Фиг. 4 иллюстрирует зависимость контактного давления от времени в разных точках поверхности контакта: кривая 1 соответствует лобовой точке, 2 – точке с координатой $x = 0.04$, 3 – $x = 0.06$, 4 – $x = 0.08$.

На фиг. 5 показаны результаты решения задачи на сверхзвуковом этапе с использованием интегральной формулы (2.5) (сплошные линии) в сравнении с решением задачи по алгоритму для произвольного этапа взаимодействия (штриховые линии). Здесь представлены распределения нормальных перемещений оболочки по области контакта. Кривая 1 соответствует моменту времени $\tau = 0.004$, 2 – $\tau = 0.008$, 3 – $\tau = 0.014$.

На фиг. 6 приводится дальнейшая эволюция нормальных перемещений оболочки. Здесь представлены их распределения по области контакта (кривая 1 – $\tau = 0.02$, 2 –

$\tau = 0.04$, $3 - \tau = 0.06$, $4 - \tau = 0.08$). На фиг. 7 показана зависимость от времени перемещения лобовой точки оболочки в нормальном направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00255).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамическая контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и упругого полупространства // Прочность пластин и оболочек при комбинированных воздействиях. М.: МАИ, 1987. С. 16–25.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Удар цилиндрической оболочкой по упругому полупространству // Тр. XVI Гагаринских научных чтений по космонавтике и авиации, Москва, 1986. М., 1987. С. 165.
3. Тарлаковский Д.В. Плоская задача об ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Тр. 14 Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 20–23 окт., 1987 г. Т. 2. Тбилиси, 1987. С. 471–476.
4. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. мех. 1995. Т. 31. № 6. С. 78–85.
5. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами // М.: Наука, 1995. 351 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица С., Стиган И. М.: Наука, 1987. 600 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.04.2000