

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. В.Г. ПОПОВ

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА  
С ЧАСТИЧНО ОТСЛОИВШИМСЯ УПРУГИМ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

Решена задача о взаимодействии волн продольного сдвига с упругим цилиндрическим включением. Последнее предполагается сцепленным с внешней средой, за исключением части границы, где имеется дефект (отслоение), в области которого взаимодействие с внешней средой отсутствует. Требуется определить волновое поле в среде при рассеивании на включении и исследовать динамическое напряженное состояние вблизи дефекта, расположенного на границе раздела сред. Предлагается метод решения этой, а так же аналогичных задач, основанный на использовании разрывных решений уравнения Гельмгольца.

**1.** Для решения задач динамической теории упругости и акустики в областях, имеющих круговую границу или содержащих дефекты, расположенные на дуге окружности построим разрывное решение уравнения

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $G$  – модуль сдвига,  $\omega$  – частота колебаний, терпящее на дуге окружности  $r = r_0$ ,  $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$  разрывы со скачками

$$\langle w \rangle = \chi_2(\theta), \quad \left\langle \frac{\partial w}{\partial r} \right\rangle = \chi_1(\theta), \quad \chi_j(\theta) \equiv 0, \quad \theta \notin [\alpha_1, \alpha_2] \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

В (1.2) и далее принято обозначение  $\langle f \rangle = f(r_0 + 0, \theta) - f(r_0 - 0, \theta)$ . Помимо условия (1.2) искомое решение уравнения (1.1) должно удовлетворять условиям излучения [1] и быть ограниченным при  $r \rightarrow 0$ .

Для построения такого решения к (1.1) и (1.2) применяется конечное преобразование Фурье

$$w_k(r) = \int_{-\pi}^{\pi} w(r, \theta) e^{ik\theta} d\theta, \quad w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k e^{-ik\theta} \quad (1.3)$$

В результате получена одномерная задача о скачке

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw_k}{dr} \right) + \left( \kappa_2^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) w_k = 0, \quad \langle w_k \rangle = \chi_{2k}, \quad \langle w'_k \rangle = \chi_{1k}$$

$$\chi_{jk} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \chi_j(\theta) e^{ik\theta} d\theta \quad (j = 1, 2) \quad (1.4)$$

После решения последней и применения формулы обратного преобразования (1.3)

искомое разрывное решение будет найдено в виде ряда

$$w(r, \theta) = -\frac{ir_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta} [h_k(r)\chi_{1k} - \kappa_2 g_k(r)\chi_{2k}] \quad (1.5)$$

$$h_k(r) = \begin{cases} J_k(\kappa_2 r) H_k(\kappa_2 r_0) & (0 \leq r < r_0) \\ J_k(\kappa_2 r_0) H_k(\kappa_2 r) & (r > r_0) \end{cases} \quad (1.6)$$

$$g_k(r) = \begin{cases} J_k(\kappa_2 r) H'_k(\kappa_2 r_0) & (0 \leq r < r_0) \\ J'_k(\kappa_2 r_0) H_k(\kappa_2 r) & (r > r_0), \quad H_k(\kappa_2 r) = H_k^{(1)}(\kappa_2 r) \end{cases}$$

Оно может быть так же представлено в интегральной форме. Для этого в (1.5) необходимо заменить  $\chi_{jk}$  их представлением из (1.4) и воспользоваться теоремами сложения для цилиндрических функций из [2], согласно которым

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\eta-\theta)} h_k(r) = H_0(\kappa_2 R), \quad \kappa_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\eta-\theta)} g_k(r) = \frac{\partial}{\partial r_0} H_0(\kappa_2 R)$$

$$H_0(\kappa_2 R) = H_0^{(1)}(\kappa_2 R), \quad R = \sqrt{r_0^2 - 2rr_0 \cos(\eta - \theta) + r^2}$$

В результате (1.5) примет вид

$$w = \frac{ir_0}{4} \left( -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \chi_1(\eta) H_0(\kappa_2 R) d\eta + \frac{\partial}{\partial r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \chi_2(\eta) H_0(\kappa_2 R) d\eta \right) \quad (1.7)$$

Представление (1.7) удобно для получения асимптотического разложения разрывного решения, при  $r \gg r_0$ , которое затем может быть использовано для изучения волнового поля на больших расстояниях от линии разрыва. Для этого в (1.7) функции Ганкеля необходимо заменить их асимптотическим разложением для больших значений аргумента [2]. После этого разрывное решение будет представлено в виде

$$w(r, \theta) = -\frac{ir_0}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_2 r}} E_2 \left[ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \chi_1(\eta) e^{-i\kappa_2 r_0 \cos(\eta-\theta)} d\eta - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \chi_2(\eta) e^{-i\kappa_2 r_0 \cos(\eta-\theta)} d\eta \right] + O((\kappa_2 r)^{-3/2}) \quad (1.8)$$

$$E_2 = \exp(i(\kappa_2 r - \pi/4))$$

2. При помощи построенного разрывного решения может быть решена следующая задача. Пусть в упругой среде, находящейся в условиях антиплоской деформации, содержится упругое включение, границами которого является цилиндр  $r = r_0$ ,  $-\pi \leq \theta < \pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

В области  $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$  включение отслоилось, т.е. со средой не взаимодействует:

$$\tau_{rz}(r_0 \pm 0, \theta) = 0, \quad -\alpha < \theta < \alpha \quad (2.1)$$

$$w(r_0 + 0, \theta) - w(r_0 - 0, \theta) = \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) \equiv 0, \quad |\theta| \geq \alpha \quad (2.2)$$

где  $\varphi(\theta)$  – разность перемещений среды и включения. По остальной части границы

выполнены условия полного сцепления

$$\tau_{rz}(r_0 + 0, \theta) - \tau_{rz}(r_0 - 0, \theta) = 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.3)$$

$$w(r_0 + 0, \theta) - w(r_0 - 0, \theta) = 0, \quad |\theta| \geq \alpha$$

В упругой среде распространяется *SH*-волна

$$w_0(r, \theta) = A \exp(i \kappa_{21} r \cos(\theta - \theta_0)), \quad \kappa_{2j}^2 = \omega^2 \rho_j / G_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.4)$$

где  $\rho_1, G_1$  – плотность и модуль сдвига среды вне включения ( $r > r_0$ );  $\rho_2, G_2$  – плотность и модуль сдвига среды составляющей включение ( $r < r_0$ );  $\omega$  – частота колебаний,  $\theta_0$  – угол между направлением распространения волны и осью *Ox*. Множитель  $\exp(-i\omega t)$  здесь и далее опущен.

Требуется определить волновое поле в среде при рассеивании на включении, а также исследовать напряженное состояние вблизи отслоения. Для этого перемещения представляются в виде

$$w = w_0 + w_1 \quad (r > r_0); \quad w = w_2 \quad (r < r_0) \quad (2.5)$$

где  $w_1$  – вызванные волной, отраженной от включения, а  $w_2$  – перемещения, вызванные преломленной волной внутри включения. Тогда функции  $w_j(r, \theta)$  ( $j = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнению (1.1) при  $\kappa_2 = \kappa_{2j}$  соответственно. Условия на границе сред (2.1)–(2.3) при этом примут вид

$$\tau_{rz}^1(r_0 + 0, \theta) + \tau_{rz}^0(r_0 + 0, \theta) = \tau_{rz}^2(r_0 - 0, \theta) = 0, \quad |\theta| < \alpha \quad (2.6)$$

$$\tau_{rz}^1(r_0 + 0, \theta) + \tau_{rz}^0(r_0 + 0, \theta) = \tau_{rz}^2(r_0 - 0, \theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.7)$$

$$w_1(r_0 + 0, \theta) + w_0(r_0 + 0, \theta) - w_2(r_0 - 0, \theta) = \varphi(\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.8)$$

Функции  $w_j(r, \theta)$  ( $j = 1, 2$ ) представляются разрывными решениями уравнения (1.1) со скачками

$$\langle \tau_{rz}^j \rangle = G_j \left\langle \frac{\partial w_j}{\partial r} \right\rangle = G_j \Psi_{j1}(\theta), \quad \langle w_j \rangle = r_0 \Psi_{j2}(\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (2.9)$$

Для этого необходимо положить в (1.5)  $\chi_{1k} = \Psi_{j1k}$ ,  $\chi_{2k} = r_0 \Psi_{j2k}$ ,  $\kappa = \kappa_{2j}$  ( $j = 1, 2$ ). Результат имеет вид

$$w_j(r, \theta) = -\frac{ir_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta} [h_{kj}(r) \Psi_{j1k} - \kappa_{2j} r_0 g_{kj}(r) \Psi_{j2k}] \quad (2.10)$$

$$\Psi_{jlk} = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{jl}(\theta) e^{ik\theta} d\theta, \quad \Psi_{jl} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_{jlk} e^{-ik\theta} \quad (2.11)$$

где  $h_{kj}(r)$  и  $g_{kj}(r)$  определяются формулами (1.6) при  $\kappa_2 = \kappa_{2j}$  ( $j = 1, 2$ ).

Для определения четырех неизвестных скачков  $\Psi_{jl}(\theta)$  ( $j, l = 1, 2$ ) имеется лишь два условия (2.7), (2.8). Чтобы однозначно определить скачки, необходимо привлечь еще два дополнительных условия. Они могут быть получены из следующих соображений. Так как отраженная волна рассматривается только вне включения, то  $w_1(r, \theta)$  можно доопределить нулем в области включения:  $w_1(r, \theta) = 0$  ( $r < r_0$ ), аналогично,  $w_2(r, \theta)$  может быть доопределена нулем вне области включения:  $w_2(r, \theta) = 0$  ( $r > r_0$ ). Из последних равенств следует

$$w_1(r_0 - 0, \theta) = w_2(r_0 + 0, \theta) = 0 \quad (2.12)$$

После подстановки (2.10) в (2.11) находятся соотношения

$$\Psi_{j2k} = \frac{d_{kj}}{\varkappa_{21}r_0} \Psi_{j1k}, \quad d_{k1} = \frac{h_{k1}}{g_{k1}}, \quad d_{k2} = \frac{h_{k2}}{p_{k1}} \quad (2.13)$$

$$h_{kj} = J_k(\varkappa_{2j}r_0)H_k(\varkappa_{2j}r_0), \quad g_{kj} = J_k(\varkappa_{2j}r_0)H'_k(\varkappa_{2j}r_0)$$

$$p_{kj} = J'_k(\varkappa_{2j}r_0)H_k(\varkappa_{2j}r_0), \quad h_{kj} = J'_k(\varkappa_{2j}r_0)H'_k(\varkappa_{2j}r_0)$$

Из (2.10) и (2.12) следуют следующие представления для перемещений и напряжений

$$w_j(r, \theta) = -\frac{ir_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta} \Psi_{j1k} [h_{kj}(r) - d_{kj}g_{kj}(r)] \quad (2.14)$$

$$\tau_{rz}^j(r, \theta) = -\frac{ir_0 G_j}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta} \Psi_{j1k} [h'_{kj}(r) - d_{kj}g'_{kj}(r)] \quad (j=1,2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что напряжения определенные в (2.14) удовлетворяют равенствам

$$\tau_{rz}^1(r_0 - 0, \theta) = 0, \quad \tau_{rz}^2(r_0 + 0, \theta) = 0 \quad (2.15)$$

Тогда в соответствии с определением скачков в (1.2) из (2.12) и (2.15) следует

$$w_1(r_0 + 0, \theta) = r_0 \Psi_{12}(\theta), \quad w_2(r_0 - 0, \theta) = -r_0 \Psi_{22}(\theta) \quad (2.16)$$

$$\tau_{rz}^1(r_0 + 0, \theta) = G_1 \Psi_{11}(\theta), \quad \tau_{rz}^2(r_0 - 0, \theta) = -G_2 \Psi_{21}(\theta)$$

Теперь после реализации условий на границе включения (2.6), (2.7) с учетом (2.17), (2.13), (2.11) Фурье-коэффициенты скачков находятся в виде

$$\Psi_{11k} = -\varkappa_0 \lambda \varphi_k a_k - 2\pi \delta \varkappa_0 a_k c_k^1 \quad (2.17)$$

$$\Psi_{21k} = -\varkappa_0 \lambda \varphi_k a_k \beta - 2\pi \delta \varkappa_0 \beta a_k c_k^2, \quad a_k = J'_k(\lambda \varkappa_0) H'_k(\varkappa_0) \Delta_k^{-1}$$

$$\Delta_k = \beta J_k(\lambda \varkappa_0) H'_k(\varkappa_0) - \lambda J'_k(\lambda \varkappa_0) H_k(\varkappa_0)$$

$$c_k^1 = -b_k + b'_k \frac{J_k(\lambda \varkappa_0)}{J'_k(\varkappa_0)}, \quad c_k^2 = -\lambda b_k + \beta b'_k \frac{H_k(\varkappa_0)}{H'_k(\lambda \varkappa_0)}$$

$$\beta = \frac{G_1}{G_2}, \quad \delta = \frac{A}{r_0}, \quad \varkappa_0 = \varkappa_{21} r_0, \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \lambda = \frac{\varkappa_{22}}{\varkappa_{21}} = (\gamma \beta)^{-1/2}$$

Величины  $b_k$ ,  $b'_k$ ,  $\varphi_k$  являются коэффициентами следующих разложений:

$$w_0(r_0, \theta) = \delta r_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ik\theta}, \quad \tau_{rz}^0(r_0, \theta) = \delta \varkappa_0 G_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ik\theta}, \quad \varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{-ik\theta}$$

и определяются формулами

$$b_k = i^k e^{ik\theta_0} J_k(\varkappa_0), \quad b'_k = i^k e^{ik\theta_0} J'_k(\varkappa_0), \quad \varphi_k = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\theta) e^{ik\theta} d\theta$$

Формулы (2.17), (2.14) позволяют выразить поля перемещений отраженной и преломленной волн через  $\varphi_k$ . Это выражение для отраженной волны имеет вид

$$w_1(r, \theta) = \frac{ir_0 \varkappa_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\theta} a_k [h_{k1}(r) - d_{k1} g_{k1}(r)] [\lambda \varphi_k + 2\pi \delta c_k^1], \quad \tau_{rz}^1 = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} \quad (2.18)$$

Для окончательного определения перемещений и напряжений по вышеприведенным формулам необходимо определить функцию  $\varphi(\theta)$ . Она может быть найдена из условия (2.6) после подстановки (2.18). В результате получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $\varphi(\theta)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\eta) K(\eta - \theta) d\eta = f(\theta), \quad -\alpha < \theta < \alpha \quad (2.19)$$

$$K(z) = \kappa_0 \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ikz} = \kappa_0 \lambda \left( a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kz \right), \quad a_k = a_{-k}$$

$$f(\theta) = \delta \kappa_0 \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ik\theta} \left( b_k - b'_k \frac{H_k(\kappa_0)}{H'_k(\kappa_0)} \right)$$

Если в уравнении (2.19) выполнить интегрирование по частям, учтя что  $\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) = 0$ , то оно примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi'(\eta) R(\eta - \theta) d\eta = -f(\theta), \quad -\alpha < \theta < \alpha \quad (2.20)$$

$$R'(z) = K(z), \quad R(z) = \kappa_0 \lambda \left( a_0 z + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kz}{k} \right)$$

Уравнение (2.20) необходимо рассматривать совместно с условием

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi'(\eta) d\eta = 0 \quad (2.21)$$

Чтобы выделить сингулярную часть ядра  $R(z)$  необходимо найти асимптотические представления для коэффициентов  $a_k$  при  $k \rightarrow \infty$ . Это легко сделать с помощью асимптотических разложений для цилиндрических функций при больших значениях индекса [2]. Имеет место следующая асимптотика:

$$a_k = \frac{k}{\lambda \kappa_0 (1 + \beta)} \left[ 1 + Ak^{-2} + O(k^{-3}) \right], \quad k \rightarrow \infty$$

где  $A$  – постоянная, зависящая от упругих характеристик внешней среды и включения.

Найденное асимптотическое разложение после замены переменных

$$\tau = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \theta \in [-\alpha, \alpha]$$

позволяет представить (2.20), (2.21) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\tau) d\tau}{1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \left[ \frac{1 + \tau t \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{\tau - t} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} G(\tau, t) \right] d\tau = h(t), \quad t \in [-1, 1] \quad (2.22)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\psi(\tau) d\tau}{1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = 0$$

$$\psi(\tau) = \varphi' \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \tau \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right), \quad G(\tau, t) = F \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \tau \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$F(z) = -\frac{2A}{1 + \beta} \operatorname{sign} z \int_0^{|z|} \ln \left( \sin \frac{t}{2} \right) dt + \kappa_0 \lambda a_0 z + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kz$$

$$B_k = k^{-1} \left[ \kappa_0 \lambda a_k - \frac{k^{-1} A}{(1 + \beta)} \right], \quad h(t) = f' \left( 2 \operatorname{arctg} \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

Решение (2.22) имеет на концах промежутка  $[-1, 1]$  корневую особенность [3] и может быть представлено в виде

$$\Psi(\tau) = \frac{\omega(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad (2.23)$$

Тогда (2.22) могут быть заменены по методу [4] системой  $n$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n b_k \frac{\omega_k}{1+\tau_k^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \left[ \frac{1+\tau_k t_j \operatorname{tg}(\alpha/2)}{(1+\beta)(\tau_k - t_j)} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} G(\tau_k, t_j) \right] = h(t_j) \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=1}^n b_k \frac{\omega_k}{1+\tau_k^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} = 0$$

$$t_j = \cos \frac{j\pi}{n}, \quad b_k = \frac{1}{2n}, \quad \tau_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad \omega_k = \omega(\tau_k) \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

После решения (2.24), функция  $\omega(\tau)$  может быть приближена интерполяционным многочленом

$$\omega(\tau) = \sum_{k=1}^n \omega_k \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_k) T_n'(\tau_k)} \quad (2.25)$$

где  $T_n(x)$  – многочлен Чебышева  $n$ -ой степени.

Полученное приближенное решение позволяет легко найти коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [5] вблизи вершин отслоения

$$K^\pm = \sqrt{2\pi r_0} \lim_{\theta \rightarrow \pm\alpha \pm 0} \sqrt{\theta \pm \alpha} \tau_{rz}^1(\theta, r_0) \quad (2.26)$$

Имеет место асимптотическая оценка интеграла, следующая из известных формул [3]:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi'(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta - \theta}{2} d\eta = 2 \int_{-1}^1 \frac{\Psi(\tau)(1 + \tau \operatorname{tg}^2(\alpha/2))}{-1(\tau - t)(1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2))} d\tau = \mp \frac{2\pi\omega(\pm 1)}{\sqrt{t^2 - 1}} + O\left((t \pm 1)^{\frac{1}{2}}\right), \quad t \rightarrow \pm 1$$

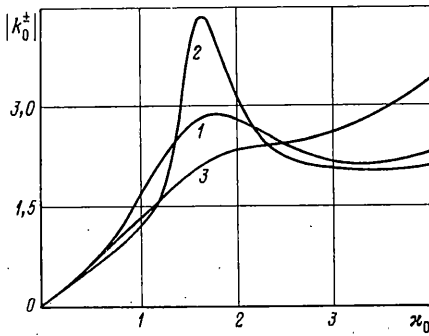
Тогда по формуле (2.26) с учетом (2.25) КИН равны

$$K^\pm = \mp G_1 \sqrt{2\pi r_0} k_0^\pm \quad (2.27)$$

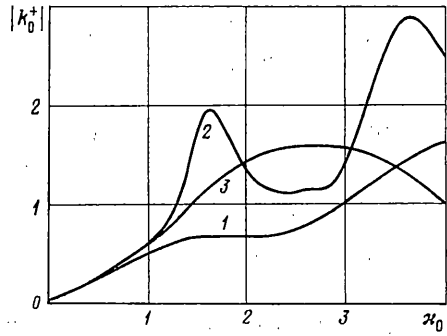
$$k_0^+ = \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \sum_{m=1}^n (-1)^m \omega_m \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}, \quad \gamma_m = \frac{2m-1}{2n} \pi$$

$$k_0^- = \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} (-1)^n \sum_{m=1}^n (-1)^m \omega_m \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}$$

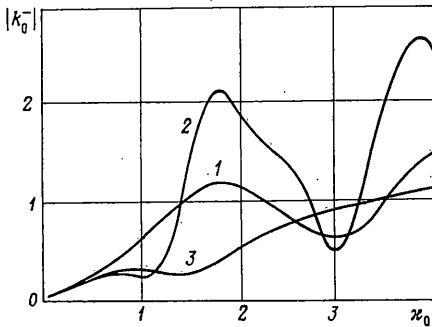
При помощи (2.27) проведено численное исследование безразмерной величины КИН  $|k_0^\pm|$  от безразмерной частоты  $\kappa_0 = \kappa_{21} r_0$ . Результаты этих исследований приведены на фиг. 1–3. При проведении вычислений в (2.24), (2.25) значение  $n$  бралось до 25, что обеспечило получение основных результатов с погрешностью, не превышающей 0,1%. Кривые 1 всюду построены при  $\gamma = 1, \beta = 1$ , что соответствует случаю дифракции на дугообразном разрезе в однородной среде. Кривые 2 построены для  $\gamma = 0,5, \beta = 2$ , т.е. материал включения более жесткий, чем внешняя среда. Кривые 3 показывают изменение КИН, когда  $\beta = 0,1, \gamma = 1$ , т.е. материал включения более мягкий, чем внеш-



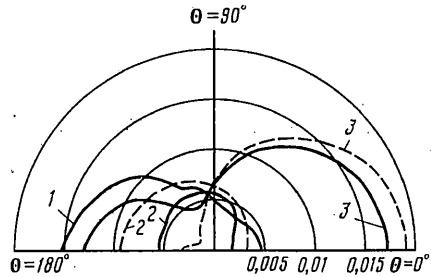
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

няя среда. Во всех случаях принималось  $\alpha = \pi/4$ . Графики на фиг. 1 соответствуют вполне распространяющейся под углом  $\theta_0 = 180^\circ$ . В этом случае максимальные значения КИН наблюдаются на концах разреза по контуру более жесткого включения и превосходят максимальные значения КИН для разреза в однородной среде. В случае более мягкого включения значения КИН при  $x_0 < 2,4$  меньше, чем для разреза в однородной среде. На фиг. 2 показана зависимость для  $|k_0^+|$ , на фиг. 3 – для  $|k_0^-|$  при распространении волны под углом  $\theta_0 \approx 90^\circ$ . Здесь в случае более жесткого включения имеется два максимума. Наибольшая концентрация напряжений наблюдается у отслоившегося жесткого включения.

3. Для исследования перемещений отраженной волны на больших расстояниях от включения  $w_1(r, \theta)$  необходимо представить формулой (1.8)

$$w_1(r, \theta) = -\frac{ir_0}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi x_{21} r}} E_{21} \left[ \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_{11}(\eta) e^{-ix_{21} r_0 \cos(\eta-\theta)} d\eta - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial r_0} \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_{12}(\eta) e^{-ix_{21} r_0 \cos(\eta-\theta)} d\eta \right] + O(r^{-3/2}) \quad (3.1)$$

Скачки  $\psi_{11}(\eta)$  и  $\psi_{12}(\eta)$  в (3.1) заменяются рядами (2.11). В результате после вычисления интегралов с помощью таблиц [6], учета (2.13) и подстановки вместо  $\psi_{11k}$  их значений из (2.17), поле отраженной волны представляется двумя слагаемыми

$$w_1(r, \theta) = w_1^0(r, \theta) + w_1^*(r, \theta) + O(r^{-3/2}) \quad (3.2)$$

$$w_1^0(r, \theta) = r_0 \delta \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_{21} r}} E_{21} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k c_k^1 \frac{(-i)^k e^{-ik\theta}}{H'_k(\kappa_0)},$$

$$w_1^*(r, \theta) = \frac{r_0 \lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_{21} r}} E_{21} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Phi_k \frac{(-i)^k e^{-ik\theta}}{H'_k(\kappa_0)}$$

Первое слагаемое  $w_1^0$  в (3.2) описывает поле отраженной волны от включения без отслоения, т.е. полностью сцепленного с упругой средой. Второе слагаемое  $w_1^*(r, \theta)$  определяет возмущения, вносимые в это поле наличием отслоения. Последнее необходимо преобразовать так, чтобы его можно было вычислить, используя решения (2.23), (2.25). Для этого следует в (3.2) заменить  $\Phi_k$  их интегральными представлениями, и выполнить интегрирование по частям. Тогда ряд, определяющий (3.2), преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Phi_k \frac{(-i)^k e^{-ik\theta}}{H'_k(\kappa_0)} = -\frac{a_0}{H'_k(\kappa_0)} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi'(\eta) \eta d\eta - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{(-i)^k}{k H'_k(\kappa_0)} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi'(\eta) \sin k(\eta - \theta) d\eta$$

Входящие в это выражение интегралы, после приведения их к промежутку  $[-1, 1]$ , использованной ранее заменой, могут быть вычислены по квадратурным формулам Гаусса – Чебышева. Окончательно  $w_1^*(r, \theta)$  представляются в виде

$$w_1^*(r, \theta) = \frac{2r_0 \lambda}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_{21} r}} E_{21} \sum_{m=1}^n \left[ \frac{a_0}{H'_k(\kappa_0)} \operatorname{arctg} \left( \tau_m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{(-i)^k}{k H'_k(\kappa_0)} \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \tau_m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \theta \right) \right] \frac{b_m \omega_m}{1 + \tau_m^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad (3.3)$$

При помощи формул (3.2), (3.3) проведено численное исследование перемещений отраженной волны  $w = r_0^{-1} |w_1|$  при  $\kappa_{21} r = 1000$ ,  $\kappa_0 = 1$ . Результаты приведены на фиг. 4. Рассматривалась волна, падающая под углом  $\theta_0 = 180^\circ$ . Кривые 1, 2, 3 построены для описанных ранее данных. Штриховые кривые 2, 3 показывают перемещения отраженной волны для полностью сцепленного включения. Из приведенных графиков видно, что наиболее сильные возмущения в поле отраженной волны наличие отслоения вносит в случае жесткого включения. Если включение мягкое, то эти возмущения незначительны. Наибольшая амплитуда колебаний в отраженной волне достигается при дифракции на мягком включении, наименьшая – при дифракции на жестком.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
5. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 264 с.