МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. А.Д. ЧЕРНЫШОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предлагается численно-аналитический метод для решения упругих плоских задач односвязных и многосвязных областей с разными граничными условиями. Вначале строятся абстрактные частные решения, а затем при помощи суперпозиций удается получить в интегральной форме выражения для перемещений, деформаций и напряжений. Решение задачи сводится к системе четырех интегральных уравнений, где ядрами являются частные решения. Интегралы заменяются конечными суммами и получается замкнутая линейная система. Приближенное решение точно удовлетворяет уравнениям движения, граничным условиям в точках деления границы тела на мелкие части, но приближенно в остальных промежуточных точках границы. Приводится априорная оценка погрешности метода порядка h^6, где $2h$ – шаг по границе. Простота метода и небольшая трудоемкость позволяют решать задачи со сложными граничными условиями. Метод показан на примере решения задач о гармонических колебаниях.

Для решения плоских задач упругости развит метод теории функций комплексной переменной [1, 2], который основан на поиске отображения сложной области тела на область круга, что в свою очередь является большой проблемой. В случае динамических задач применяются как правило численные методы [3], или находятся частные решения [4–6].

1. Описание метода. Основные идеи метода заимствованы из [7]. Суть метода покажем на примере решения упругих задач при плоской деформации.

Пусть проекции вектора перемещений u и v зависят от x, y и t:

$$u = u(x, y, t), \qquad v = v(x, y, t)$$

Предположим, что u и v малы, тогда компоненты тензоров деформаций e_{ij} и напряжений σ_{ij} будут вычисляться по формулам

$$\begin{gathered} e_x = \partial u/\partial x = u_x, \quad e_y = \partial v/\partial y = v_y \\ e_{xy} = (u_y + v_x)/2; \quad \sigma_x = \lambda(u_x + v_y) + 2\mu u_x \\ \sigma_y = \lambda(u_x + v_y) + 2\mu v_y, \quad \sigma_{xy} = \mu(u_y + v_x) \\ \sigma_z = \lambda(u_x + v_y) \end{gathered} \tag{1.1}$$

Два уравнения движения в перемещениях приводятся к виду

$$\begin{gathered} (\lambda + 2\mu)u_{xx} + (\lambda + \mu)v_{xy} + \mu u_{yy} = \rho u_{tt} \\ (\lambda + 2\mu)v_{yy} + (\lambda + \mu)u_{xy} + \mu v_{xx} = \rho v_{tt} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Решение системы (1.2) с двумя неизвестными u и v будем искать для ограниченной односвязной области упругого тела Ω с границей Γ, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$x = x(\varphi), \quad y = y(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant T \tag{1.3}$$

где T – период изменения параметра φ. На границе Γ могут быть заданы граничные условия в перемещениях:

$$u|_{\Gamma} = u_0(\varphi, t), \quad v|_{\Gamma} = v_0(\varphi, t) \tag{1.4}$$

либо в напряжениях:

$$\begin{gathered}(\sigma_x \nu_x + \sigma_{xy} \nu_y)_{\Gamma} = N(\varphi, t) \\ (\sigma_{xy} \nu_x + \sigma_y \nu_y)_{\Gamma} = S(\varphi, t)\end{gathered} \tag{1.5}$$

где (ν_x, ν_y) – вектор единичной нормали к Γ, направленный внутрь Ω; либо на части границы Γ_1 заданы перемещения, а на остальной части границы Γ_2 напряжения:

$$\begin{gathered}u|_{\Gamma_1} = u_0(\varphi, t), \quad v|_{\Gamma_1} = v_0(\varphi, t), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant T_1 \\ (\sigma_x \nu_x + \sigma_{xy} \nu_y)_{\Gamma_2} = N(\varphi, t), \quad T_1 < \varphi \leqslant T \\ (\sigma_{xy} \nu_x + \sigma_y \nu_y)_{\Gamma_2} = S(\varphi, t)\end{gathered} \tag{1.6}$$

Прежде, чем решать начально-краевые задачи в общем виде, рассмотрим динамические задачи без начальных условий. Это задачи о колебаниях, установившиеся динамические процессы в подвижной системе координат, либо динамические задачи в общем случае, к которым уже применено какое-нибудь интегральное преобразование по времени t, т.е. имеется краевая задача для изображений. Объяснение причины неприменимости предлагаемого метода к стационарным задачам непосредственно будет дано ниже.

Для определенности рассмотрим задачу об установившихся колебаниях и пусть граничные условия (1.4) имеют вид

$$u|_{\Gamma} = u_0(\varphi) \cos \omega t, \quad v|_{\Gamma} = v_0(\varphi) \cos \omega t \tag{1.7}$$

Решение уравнений (1.2) с условиями (1.7) будем искать в форме

$$u = U(x, y) \cos \omega t, \quad v = V(x, y) \cos \omega t \tag{1.8}$$

После подстановки (1.8) в (1.2) и (1.7) для нахождения U и V придем к следующей краевой задаче

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu) U_{xx} + (\lambda + \mu) V_{xy} + \mu U_{yy} = -\rho\omega^2 U \\ (\lambda + 2\mu) V_{yy} + (\lambda + \mu) U_{xy} + \mu V_{xx} = -\rho\omega^2 V\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$U(x, y)|_{\Gamma} = u_0(\varphi), \quad V(x, y)|_{\Gamma} = v_0(\varphi) \tag{1.10}$$

Если граничные условия заданы в напряжениях, или смешанного типа, то из (1.5) и (1.6) будем иметь

$$\begin{gathered}(\overline{\sigma}_x \nu_x + \overline{\sigma}_{xy} \nu_y)_{\Gamma} = N(\varphi), \quad N(\varphi, t) = N(\varphi) \cos \omega t \\ (\overline{\sigma}_{xy} \nu_x + \overline{\sigma}_y \nu_y)_{\Gamma} = S(\varphi), \quad S(\varphi, t) = S(\varphi) \cos \omega t\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered}U|_{\Gamma_1} = u_0(\varphi), \quad V|_{\Gamma_1} = v_0(\varphi), \quad \sigma_{ij} = \overline{\sigma}_{ij} \cos \omega t \\ (\overline{\sigma}_x \nu_x + \overline{\sigma}_{xy} \nu_y)_{\Gamma_2} = N(\varphi), \quad (\overline{\sigma}_{xy} \nu_x + \overline{\sigma}_y \nu_y) = S(\varphi)\end{gathered} \tag{1.12}$$

Для нахождения решения задачи (1.9), (1.10) рассмотрим вспомогательную задачу. Будем искать частное решение системы (1.9), которое не зависит от переменной y, а зависит только от x:

$$U = K(x), \quad V = L(x), \quad x \in [0, d] \tag{1.13}$$

где d – максимальный диаметр области Ω. Для функций $K(x)$ и $L(x)$ из (1.9) получим следующие два уравнения

$$\begin{gathered} K'' + a^2 K = 0, \quad L'' + b^2 L = 0 \\ a^2 = \rho\omega^2 / (\lambda + 2\mu), \quad b^2 = \rho\omega^2 / \mu \end{gathered} \tag{1.14}$$

Из (1.14) для $K(x)$ и $L(x)$ найдем частные решения

$$K_1 = \cos ax, \quad K_2 = \sin ax, \quad L_1 = \cos bx, \quad L_2 = \sin bx \tag{1.15}$$

Теперь введем новую переменную ξ:

$$\xi = (x - x_*)\cos\theta + (y - y_*)\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.16}$$

где (x_*, y_*) – координаты какой-нибудь точки внутри Ω, θ – угол между осью x и нормалью к прямой $\xi = \text{const}$. Переменная ξ имеет геометрический смысл расстояния от точки (x, y) до прямой $\xi = 0$ и в области Ω изменяется в пределах $|\xi| \leqslant d$. В частных решениях (1.15) формально заменим x на переменную ξ из (1.16), тогда получим функции $K_p(\xi)$, $L_p(\xi)$, $(p = 1, 2)$, при помощи которых можно представить решение системы (1.9) следующими интегральными выражениями

$$U(x, y) = \int_0^\pi A(\xi, \theta)\cos\theta d\theta - \int_0^\pi B(\xi, \theta)\sin\theta d\theta \tag{1.17}$$

$$V(x, y) = \int_0^\pi A(\xi, \theta)\sin\theta d\theta + \int_0^\pi B(\xi, \theta)\cos\theta d\theta$$

$$A(\xi, \theta) = A_1(\theta)K_1(\xi) + A_2(\theta)K_2(\xi), \quad B(\xi, \theta) = B_1(\theta)L_1(\xi) + B_2(\theta)L_2(\xi)$$

Здесь $A_p(\theta)$ и $B_p(\theta)$ $(p = 1, 2)$ – пока неизвестные функции параметра θ. Если подставить U и V из (1.17) в (1.9), то в силу (1.14)–(1.16) получим тождества. При этом предполагаем, что все интегралы в (1.17) существуют и допускают дифференцирование по переменным x и y. Таким образом, остается выполнить граничные условия (1.10). После подстановки (1.17) в (1.10) получим

$$\begin{gathered} \int_0^\pi A(\xi_\Gamma, \theta)\cos\theta d\theta - \int_0^\pi B(\xi_\Gamma, \theta)\sin\theta d\theta = u_0(\varphi) \\ \int_0^\pi A(\xi_\Gamma, \theta)\sin\theta d\theta + \int_0^\pi B(\xi_\Gamma, \theta)\cos\theta d\theta = v_0(\varphi) \end{gathered} \tag{1.18}$$

$$\xi_\Gamma = (x_\Gamma - x_*)\cos\theta + (y_\Gamma - y_*)\sin\theta$$

Покажем, что каждое интегральное уравнение в (1.18) распадается на два, и потому система (1.18) фактически эквивалентна четырем интегральным уравнениям. С этой целью через точку (x_*, y_*) проведем прямую E под углом θ к оси x. Предположим, что форма границы Γ односвязной области Ω такая и расположение точки (x_*, y_*) внутри Ω такое, что для $\forall\theta \in [0, \pi]$ прямая E будет пересекать Γ только в двух точках D^+ и D^-. Значение $\theta = \pi$ исключается, так как прямая E при $\theta = \pi$ будет совпадать с прямой E при $\theta = 0$. Прямую E при $\theta = 0$ обозначим через E_0. Эта прямая параллельна оси x. При изменении угла θ в пределах $[0, \pi)$ все точки D^+ на Γ будут расположены над прямой E_0, а все вторые точки D^- – ниже прямой E_0. Для любого угла θ все прямые $\xi = 0$ перпендикулярны к прямым E и потому в точках D^+ и D^- будут выполняться строгие неравенства $\xi(D^+) > 0$ и $\xi(D^-) < 0$. Поэтому целесообразно обозначить через Γ^+ и Γ^- части границы Γ, которые расположены выше и ниже прямой E_0 соответственно. В связи с этим при изменении угла $\theta \in (0, \pi)$ точки пересечения прямой E с Γ будут выписывать два независимых участка границы Γ^+ и Γ^- и граничные условия (1.18) надо выполнять как на Γ^+, так и на Γ^- в отдельности. Здесь имеет место аналогия со случаем геометрически одномерной задачи $0 \leqslant x \leqslant l$, когда прямая E будет занимать только одно положение вдоль оси x и для нахождения четырех постоянных A_1, A_2, B_1 и B_2 будем иметь четыре граничных условия: для U и V при $x = 0$ и $x = l$. При этом роль Γ^+ выполняет точка $x = l$, а роль Γ^- – точка $x = 0$.

Полюс (x_*, y_*) можно располагать также и вне области Ω, но его нельзя размещать на границе Γ, т.к. иначе пропадет одна из частей границ Γ^+ и Γ^-. Для нахождения четырех функций $A_p(\theta)$ и $B_p(\theta)$ из (1.18) получаем систему четырех интегральных уравнений Фредгольма первого рода [9], где ядрами являются четыре частных решения $K_p(\xi)$ и $L_p(\xi)$. Если эти ядра не вырожденные, что и имеет место для случая (1.15), то система (1.18) имеет единственное решение. Дальнейшее решение системы (1.18) можно получать либо приближенными методами с использованием теории собственных функций ядер $K_p(\xi)$ и $L_p(\xi)$, либо теории вычетов функций комплексной переменной, либо приближенными численными методами. Отдадим предпочтение следующему численному методу:

Через полюс (x_*, y_*) внутри Ω под углами θ_i к оси x проведем прямые E_i до пересечения с границей Γ, где $0 \leqslant \theta_i < \pi$ ($i = 1, 2, \ldots n$). Каждая прямая E_i пересекает границу Γ только в двух точках D_i^+ и D_i^-. Их координаты определяются из (1.3) по формулам $x_j = x(\varphi_j)$, $y_j = y(\varphi_j)$ ($j = 1, 2\ldots 2n$). Положим $\varphi = \varphi_j$ во всех выражениях интегральных равенств (1.18) и каждый интеграл в (1.17) и (1.18) заменим интегральными суммами по параметру θ. Тогда n значениям параметра θ будут соответствовать $2n$ значений параметра φ, поэтому получим следующую замкнутую линейную алгебраическую систему относительно $4n$ неизвестных $A_p(\theta_i)$ и $B_p(\theta_i)$ ($p = 1, 2$):

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} [A(\xi_{ij},\tilde\theta_i)\cos\tilde\theta_i - B(\xi_{ij},\tilde\theta_i)\sin\tilde\theta_i]\Delta\theta_i = u_0(\varphi_j) \\
\sum_{i=1}^{n} [A(\xi_{ij},\tilde\theta_i)\sin\tilde\theta_i + B(\xi_{ij},\tilde\theta_i)\cos\theta_i]\Delta\theta_i = v_0(\varphi_j) \\
\xi_{ij} = (x_j - x_*)\cos\tilde\theta_i + (y_j - y_*)\sin\tilde\theta_i \\
(i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,2n)
\end{gathered}
\tag{1.19}
$$

Здесь $\tilde\theta_i$ – те значения параметра θ на интервале $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, которым соответствуют средние значения подинтегральных функций в (1.18). Приближенно будем считать, что значения $\tilde\theta_i$ одинаковые для всех четырех интегралов в (1.18). Обычно за $\tilde\theta_i$ берут либо одну из границ этого интервала, либо его середину. После нахождения $A_p(\tilde\theta_i)$ и $B_p(\tilde\theta_i)$ из системы (1.19) их следует подставить в (1.17), где каждый интеграл надо предварительно представить интегральной суммой точно также, как это было сделано при составлении системы (1.19) из (1.18).

2. Усовершенствование метода. При проведении прямых E из центра (x_*, y_*) до пересечения с границей Γ в точках D^+ и D^- требуется, чтобы каждая прямая E пересекала Γ только в двух точках. Это условие накладывает ограничение на возможную форму границы Γ. Для расширения возможностей метода в формуле (1.16) для переменной ξ будем считать, что координаты центра (x_*, y_*) зависят от параметра θ:

$$x_* = x_*(\theta), \qquad y_* = y_*(\theta) \tag{2.1}$$

Вид зависимости (2.1) определяется формой границы Г так, чтобы из каждой точки (x_*, y_*) прямая E при любом $\theta \in [0, \pi]$ пересекала границу Г только в двух точках. Естественно, что подобных зависимостей (2.1) может быть много. Зависимость может быть также и дискретной.

Рассмотрим специальный случай, когда граница Г – окружность радиуса R. Если за точку (x_*, y_*) взять центр окружности, то для всех точек Г переменная ξ будет принимать постоянное значение $\xi = R$ и потому функции $K_p(\xi_\Gamma)$ и $L_p(\xi_\Gamma)$, используемые в решении (1.17), становятся константами. Это приводит к вырождению системы интегральных уравнений (1.18). Переменная ξ должна изменяться на границе Г и чем больше интервал ее изменения, тем выше точность численного метода. Поэтому центры $(x_*(\theta), y_*(\theta))$ не следует брать близко к эволюте границы Г. В случае сложной формы области Ω можно отказаться от использования подвижного центра (2.1) и поступать следующим образом.

Разобьем область Ω на несколько простых областей при помощи разрезов. Пусть, например, Ω разрезана на две области Ω_1 и Ω_2, каждая из которых имеет простую форму. При этом граница Г разделяется на две части Γ_1 и Γ_2, так что граница области Ω_1 будет состоять из Γ_1 и разреза Γ_0, а область Ω_2 – из Γ_2 и Γ_0. Для каждой области Ω_1 и Ω_2 выберем свой центр (x_{1*}, y_{1*}) и (x_{2*}, y_{2*}) и составим систему уравнений, подобную (1.18). В эту систему войдут неизвестные значения перемещений $u_0(\varphi)$ и $v_0(\varphi)$ на границе разреза Γ_0. Однако, из условия непрерывности перемещений, а значит и непрерывности функций $U(x, y)$ *и* $V(x, y)$ на Γ_0, следует, что на Γ_0 в данном случае необходимо выполнить дополнительное граничное условие

$$U_1\big|_{\Gamma_0} = U_2\big|_{\Gamma_0}, \quad V_1\big|_{\Gamma_0} = V_2\big|_{\Gamma_0} \tag{2.2}$$

где U_1 и V_1 – решение в области Ω_1, а U_2 и V_2 – в Ω_2. Дополнительное условие (2.2) позволяет замкнуть систему уравнений для всей области Ω. Если область Ω многосвязная, то, разрезав ее на несколько односвязных областей и используя при этом дополнительные граничные условия непрерывности перемещений на границах разрезов подобные условиям (2.2), будем иметь замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно $A_p(\tilde{\theta}_i)$ и $B_p(\tilde{\theta}_i)$ $(p = 1, 2)$.

Решение (1.17) можно представить также и в другом более общем виде:

$$U = \int_0^\pi [A(\xi,\theta)\cos\theta - B(\xi,\theta)\sin\theta]d\theta +$$
$$+\sum_{j=1}^{m_1} A_j(\xi_j^*)\cos\theta_j^* - \sum_{j=1}^{n_1} B_j(\xi_j^*)\sin\theta_j^* \tag{2.3}$$
$$V = \int_0^\pi [A(\xi,\theta)\sin\theta + B(\xi,\theta)\cos\theta]d\theta + \sum_{j=1}^{m_1} A_j(\xi_j^*)\cos\theta_j^* +$$
$$+\sum_{j=1}^{n_1} B_j(\xi_j^*)\cos\theta_j^*; \quad \xi_j^* = (x - x_*)\cos\theta_j^* + (y - y_*)\sin\theta_j^*$$
$$A_j(\xi_j^*) = A_{1j}^* K_1(\xi_j^*) + A_{2j} K_2(\xi_j^*), \qquad B_j(\xi_j^*) = B_{1j}^* L_1(\xi_j^*) + B_{2j} L_2(\xi_j^*)$$

где коэффициенты A_{pj}^*, B_{pj}^* $(p = 1, 2)$ и углы θ_j^* в конечных суммах неизвестны, как неизвестно и количество слагаемых m_1 и n_1 в этих суммах. Все перечисленные неизвестные нужно найти из граничных условий (1.10), которые теперь принимают вид

$$\int_0^{\pi} [A(\xi_\Gamma,\theta)\cos\theta - B(\xi_\Gamma,\theta)\sin\theta]d\theta + \sum_{j=1}^{m_1} A_j(\xi^*_{j\Gamma})\cos\theta^*_j -$$
$$-\sum_{j=1}^{n_1} B_j(\xi^*_{j\Gamma})\sin\theta^*_j = u_0(\varphi) \tag{2.4}$$
$$\int_0^{\pi} [A(\xi_\Gamma,\theta)\sin\theta + B(\xi_\Gamma,\theta)\cos\theta]d\theta +$$
$$+\sum_{j=1}^{m_1} A_j(\xi^*_{j\Gamma})\sin\theta^*_j + \sum_{j=1}^{n_1} B_j(\xi^*_{j\Gamma})\cos\theta^*_j = \upsilon_0(\varphi)$$

Решение в форме (2.3) можно получить из (1.17), если искомые функции $A_p(\theta)$ и $B_p(\theta)$ в (1.17) представить суммой

$$A_p(\theta) = \tilde{A}_p(\theta) + \sum_{j=1}^{m_1} A^*_{pj}\delta(\theta-\theta^*_j)$$
$$B_p(\theta) = \tilde{B}_p(\theta) + \sum_{j=1}^{n_1} B^*_{pj}\delta(\theta-\theta^*_j) \tag{2.5}$$

где $\tilde{A}_p(\theta)$ и $\tilde{B}_p(\theta)$ – суммируемые и интегрируемые в смысле Лебега функции на промежутке $[0, \pi]$ без особенностей типа δ-функций, $\delta(\theta-\theta^*_j)$ – дельта-функция Дирака. Возможность существования конечных сумм в решении (2.3) не противоречит физическому смыслу задач теории упругости и в некоторых частных случаях решение (2.3) может состоять вообще только из конечных сумм, а интегралы будут отсутствовать. Подобные примеры решений приведены в [7, 8]. В общем же случае для нахождения решения приходим к специфической системе интегральных уравнений (2.4), которые существенно отличаются от уравнений Фредгольма 1 рода. Здесь неизвестными являются четыре функции $\tilde{A}_p(\theta)$ и $\tilde{B}_p(\theta)$, постоянные A^*_{pj} и B^*_{pj}, углы θ^*_j, а также количество слагаемых m_1 и n_1 в конечных суммах. Подобные системы в научной литературе не изучены, поэтому приведем следующий численный метод решения.

Разобьем промежуток интегрирования $[0, \pi]$ на n малых частей ($\theta_1 = 0,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_n$), где $\theta_n < \pi$. Представим интегралы в (2.4) конечными интегральными суммами. В первоначальных конечных суммах системы (2.4) хотя и неизвестно количество углов θ^*_j и их величина, но все они, если существуют, то попадут внутрь каких-то малых интервалов (θ_i, θ_{i+1}). В некоторых случаях часть углов θ^*_j может совпасть с углами деления θ_i. Такие случаи разбиений рассмотрим ниже, а пока будем считать, что углы θ^*_j не совпадают с углами делений θ_i и потому они обязательно располагаются внутри интервалов (θ_i, θ_{i+1}). Для этих интервалов слагаемые из системы (2.4) будут иметь вид

$$[A_p(\tilde{\theta}_i)\cos\tilde{\theta}_i - B_p(\tilde{\theta}_i)\sin\tilde{\theta}_i]\Delta\theta_i + A^*_{pj}\cos\theta^*_j - B^*_{pj}\sin\theta^*_j \tag{2.6}$$

Так как углы $\tilde{\theta}_i$ и θ^*_j находятся в одном и том же интервале разбиений, то их можно принять равными между собой, т.е. $\tilde{\theta}_i \approx \theta^*_j$. Тогда выражение (2.6) можно упростить

$$[A_p(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i + A^*_{pi}]\cos\tilde{\theta}_i - [B_p(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i + B^*_{pi}]\sin\tilde{\theta}_i \tag{2.7}$$

Введем обозначение

$$A_p(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i + A^*_{pi} = \tilde{A}_{pi}, \quad B_p(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i + B^*_{pi} = \tilde{B}_{pi} \tag{2.8}$$

При помощи (2.8) выражение (2.7) принимаем более удобную форму

$$\tilde{A}_{pi}\cos\tilde{\theta}_i - \tilde{B}_{pi}\sin\tilde{\theta}_i \tag{2.9}$$

Теперь вместо неизвестных $A_p(\tilde{\theta}_i)$ и $B_p(\tilde{\theta}_i)$, A^*_{pi} и B^*_{pi} соответственных интервалу (θ_i, θ_{i+1}) по формуле (2.9) будем иметь только неизвестные $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$, которые определены в (2.8). Поэтому относительно $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$, соответственных интервалам, в которые попадают углы θ^*_j из конечных сумм в (2.3), и относительно A_{pi} и B_{pi} для всех остальных интервалов (θ_i, θ_{i+1}) из (2.4) получим замкнутую систему уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\,[A(\xi^*_{ij\Gamma})\cos\tilde{\theta}_i - B(\xi^*_{ij\Gamma})\sin\tilde{\theta}_i] = u_0(\varphi_j)\\ \sum_{i=1}^{n}\,[A(\xi^*_{ij\Gamma})\sin\tilde{\theta}_i + B(\xi^*_{ij\Gamma})\cos\tilde{\theta}_i] = \upsilon_0(\varphi_j)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Поскольку с самого начала неизвестно, в какие интервалы (θ_i, θ_{i+1}) попадают углы θ^*_j из конечных сумм в (2.3), то предположим, что эти углы попадут в каждый интервал и потому все неизвестные θ^*_j и $\xi^*_{ij\Gamma}$ помечены звездочкой сверху. Можно ограничиться решением линейной системы $4n$ уравнений (2.10) относительно $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$. Подставляя эти $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$ в (2.3), где предварительно все интегралы представлены аналогичными суммами, будут определены перемещения. Если же возникает необходимость в нахождении самих углов θ^*_j, их количества и величин коэффициентов A^*_{pj} и B^*_{pj}, то надо сделать дополнительный анализ коэффициентов $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$, полученных из решения указанной выше системы.

Так, из (2.8) следует, что коэффициенты $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$, соответственные интервалам (θ_i, θ_{i+1}), в которые попадают углы θ^*_j из конечных сумм, существенно отличаются от остальных коэффициентов A_{pi} и B_{pi}. Действительно, коэффициенты $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$ состоят из двух частей. Первые части $A_p(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i$ и $B_p(\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i$ зависят от величины шага $\Delta\theta_i$, а вторые части A^*_{pi} и B^*_{pi} от способа разбиения вообще не зависят. Поэтому количество углов θ^*_j из конечных сумм (2.3) можно определить по количеству тех коэффициентов $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$, которые имеют конечное значение при достаточно малых $\Delta\theta_i$. Значения углов θ^*_j определим по соответствию коэффициентов $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$ интервалам (θ_i, θ_{i+1}). Если окажется, что в двух соседних интервалах имеются углы θ^*_j конечных сумм, то можно предположить, что смежная граница этих интервалов совпадает с одним из этих углов. В этом случае надо сделать вторичное разбиение и при этом сдвинуть указанную границу в любую сторону, после чего вновь составить систему, подобную (2.10), и вторично вычислить $\tilde{A}_{pi}$ и $\tilde{B}_{pi}$. После реализации двух способов разбиений для A^*_{pi} и B^*_{pi} будем иметь одни и те же значения, а для величин $A_p\Delta\theta_i$ и $B_p\Delta\theta_i$ различные, т.е.

$$\begin{aligned} &A_p(\tilde\theta_i^{(1)})\Delta\theta_i^{(1)} + A^*_{pi} = A^{(1)}_{pi}, \quad B_p(\theta_i^{(1)})\Delta\theta_i^{(1)} + B^*_{pi} = B^{(1)}_{pi} \\ &A_p(\tilde\theta_i^{(2)})\Delta\theta_i^{(2)} + A^*_{pi} = A^{(2)}_{pi}, \quad B_p(\theta_i^{(2)})\Delta\theta_i^{(2)} + B^*_{pi} = B^{(2)}_{pi} \end{aligned} \tag{2.11}$$

где величины, отмеченные сверху единицей, относятся к первому способу разбиения, а двойкой – ко второму способу. Принимая приближенно $A_p(\tilde\theta_i^{(1)}) \approx A_p(\theta_i^{(2)})$, $B_p(\theta_i^{(1)}) \approx B_p(\theta_i^{(2)})$ из (2.11) найдем

$$\begin{aligned} &A_p(\tilde\theta_i) = (A^{(1)}_{pi} - A^{(2)}_{pi}) / \Delta_{12}, \quad B_p(\tilde\theta_i) = (B^{(1)}_{pi} - B^{(2)}_{pi}) / \Delta_{12} \\ &A^*_{pi} = (A^{(2)}_{pi}\Delta\theta_i^{(1)} - A^{(1)}_{pi}\Delta\theta_i^{(2)}) / \Delta_{12}, \quad B^*_{pi} = (B^{(2)}_{pi}\Delta\theta_i^{(1)} - B^{(1)}_{pi}\Delta\theta_i^{(2)}) / \Delta_{12} \\ &\Delta_{12} = \Delta\theta_i^{(1)} - \Delta\theta_i^{(2)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Таким образом задача полностью решена.

3. Решение задачи с другими граничными условиями. Пусть для дифференциальных уравнений (1.9) поставлены граничные условия в напряжениях (1.11). Отметим, что при любых граничных условиях, заданных в форме (1.10), (1.11) или (1.12), решение задачи для перемещений будем искать в виде (2.3). Это достаточно удобно, так как по перемещениям (2.3) можно найти все компоненты тензора деформаций по формулам (1.1):

$$\begin{aligned} e_x &= \int_0^\pi [A'(\xi,\theta)\cos^2\theta - \frac{1}{2}B'(\xi,\theta)\sin 2\theta]d\theta + \sum_{j=1}^{m_1} A'_j(\xi^*_j)\cos^2\theta^*_j - \\ &-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_1} B'_j(\xi^*_j)\sin 2\theta^*_j \\ e_y &= \int_0^\pi [A'(\xi,\theta)\sin^2\theta + \frac{1}{2}B'(\xi,\theta)\sin 2\theta]d\theta + \sum_{j=1}^{m_1} A'_j(\xi^*_j)\sin^2\theta^*_j + \\ &+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_1} B'_j(\xi^*_j)\sin 2\theta^*_j \\ e_{xy} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi [A'(\xi,\theta)\sin 2\theta + B'(\xi,\theta)\cos 2\theta]d\theta + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_1} A'_j(\xi^*_j)\sin 2\theta^*_j + \\ &+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_1} B'_j(\xi^*_j)\cos 2\theta^*_j \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь штрихом вверху обозначена производная по переменной ξ:

$A'(\xi,\theta) = \partial A / \partial\xi, \quad A'_j(\xi^*_j) = \partial A_j / \partial\xi^*_j$ и т.д.

Подставляя выражения деформаций из (3.1) в формулы (1.1) для напряжений σ_{ij} и затем σ_{ij} в граничные условия (1.11) и заменяя интегралы конечными суммами, получим замкнутую линейную систему уравнений относительно A_{pi} и B_{pi}, которые из-за громоздкости запишем формально так

$$\begin{aligned} &\Sigma_1(A_{pi}, B_{pi}, 0 \leqslant \varphi_j \leqslant T) = N(\varphi_j) \quad (j = 1\ldots 2n) \\ &\Sigma_2(A_{pi}, B_{pi}, 0 \leqslant \varphi_j \leqslant T) = S(\varphi_j) \quad (p = 1,2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

В системе (3.2) параметр φ при обходе по границе Г пробегает все значения φ_j, соответственные точкам D_j деления Г на мелкие участки прямыми E_i. После решения системы (3.2) по формулам (1.1), (2.3) и (3.1), где интегралы надо представить соответственными суммами, можно найти перемещения, деформации и напряжения в каждой точке области Ω.

Особый интерес представляет случай, когда возникают наибольшие трудности, если граничные условия на Г смешанные и имеют вид (1.12). Все известные аналитические методы здесь становятся не пригодными, а численные методы довольно громоздки и трудоемки.

Пусть граница Γ_1, на которой заданы кинематические граничные условия, точками D_j разбита на q малых участков, а параметр φ в точках D_j принимает значения в промежутке $0 \leqslant \varphi_i \leqslant T_1$ ($j = 1, \ldots, q$). Остальную часть границы Г, т.е. Γ_2, где заданы напряжения, разобьем точками D_k на $(2n - q)$ мелких участков. Параметр φ на Γ_2 в точках D_k принимает значения в интервале $T_1 < \varphi_k < T$, $k = q + 1, q + 2, \ldots, 2n$. Вся граница Г при этом будет разбита на $2n$ мелких участков точками D_j ($j = 1, 2, \ldots, 2n$), которые находятся на пересечении прямых E_i с границей Г. Подставляя выражения для U и V из (2.3) в (1.12), получим следующую систему уравнений, которую подобно (3.2) представим в виде

$$\begin{aligned}
&\Sigma_3(A_{pi}, B_{pi}, 0 \leqslant \varphi_j \leqslant T_1) = u_0(\varphi_j) \\
&\Sigma_4(A_{pi}, B_{pi}, 0 \leqslant \varphi_j \leqslant T_1) = v_0(\varphi_j) \quad (j = 1 \ldots q) \\
&\Sigma_1(A_{pi}, B_{pi}; T_1 < \varphi_k < T) = N(\varphi_k) \\
&\Sigma_2(A_{pi}, B_{pi}, T_1 < \varphi_k < T) = S(\varphi_k) \quad (k = q + 1, \ldots 2n)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Системы уравнений Σ_3 и Σ_4 следуют из кинематических условий на Γ_1, их всего $2q$, а системы Σ_1 и Σ_2 – из статических на Γ_2 и их всего $2(2n - q)$. Вся система (3.3) содержит $4n$ линейных уравнений относительно $4n$ неизвестных A_{pi} и B_{pi}. Из решения системы (3.3) найдем все A_{pi} и B_{pi}, а затем из (2.3), предварительно записав все интегралы соответственными конечными суммами, найдем перемещения, из (3.1) деформации и затем по формулам (1.1) напряжения.

4. Оценка погрешности. Для оценки погрешности метода при вычислении амплитуд перемещений U и V ограничимся рассмотрением задачи (1.9), (1.10). Используем двухточечный шаблон, состоящий из двух граничных точек D_i и D_{i+1}, расстояние между которыми $2h_i$. Введем локальную систему координат: ось x проведем через эти точки, а ось y через середину отрезка D_iD_{i+1}. Приближенное решение задачи обозначим через $\bar{U}$ и $\bar{V}$ и в соответствии с методом их запишем интегральными суммами

$$\begin{aligned}
&\bar{U} = \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos\tilde{\theta}_i - B_i \sin\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i, \\
&\bar{V} = \sum_{i=1}^{n} (A_i \sin\tilde{\theta}_i + B_i \cos\tilde{\theta}_i)\Delta\theta_i
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где A_i и B_i – средние значения функций A и B из (1.7) на интервалах $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Разность между точным решением U, V и приближенным $\bar{U}, \bar{V}$ обозначим через

$$\delta U = U - \bar{U}, \quad \delta V = V - \bar{V} \tag{4.2}$$

Если систему дифференциальных уравнений (1.9) представить в операторном виде $L(U, V) = 0$, то функции δU и δV будут точно удовлетворять этому уравнению, кроме того, в точках D_i и D_{i+1} эти функции будут обращаться в ноль:

$$\delta U(D_i) = \delta U(D_{i+1}) = 0, \quad \delta V(D_i) = \delta V(D_{i+1}) = 0 \qquad (4.3)$$

В отличие от конечно-разностных схем в данном случае независимо от расстояния $2h_i$ между точками деления границы Γ на мелкие части оператор L и граничные условия в точках D_i будут выполнены точно. Оба эти обстоятельства повышают порядок точности формул (4.1).

Уравнение участка границы D_iD_{i+1} запишем в виде

$$y_i = y_i(0) + y_i'(0)x + \frac{1}{2}y_i''(0)x^2 + O(h_i^3) \qquad (4.4)$$

Используя условие $y_i(\pm h_i) = 0$, так как кривая (4.4) должна проходить через точки D_i и D_{i+1}, уравнение (4.4) упрощается

$$y_i = \frac{1}{2}\varkappa_i(x^2 - h_i^2) + O(h_i^3), \quad \varkappa_i = y_i''(0) \qquad (4.5)$$

Разложим функцию δU в ряд Тейлора в окрестности начала координат, ограничиваясь линейными членами по y и квадратичными по x:

$$\delta U = \delta U(0,0) + \delta U_x x + \frac{1}{2}\delta U_{xx}x^2 + 2\delta U_{xy}xy + \delta U_y y + \ldots \qquad (4.6)$$

Точками в (4.6) обозначены члены малого порядка. Так как для y_i в (4.5) разложение по переменной x на границе Γ начинается с квадратичного члена $(x^2 - h_i^2)$, то и в разложении (4.6) следует удерживать только линейные члены по y и квадратичные по x, как члены одинакового порядка малости. При помощи (4.3) разложение (4.6) можно упростить

$$\delta U = \frac{1}{2}\delta U_{xx}(x^2 - h_i^2) + \delta U_y y + \ldots \qquad (4.7)$$

Пусть δU свое наибольшее значение достигает в некоторой точке Q_i. Используя (4.5), можно показать, что координаты точки Q_i имеют вид

$$Q_i(O(h_i^2); \quad -\frac{1}{2}\varkappa_i h_i^2 + O(h_i^3)) \qquad (4.8)$$

Подставляя координаты точки Q_i в (4.7), т.е. $x = 0$ и $y = -\frac{1}{2}\varkappa_i h_i^2$, будем иметь следующую оценку погрешности метода для переменной δU:

$$\delta U = -\frac{1}{2}\delta U_{xx}h_i^2 - \frac{1}{2}\varkappa_i\delta U_y h_i^2 + \ldots \qquad (4.9)$$

Из оценки (4.9) в частности следует, что на участках границы Γ с большой кривизной шаг $2h_i$ следует уменьшить так, чтобы произведение $\varkappa_i h_i^2$ по всей границе имело одинаковый порядок малости

$$\varkappa_i h_i^2 \sim \varkappa_1 h_1^2, \quad \forall i = 2, \ldots, n \qquad (4.10)$$

В качестве $\bar{U}$ и $\bar{V}$ возьмем аппроксимации определенных интегралов (1.18) по методу трапеций. Тогда порядок погрешности предлагаемого метода по оценке (4.9) будет $(2h_i)^4$, а при использовании метода Симпсона порядок погрешности становится еще выше – $(2h_i)^6$. Если же граница области Ω будет иметь особые точки в виде углов, где кривизну можно считать неограниченно большой, предложенный метод как и конечно-разностные и многие другие методы, может давать большую погрешность.

Функции U и V линейно выражаются через $A(\xi, \theta)$ и $B(\xi, \theta)$, которые тоже линейно выражаются через $A_p(\theta)$ и $B_p(\theta)$ в (1.17). Так как ядра $K_p(\xi)$ и $L_p(\xi)$ – определенные функции, то приближенному решению $\bar{U}$ и $\bar{V}$ соответствуют только приближенные функции $\bar{A}_p(\theta)$ и $\bar{B}_p(\theta)$. В силу линейных зависимостей порядок погрешности $\delta A_p = A_p - \bar{A}_p$ и $\delta B_p = B_p - \bar{B}_p$ будет равен порядку погрешности для δU и δV, т.е. $(2h_i)^6$, если использовался метод Симпсона. Частные производные от U и V по координатам x и y не затрагивают функции $A_p(\theta)$ и $B_p(\theta)$, поэтому все подобные частные производные будут иметь погрешность такого же порядка. Отсюда вытекает, что все деформации и напряжения в данном методе будут определены с одинаковой погрешностью порядка $(2h_i)^6$.

Сравнение эффективности данного метода с конечно-разностными покажем на примере прямоугольной области, стороны которой разбиты на m и n точек, включая углы. Шаг разбиения считаем постоянным и равным $2h$. При этом граничных точек D_i всего будет $(2m + 2n - 4)$, а общее число всех граничных и внутренних точек – mn. Тогда количество уравнений в данном методе будет меньше, чем в случае конечно-разностного метода в k раз, где $k = mn/2(m + n - 2)$. Если, например, $m = n = 10^4$, то $k = 2500$. Таким образом, трудоемкость данного метода будет в 2500 раз меньше. Погрешность данного метода для перемещений, деформаций и напряжений имеет одинаковый порядок $(2h)^6$, тогда как конечно-разностные методы в лучшем случае дадут погрешность для перемещений $(2h)^3$, а для деформаций и напряжений – $(2h)^2$.

5. Заключение. Алгоритм применения метода заключается в следующем. Вначале внутри области Ω выберем положение полюса (x_*, y_*), который нельзя располагать вблизи границы Γ и вблизи эволюты этой границы. Затем проведем через полюс (x_*, y_*) прямую E_0 параллельно оси x. Две точки пересечения этой прямой с границей Γ разделят Γ на два участка Γ^+ и Γ^-. На одном из этих участков наносим точки деления, например, D_i^+. Через эти точки и через полюс (x_*, y_*) проведем прямые E_i, которые в пересечениях с Γ^- дадут точки D_i^-. Для каждой точки D_i^+ определим угол θ_i, как угол между осью x и прямой E_i. Разности углов $\theta_{i+1} - \theta_i = \Delta\theta_i$ определяют приращения $\Delta\theta_i$. При нанесении точек D_i^+ и D_i^- надо выполнять условие (4.10), которое учитывает кривизну границы Γ: на участках с большой кривизной количество точек деления увеличивается. Теперь можно составлять замкнутую линейную систему (1.19) и решать ее при помощи ЭВМ.

Отметим, что метод нельзя применять непосредственно к решению стационарных уравнений (1.2), так как в этом случае ядра $K_p(\xi)$ и $L_p(\xi)$ становятся конечными полиномами, т.е. вырожденными. Независимо от типа граничных условий приближенное решение, полученное данным методом, точно удовлетворяет дифференциальным уравнениям движения упругой среды и граничным условиям в точках D_i деления границы Γ прямыми E_i на мелкие части, но приближенно удовлетворяет граничным условиям во всех промежуточных точках этой границы. Метод может применяться также и к решению нестационарных динамических задач, если вначале по времени t сделать какое-нибудь интегральное преобразование. При этом система (1.2) примет вид, подобный системе (1.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колосов Г.В.* Об одном приложении теории функции комплексного переменного в плоской задаче математической теории упругости. М.: Юрьев, 1909.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 350 с.

3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
4. *Ивлев Д.Д., Михайлова М.В., Петров Н.И.* О полиномиальных решениях линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Изв. инженерно-технолог. акад. Чувашской респ. № 3 (4). 1996; № 4 (5). 1996; № 1 (6). 1997; № 2 (7), 1997. С. 64–69.
5. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 940 с.
6. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
7. *Чернышов А.Д.* Решение плоской, осесимметричной и пространственной однофазной задачи Стефана // Инженерно-физич. ж. 1974. Т. 27. № 2. С. 341–350.
8. *Чернышов А.Д.* Нестационарное течение вязкой жидкости в трубе треугольного сечения // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 199–203.
9. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
13.07.1999