МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.374

© 2000 г. **Б.Г. МИРОНОВ**

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНОГО БРУСА И ПЛИТЫ

В работе [1] А.Ю. Ишлинский в линеаризованной постановке рассмотрел плоское идеальнопластическое состояние растягиваемой полосы переменного сечения.

В аналогичной постановке в [2] рассмотрено предельное состояние плоской анизотропной идеальнопластической полосы, а также растягиваемых брусьев прямоугольного поперечного сечения при условии полной пластичности и условии пластичности Мизеса.

В [3] рассмотрено пространственное идеальнопластическое состояние призматических тел переменного прямоугольного сечения при условии соответствия напряженного состояния граням и ребрам кусочнолинейных условий текучести.

Ниже рассматриваются линеаризованые уравнения теории идеальной пластичности и пространственное течение анизотропных идеальнопластических тел переменного сечения для гладких поверхностей текучести.

1. Пусть σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензоров напряжения и скоростей деформации и

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma_{ij}', \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}' \tag{1.1}$$

где δ – малый параметр.

В качестве исходного примем напряженное состояние, определяемое соотношениями

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij}\sigma_i^0 \tag{1.2}$$

где σ_i – главные компоненты напряжений.

Соотношения связи между главными компонентами σ_i напряжения и компонентами σ_{ij} напряжения в декартовой системе координат xyz, а также между направляющими l_i, m_i, n_i косинусами запишем в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j \tag{1.3}$$

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

Полагая наряду с (1.1):

$$l_i = l_i^0 + \delta l_i', \quad m_i = m_i^0 + \delta m_i', \quad n_i = n_i^0 + \delta n_i' \tag{1.5}$$

и учитывая (1.2), из (1.3) и (1.4) получим

$$l_1' = m_2' = n_3' = 0, \quad l_2' + m_1' = 0, \quad m_3' + n_2' = 0, \quad n_1' + l_3' = 0 \tag{1.6}$$

$$\sigma_x' = \sigma_1', \quad \tau_{xy}' = (\sigma_1^0 - \sigma_2^0)l_2' \ (xyz, 123) \tag{1.7}$$

Предположим, что имеет место условие предельного состояния

$$F(\sigma_{ij}) = 0$$

Согласно (1.3) оно примет вид

$$F(\sigma_i, l_i, m_i, n_i) = 0 \tag{1.8}$$

Линеаризируя соотношение (1.8) по малому параметру δ, и, учитывая (1.6) и (1.7), имеем

$$a_1\sigma'_x + a_2\sigma'_y + a_3\sigma'_z + a_{12}\tau'_{xy} + a_{12}\tau'_{xy} + a_{23}\tau'_{yz} + a_{31}\tau'_{xz} = 0 \tag{1.9}$$

$$a_i = \frac{\partial F^0}{\partial \sigma_i}, \quad a_{12} = \frac{1}{\sigma_1^0 - \sigma_2^0}\left(\frac{\partial F^0}{\partial l_2} - \frac{\partial F^0}{\partial m_1}\right) \quad (123, lmn)$$

В дальнейшем будем полагать, что условие пластичности не зависит от среднего давления $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. Тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = 0 \tag{1.10}$$

Выражение мощности рассеяния механической энергии запишем в виде

$$N = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{ij} l_i l_j \quad (123, lmn) \tag{1.11}$$

Величины ε_1, ε_2, ε_3 определяют скорости деформации вдоль направлений главных компонент напряжений и в общем случае не совпадают с главными компонентами скорости деформации. Совпадение имеет место только для изотропного тела.

Из условия экстремума функционала

$$A = N - \lambda F - \mu_{ij}(l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j - \delta_{ij})$$

определим соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\varepsilon_1 = \lambda \partial F / \partial \sigma_1, \quad \varepsilon_2 = \lambda \partial F / \partial \sigma_2, \quad \varepsilon_3 = \lambda \partial F / \partial \sigma_3 \tag{1.12}$$

$$\sigma_1(\varepsilon_{ij} l_j) = \frac{1}{2}\lambda \partial F / \partial l_i + \mu_{ij} l_j \quad (123, lmn) \tag{1.13}$$

В исходном состоянии

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_x^0 = \lambda^0 a_1, \quad \varepsilon_2^0 = \varepsilon_y^0 = \lambda^0 a_2, \quad \varepsilon_3^0 = \varepsilon_z^0 = \lambda^0 a_3$$

$$\mu_{i1}^0 = \sigma_x^0 \varepsilon_{i1}^0 - \frac{1}{2}\lambda^0 \partial F^0 / \partial l_i \quad (123, xyz, lmn)$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2}\lambda^0 a_{12}, \quad \varepsilon_{yz}^0 = \frac{1}{2}\lambda^0 a_{23}, \quad \varepsilon_{xz}^0 = \frac{1}{2}\lambda^0 a_{31}$$

Линеаризируя соотношения (1.11)–(1.13), получим

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_x + 2\varepsilon_{xy}^0 l'_2 + 2\varepsilon_{xz}^0 l'_3 \quad (123, xyz, lmn) \tag{1.14}$$

$$\varepsilon'_x = b_{11}\sigma'_x + b_{12}\sigma'_y + b_{13}\sigma'_z + b_{xx}\tau'_{xy} + b_{xy}\tau'_{yz} + b_{xz}\tau'_{xz} + \lambda' a_1 \quad (xyz, 123) \tag{1.15}$$

$$\varepsilon'_{xy} = c_{11}\sigma'_x + c_{12}\sigma'_y + c_{13}\sigma'_z + c_{xx}\tau'_{xy} + c_{xy}\tau'_{yz} + c_{xz}\tau'_{xz} + \frac{1}{2}\lambda' a_{12} \quad (xyz, 123) \tag{1.16}$$

$$b_{1i} = \lambda^0 \frac{\partial^2 F^0}{\partial \sigma_i \partial \sigma_1} \quad (123xyz)$$

$$b_{xx} = \frac{1}{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}\left(\lambda^0\left(\frac{\partial^2 F^0}{\partial l_2 \partial \sigma_1} - \frac{\partial^2 F^0}{\partial m_1 \partial \sigma_1}\right) - 2\varepsilon_{xy}^0\right)$$

$$b_{xy}=\frac{1}{\sigma_y^0-\sigma_z^0}\lambda^0\left(\frac{\partial^2F^0}{\partial m_3\partial\sigma_1}-\frac{\partial^2F^0}{\partial n_2\partial\sigma_1}\right)$$

$$b_{xz}=\frac{1}{\sigma_z^0-\sigma_x^0}\left(\lambda^0\left(\frac{\partial^2F^0}{\partial n_1\partial\sigma_1}-\frac{\partial^2F^0}{\partial l_3\partial\sigma_1}\right)+2\varepsilon_{xz}^0\right)\ (xyz,lmn,123)$$

$$c_{11}=\tfrac{1}{2}b_{xx},\quad c_{12}=\tfrac{1}{2}b_{yx},\quad c_{13}=\tfrac{1}{2}b_{zx}$$

$$c_{xx}=\frac{1}{(\sigma_x^0-\sigma_y^0)^2}\left(\mu_{11}^0+\mu_{22}^0-\sigma_x^0\varepsilon_y^0-\sigma_y^0\varepsilon_x^0+\frac{\lambda^0}{2}\left(\frac{\partial^2F^0}{\partial l_2^2}-2\frac{\partial^2F^0}{\partial l_2\partial m_1}+\frac{\partial^2F^0}{\partial m_1^2}\right)\right)$$

$$c_{xy}=\frac{1}{(\sigma_x^0-\sigma_y^0)(\sigma_y^0-\sigma_z^0)}\left(-\mu_{13}^0+\sigma_y^0\varepsilon_{xz}^0+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda^0}{2}\left(\frac{\partial^2F^0}{\partial l_2\partial m_3}-\frac{\partial^2F^0}{\partial l_2\partial n_2}-\frac{\partial^2F^0}{\partial m_1\partial m_3}+\frac{\partial^2F^0}{\partial m_1\partial n_2}\right)\right)$$

$$c_{xz}=\frac{1}{(\sigma_x^0-\sigma_y^0)(\sigma_z^0-\sigma_x^0)}\left(-\mu_{23}^0+\sigma_x^0\varepsilon_{yz}^0+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda^0}{2}\left(\frac{\partial^2F^0}{\partial l_2\partial n_1}-\frac{\partial^2F^0}{\partial l_2\partial l_3}-\frac{\partial^2F^0}{\partial m_1\partial n_1}+\frac{\partial^2F^0}{\partial m_1\partial l_3}\right)\right)\ (xyz,123,lmn)$$

К семи соотношениям (1.9), (1.15) и (1.16) присоединим три уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}'}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}'}{\partial z}=0\ (xyz) \tag{1.17}$$

В соотношениях (1.15), (1.16) перейдем к компонентам скоростей перемещений по формулам Коши

$$\varepsilon_x'=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{xy}'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ (xyz,uvw) \tag{1.18}$$

Десять соотношений (1.9), (1.15)–(1.17) определяют замкнутую систему десяти уравнений относительно десяти независимых переменных $\sigma_{ij}',u',v',w',\lambda'$.

Удовлетворим уравнениям равновесия при помощи функций напряжений Максвелла

$$\sigma_x'=\frac{\partial^2X_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2X_3}{\partial y^2},\quad \tau_{xy}'=-\frac{\partial^2X_3}{\partial x\partial y}\ (xyz,123) \tag{1.19}$$

Решение будем искать в виде

$$X_i=A_if(h),\quad \lambda'=C\frac{\partial^2f(h)}{\partial h^2},\quad u=B_i\frac{\partial f(h)}{h}\ (uvw,123) \tag{1.20}$$

где $h=rx+sy+tz$, A_i, B_i, C, r, s, t – const. Тогда из (1.9), (1.15), (1.16) получим

$$a_1(A_2t^2+A_3s^2)+a_2(A_3r^2+A_1t^2)+a_3(A_1s^2+A_2t^2)-$$
$$-(a_{12}A_3rs+a_{23}A_1st+a_{31}A_2rt)=0 \tag{1.21}$$

$$B_1r=b_{11}(A_2t^2+A_3s^2)+b_{12}(A_3r^2+A_1t^2)+b_{13}(A_1s^2+A_2t^2)-$$
$$-(b_{xx}A_3rs+b_{xy}A_1st+b_{xz}A_2rt)+a_1C\ (123,xyz,rst) \tag{1.22}$$

$$B_1 s + B_2 r = 2(c_{11}(A_2 t^2 + A_3 s^2) + c_{12}(A_3 r^2 + A_1 t^2) + c_{13}(A_1 s^2 + A_2 r^2)) -$$
$$- 2(c_{xx} A_3 rs + c_{xy} A_1 st + c_{xz} A_2 rt) + a_{12} C \quad (123, xyz, rst) \tag{1.23}$$

Подставляя в (1.23) значения B_i из (1.22), имеем

$$(b_{11}(A_2 t^2 + A_3 s^2) + b_{12}(A_3 r^2 + A_1 t^2) + b_{13}(A_1 s^2 + A_2 t^2) -$$
$$- (b_{xx} A_3 rs + b_{xy} A_1 st + b_{xz} A_2 rt) + a_1 C)s^2 +$$
$$+(b_{21}(A_2 t^2 + A_3 s^2) + b_{22}(A_3 r^2 + A_1 t^2) + b_{23}(A_1 s^2 + A_2 t^2) -$$
$$- (b_{yx} A_3 rs + b_{yy} A_1 st + b_{yz} A_2 rt) + a_1 C)r^2 -$$
$$-2(c_{11}(A_2 t^2 + A_3 s^2) + c_{12}(A_3 r^2 + A_1 t^2) + c_{13}(A_1 s^2 + A_2 r^2)) +$$
$$+ 2(c_{xx} A_3 rs + c_{xy} A_1 st + c_{xz} A_2 rt) - a_{12} C = 0 \quad (123, xyz, rst) \tag{1.24}$$

Присоединяя к трем уравнениям (1.24) уравнение (1.21), получим однородную линейную систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных A_1, A_2, A_3, C. Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим уравнение восьмой степени для определения зависимости r от s и t.

2. Рассмотрим случай задания условия пластичности (1.8) в виде

$$a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = k(l_1, l_2, l_3) \tag{2.1}$$

причем $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Линеаризируя соотношение (2.1), получим

$$a_1 \sigma'_x + a_2 \sigma'_y + a_3 \sigma'_z + a_{12} \tau'_{xy} + a_{31} \tau'_{xz} = 0 \tag{2.2}$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sigma_2^0 - \sigma_1^0} \frac{\partial k^0}{\partial l_2}, \quad a_{31} = \frac{1}{\sigma_3^0 - \sigma_1^0} \frac{\partial k^0}{\partial l_3}$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения имеем

$$\varepsilon_x^0 = \lambda^0 a_1, \quad \varepsilon_y^0 = \lambda^0 a_2, \quad \varepsilon_z^0 = \lambda^0 a_3$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{\lambda^0}{2} a_{12}, \quad \varepsilon_{xz}^0 = \frac{\lambda^0}{2} a_{31}, \quad \varepsilon_{yz}^0 (\sigma_y^0 - \sigma_z^0) = 0 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon'_x = \lambda' a_1 + b_{xx} \tau_{xy} + b_{xz} \tau_{xz} \quad (xyz, 123) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon'_{xy} = \frac{b_{xx}}{2}(\sigma'_x - \sigma'_y) + c_{xx} \tau'_{xy} + c_{xy} \tau'_{yz} + c_{xz} \tau'_{xz} + \frac{\lambda'}{2} a_{12} \quad (xyz, 123) \tag{2.5}$$

Удовлетворим соотношениям (2.4), полагая

$$y = a_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} - b_{xx} \frac{\partial X_3}{\partial y} - b_{xz} \frac{\partial X_2}{\partial z}, \quad \lambda' = \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial z} \quad (uvw, xyz, 123) \tag{2.6}$$

Тогда из (1.8) получим

$$\varepsilon'_x = a_1 \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial z} - b_{xx} \frac{\partial^2 X_3}{\partial x \partial y} - b_{xz} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial z} \quad (xyz, 123) \tag{2.7}$$

$$\varepsilon'_{xy} = a_1 \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial z} + a_1 \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x^2} - b_{xx} \frac{\partial^2 X_3}{\partial y^2} -$$
$$- b_{xz} \frac{\partial^2 X_2}{\partial y \partial z} - b_{yx} \frac{\partial^2 X_3}{\partial x \partial z} - b_{yy} \frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} \quad (xyz, 123) \tag{2.8}$$

Положим

$$X_i = A_i \frac{\partial f(h)}{\partial h}, \quad Z = Bf(h) \tag{2.9}$$

где $h = rx + sy + tz$. Из (2.2) и (2.5) получим однородную линейную систему четырех уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, A_3 и B:

$$a_1(A_2t^2 + A_3s^2) + a_2(A_3r^2 + A_1t^2) + a_3(A_1s^2 + A_2r^2) - a_{12}A_3rs - a_{31}A_2rt = 0$$

$$Bt(a_1s^2 + a_2r^2) - (b_{xx}A_3s^2 + b_{xz}A_2st - b_{xy}A_3rt + b_{yy}A_1t^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}b_{xx}(A_2t^2 + A_3s^2 - A_1t^2 - A_3r^2) - c_{xx}A_3rs - c_{xy}A_1st -$$

$$-c_{xz}A_2rt + \tfrac{1}{2}a_{12}Brst \quad (xyz, 123, rst)$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим уравнение восьмой степени для определения зависимости r от s и t.

Положим $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $\sigma_y^0 = \sigma_z^0$. Из (1.7), (2.2), (2.4) и (2.5) имеем

$$\sigma'_y = \sigma'_z, \quad \tau'_{yz} = 0, \quad \sigma'_x - \sigma'_y + a_{12}\tau' xy + a_{31}\tau'_{xz} = 0 \tag{2.10}$$

$$\varepsilon'_x = \lambda + b_{xx}\tau'_{xy} + b_{xz} \tag{2.11}$$

$$\varepsilon'_{xy} = \frac{b_{xx}}{2}(\sigma'_x - \sigma'_y) + c_{xx}\tau'_{xy}c_{xz}\tau'_{xz} + \frac{\lambda'}{2}a_{12}$$

$$\varepsilon'_{xz} = \frac{b_{zz}}{2}(\sigma'_z - \sigma'_x) + c_{zx}\tau'_{xy}c_{zz}\tau'_{xz} + \frac{\lambda'}{2}a_{31} \tag{2.12}$$

Учитывая (2.10) и (2.11), из (2.12) получим

$$2\varepsilon'_{xy} - a_{12}\varepsilon'_x = k_{11}\tau'_{xy} + k_{12}\tau'_{xz}, \quad 2\varepsilon'_{xz} - a_{31}\varepsilon'_x = k_{21}\tau'_{xy} + k_{22}\tau'_{xz} \tag{2.13}$$

$$k_{11} = 2(c_{xx} - b_{xx}a_{12}), \quad k_{12} = 2c_{xz} - b_{xx}a_{31} - b_{xz}a_{12}$$

$$k_{21} = 2c_{zx} - b_{zz}a_{12} - b_{xx}a_{31}, \quad k_{22} = 2c_{zz} - b_{zz}a_{31} - b_{xz}a_{31}$$

Полагая $X_1 = 0$, $X_2 = X_3 = X$:

$$u = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \; v = \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{a_{12}}{2}\frac{\partial Y}{\partial x} - k_{11}\frac{\partial X}{\partial y} - k_{12}\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$w = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{a_{31}}{2}\frac{\partial Y}{\partial x} - k_{21}\frac{\partial X}{\partial y} - k_{22}\frac{\partial X}{\partial z}$$

из (2.10) и условия несжимаемости согласно (1.18) и (1.19) получим

$$-\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} - a_{31}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z} = 0 \tag{2.14}$$

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{a_{12}}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{a_{31}}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} =$$

$$= k_{11}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + (k_{12} + k_{21})\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} + k_{22}\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \tag{2.15}$$

Решения уравнений (2.14) и (2.15) могут быть определены в виде

$$X = f(p_1x + q_1y + r_1z) \tag{2.16}$$

$$Y = f(p_2x + q_2y + r_2z) + Af(p_1x + q_1y + r_1z) \tag{2.17}$$

$$p_1 = -\frac{a_{12}q_1 + a_{31}r_1}{2} + \left(\left(\frac{a_{12}q_1 + a_{31}r_1}{2}\right)^2 - q_1^2 - r_1^2\right)^{1/2}$$

$$A = \frac{2(k_{11}q_1^2 + (k_{12} + k_{21})q_1r_1 + k_{22}r_1^2}{a_{12}p_1q_1 + a_{31}p_1r_1}$$

$$p_2 = -\frac{a_{12}q_2 + a_{31}r_2}{4} + \left(\left(\frac{a_{12}q_2 + a_{31}r_2}{4}\right)^2 - q_2^2 - r_2^2\right)^{1/2}$$

3. Рассмотрим течение бруса под действием растягивающей силы, направленной вдоль оси x. Предположим $\sigma_y^0 = \sigma_z^0 = 0$, $\sigma_x^0 \neq 0$. Уравнения граней бруса зададим в виде

$$y = \pm(h_1 + \delta g_1(x,z)), \quad z = \pm(h_2 + \delta g_2(x,y)) \tag{2.18}$$

Граничные условия на боковых гранях тела имеют вид

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \quad (xyz, lmn)$$

где l, m, n – направляющие косинусы нормали к граням тела. Тогда при $\tau'_{yz} = 0$ будем иметь

$$\sigma'_y = 0, \ \ \tau'_{xy} - \sigma_x^0\, \partial q_1 / \partial x = 0 \quad \text{при} \ \ y = h_1$$

$$\sigma'_z = 0, \ \ \tau'_{xz} - \sigma_x^0\, \partial q_2 / \partial x = 0 \quad \text{при} \ \ y = h_2 \tag{2.19}$$

Решения (2.16) и (2.19) запишем в виде

$$X = B_1 \cos p\left(x + \frac{a_{12}y + a_{31}z}{2}\right)\cos ps_1y \cos pt_1z \tag{2.20}$$

$$Y = B_2 \cos p\left(x + \frac{a_{12}y + a_{31}z}{4}\right)\cos ps_2y \cos pt_2z +$$

$$+ A_1 \cos p\left(x + \frac{a_{12}y + a_{31}z}{2}\right)\cos ps_1y \cos pt_1z +$$

$$+ A_2 \cos p\left(x + \frac{a_{12}y + a_{31}z}{2}\right)\sin ps_1y \sin pt_1z +$$

$$+ A_3 \sin p\left(x + \frac{a_{12}y + a_{31}z}{2}\right)\cos ps_1y \sin pt_1z +$$

$$+ A_4 \sin p\left(x + \frac{a_{12}y + a_{31}z}{2}\right)\sin ps_1y \cos pt_1z \tag{2.21}$$

$$s_1 = \frac{(2 + a_{12}^2)^{1/2}}{2}, \quad t_1 = \frac{(2 + a_{31}^2)^{1/2}}{2}, \quad s_2 = \frac{(8 + a_{12}^2)^{1/2}}{4}, \quad t_2 = \frac{(8 + a_{31}^2)^{1/2}}{4}$$

а уравнения для определения A_1, A_2, A_3, A_4 имеют вид

$$-\frac{a_{12}^2 + a_{31}^2}{4}A_1 + \frac{a_{31}t_1}{2}A_3 + \frac{a_{12}s_1}{2}A_4 = -\left(\left(\frac{a_{12}^2}{4} + s_1^2\right)k_{11} + \frac{a_{12}a_{31}}{4}(k_{12} + k_{21}) + \left(\frac{a_{31}^2}{4} + t_1^2\right)k\right.$$

$$-\frac{a_{12}^2+a_{31}^2}{4}A_2-\frac{a_{31}t_1}{2}A_4-\frac{a_{12}s_1}{2}A_3=s_1t_1(k_{12}+k_{21})B_1$$

$$-\frac{a_{12}^2+a_{31}^2}{4}A_3+\frac{a_{31}t_1}{2}A_1-\frac{a_{12}s_1}{2}A_2=\left(\frac{a_{12}t_1}{2}(k_{12}+k_{21})+a_{31}t_1k_{22}\right)B_1$$

$$-\frac{a_{12}^2+a_{31}^2}{4}A_4-\frac{a_{31}t_1}{2}A_2+\frac{a_{12}s_1}{2}A_1=\left(\frac{a_{31}s_1}{2}(k_{12}+k_{21})+a_{12}s_1k_{11}\right)B_1$$

Тогда из (2.19) согласно (1.19) получим

$$g_1=(-1)^{q+1}\frac{B_1ps_1}{\sigma_x^0}\sin p\left(x+\frac{a_{12}h_1+a_{31}z}{2}\right)\cos pt_1z \tag{2.22}$$

$$p=\frac{\pi(1+2q)}{2s_1h_1}\quad (q=0,\pm1,2,\ldots)$$

$$g_2=(-1)^{q+1}\frac{B_1pt_1}{\sigma_x^0}\sin p\left(x+\frac{a_{12}y+a_{31}h_2}{2}\right)\cos ps_1y \tag{2.23}$$

$$p=\frac{\pi(1+2q)}{2t_1h_2}\quad (q=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

Откуда при $q=0$ получим

$$ps_1=\pi/(2h_1),\quad pt_1=\pi/(2h_2),\quad h_2/h_1=s_1/t_1$$

4. Рассмотрим течение плиты под действием растягивающих сил, направленных вдоль осей y и z. Положим $\sigma_y^0=\sigma_z^0\neq0,\ \sigma_x^0=0$. Уравнения поверхностей плиты зададим в виде

$$x=\pm(h+\delta g(y,z)) \tag{2.24}$$

Граничные условия на поверхности плиты имеют вид

$$\sigma_xl+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n=0$$

где l, m, n – направляющие косинусы нормали к поверхности плиты. Тогда при $\tau'_{yz}=0$ будем иметь

$$\sigma'_x=0,\quad \tau'_{xy}-\sigma'_y\frac{\partial g}{\partial y}=0,\quad \tau'_{xz}-\sigma_z^0\frac{\partial g}{\partial z}=0\quad \text{при } x=h \tag{2.25}$$

Решения (2.16) и (2.17) запишем в виде

$$X=B_1\cos\frac{(a_{12}^2+a_{31}^2)^{1/2}}{a_{12}}tx\cos t\frac{-a_{31}y+a_{12}z}{a_{12}} \tag{2.26}$$

$$Y=B_2\cos\frac{(a_{12}^2+a_{31}^2)^{1/2}}{a_{12}}tx\cos t\frac{-a_{31}y+a_{12}z}{a_{12}}+$$

$$+(C_1y+C_2z)\cos\frac{(a_{12}^2+a_{31}^2)^{1/2}}{a_{12}}tx\sin t\frac{-a_{31}y+a_{12}z}{a_{12}}$$

$$a_{12}C_1+a_{31}C_2=0,\ -2a_{31}C_1+2a_{12}C_2=B_1\left(-k_{11}\frac{a_{31}^2}{a_{12}^2}+(k_{12}+k_{21})\frac{a_{31}}{a_{12}}-k_{22}\right)$$

Тогда из (2.25) согласно (1.19) получим

$$g(y,z)=(-1)^{q+1}\frac{B_1(a_{12}^2+a_{31}^2)^{1/2}t}{\sigma_y^0 a_{12}}\cos t\frac{-a_{31}y+a_{12}z}{a_{12}}$$

$$t=\frac{a_{12}\pi(1+2q)}{2(a_{12}^2+a_{31}^2)^{1/2}h}\quad (q=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

При $q=0$ имеем

$$t=\frac{a_{12}\pi}{2(a_{12}^2+a_{31}^2)^{1/2}h}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. 1958. № 1. С. 12–15.
2. *Васильева А.М., Ивлев Д.Д., Михайлова М.В.* О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеальнопластического материала // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 5. С. 79–87.
3. *Артемов М.А., Ивлев Д.Д.* О предельном состоянии идеальнопластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Изв. РАН. МТТ. № 4. 1998. С. 173–179.

Чебоксары

Поступила в редакцию
17.07.2000