

УДК 539.3

© 2000 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, Д.Д. КАЛКЕР, Д.А. ПОЖАРСКИЙ

**К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ  
КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ**

Проводится расчет каждой компоненты тензора напряжений, а также эффективного напряжения в двухслойном упругом теле (слой, полностью сцепленный с полупространством), находящемся под действием нормальной нагрузки, вызванной внедрением сферического индентора. Эта внешняя нагрузка определяется в ходе решения контактной задачи методом парных интегральных уравнений. Результаты могут найти применение в расчетах на прочность тел с покрытиями, биметаллических конструкций, композиционных материалов.

Осесимметричная контактная задача о вдавлении сферы в бесконечную плиту, лежащую на упругом полупространстве, впервые по-видимому рассматривалась в [1] при помощи метода коллокации. Из работ последнего времени на эту тему упомянем [2], где применялся метод конечных элементов.

1. В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  рассмотрим упругое тело, представляющее собой слой  $0 \leq z \leq h$  толщины  $h$  с упругими характеристиками  $\nu_1$  (коэффициент Пуассона),  $G_1$  (модуль сдвига), полностью сцепленный с полупространством с другими упругими характеристиками  $\nu_2, G_2$ . Решим сперва задачу о действии на верхней границе слоя нормальной нагрузки интенсивности  $q(r)$  ( $0 \leq r \leq a$ ). В условиях осевой симметрии используем две функции Папковича – Нейбера  $\Phi_n = \Phi_n(r, z)$  ( $n = 1, 2$ ), через которые перемещения и напряжения можно выразить по формулам [3]

$$\begin{aligned}
 u_r &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - z \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad u_z = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + (3 - 4\nu)\Phi_2 - z \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\
 \frac{\sigma_r}{2G} &= 2\nu \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - z \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2}, \quad \frac{\sigma_\varphi}{2G} = 2\nu \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \\
 \frac{\sigma_z}{2G} &= 2(1 - \nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2}, \quad \frac{\tau_{rz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - 2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Далее в обозначениях (1.1) используем дополнительные индексы: 1 – для слоя, 2 – для полупространства.

Граничные условия запишем в виде

$$z = h: \tau_{rz}^1 = 0; \sigma_z^1 = -q(r) \quad (0 \leq r \leq a), \quad \sigma_z^1 = 0 \quad (r > a) \tag{1.2}$$

$$z = 0: u_r^1 = u_r^2; u_z^1 = u_z^2; \tau_{rz}^1 = \tau_{rz}^2; \sigma_z^1 = \sigma_z^2$$

В слое функции Папковича – Нейбера возьмем в форме [3]:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^1 &= \int_0^\infty [A \operatorname{sh} \lambda z + B \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \\
 \Phi_2^1 &= \int_0^\infty [C \operatorname{sh} \lambda z + D \operatorname{ch} \lambda z] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $J_0(r)$  – функция Бесселя, а в полупространстве с учетом нулевых граничных условий на бесконечности возьмем

$$\Phi_1^2 = \int_0^{\infty} E e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad \Phi_2^2 = \int_0^{\infty} F e^{\lambda z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (1.4)$$

На основании (1.1)–(1.4) для шести неизвестных функций параметра  $\lambda$ :  $A, B, C, D, E, F$  получим следующую систему шести линейных алгебраических уравнений ( $u = \lambda h$ ):

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu_1)(C \operatorname{sh} u + D \operatorname{ch} u) - A \operatorname{ch} u - B \operatorname{sh} u - u(C \operatorname{ch} u + D \operatorname{sh} u) &= 0 \\ 2(1 - \nu_1)(C \operatorname{ch} u + D \operatorname{sh} u) - A \operatorname{sh} u - B \operatorname{ch} u - u(C \operatorname{sh} u + D \operatorname{ch} u) &= -Q \\ B = E, \quad (3 - 4\nu_1)D - A &= (3 - 4\nu_2)F - E \\ G_1[(1 - 2\nu_1)D - A] &= G_2[(1 - 2\nu_2)F - E] \\ G_1[2(1 - \nu_1)C - B] &= G_2[2(1 - \nu_2)F - E] \end{aligned} \quad (1.5)$$

где на основании преобразования Ханкеля

$$Q = \frac{1}{2G_1\lambda_0} \int_0^a q(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho \quad (1.6)$$

Вводя новые обозначения

$$\kappa_n = 3 - 4\nu_n \quad (n = 1, 2), \quad \varepsilon = \frac{G_1}{G_2}, \quad M = \frac{\kappa_1 + \varepsilon}{\varepsilon - 1}, \quad L = \frac{\varepsilon\kappa_2 - \kappa_1}{\varepsilon\kappa_2 + 1} \quad (1.7)$$

$$\Delta = M - (1 + 4u^2 + LM)e^{-2u} + Le^{-4u}$$

решение системы (1.5) найдем в виде

$$\begin{aligned} C &= -\frac{Q}{\Delta} [(M - 2u - 1)e^{-u} + (L + 2u - 1)e^{-3u}] \\ D &= -\frac{Q}{\Delta} [(M + 2u + 1)e^{-u} + (-L + 2u - 1)e^{-3u}] \\ A &= \frac{M - L}{4} C + \left( \frac{\kappa_1}{2} - \frac{M + L}{4} \right) D, \quad E = B \\ B &= \left( \frac{\kappa_1}{2} + \frac{M + L}{4} \right) C - \frac{M - L}{4} D, \quad F = \frac{\kappa_1 D - A + B}{\kappa_2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В каждом конкретном случае значений постоянных  $M, L$  непосредственно проверяется, что функция  $\Delta = \Delta(u) \neq 0$  при  $u \geq 0$ . На этом краевую задачу (1.2) можно считать решенной.

2. Рассмотрим теперь осесимметричную контактную задачу о вдавливании в двухслойное упругое основание (слой, сцепленный с полупространством) жесткого штампа, форма основания которого описывается функцией  $f(r)$ . Под действием центрально приложенной силы  $P$  штамп оседает на величину  $\delta$ . Силами трения между штампом и упругим телом пренебрегаем, вне зоны контакта поверхность упругого тела не нагружена. Для определения неизвестного контактного давления  $\sigma_z^1 = -q(r)$  ( $0 \leq r \leq a, z = h$ ) на основании условия  $u_z^1 = -(\delta - f(r))$  ( $0 \leq r \leq a, z = h$ ) и того, что  $u_z^1 = 2(1 - \nu_1)\Phi_2^1$  при  $z = h$ , где функция  $\Phi_2^1 = \Phi_2^1(r, z)$  определяется формулами (1.3),

(1.8), получим интегральное уравнение ( $\theta_1 = G_1/(1 - \nu_1)$ ):

$$\int_0^a q(\rho)k(\rho, r)\rho d\rho = \theta_1 h(\delta - f(r)) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2.1)$$

$$k(\rho, r) = \int_0^\infty N(u)J_0\left(\frac{u\rho}{h}\right)J_0\left(\frac{ur}{h}\right)du$$

$$N(u) = (M + 4ue^{-2u} - Le^{-4u})/\Delta$$

Заметим, что символ  $N(u)$  ядра (2.1) совпадает с символом ядра интегрального уравнения аналогичной пространственной контактной задачи [4].

Далее будем считать, что штамп имеет параболическую форму  $f(r) = r^2/(2R)$ . Введем безразмерные обозначения по формулам

$$\frac{r}{h} = r', \quad \frac{\rho}{h} = \rho', \quad \frac{a}{h} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\delta}{h} = \delta', \quad \frac{R\delta}{h^2} = R', \quad \frac{q(\rho)}{\theta_1 \delta'} = q'(\rho') \quad (2.2)$$

Безразмерный параметр  $\lambda$  (2.2) характеризует размер области контакта относительно толщины слоя. Опуская штрихи, запишем уравнение (2.1) с учетом (2.2) в форме

$$\int_0^{1/\lambda} q(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty N(u)J_0(ur)J_0(u\rho)du = 1 - \frac{r^2}{2R} \quad (0 \leq r \leq \lambda^{-1}) \quad (2.3)$$

Пусть

$$C(u) = \int_0^{1/\lambda} q(\rho)\rho J_0(u\rho)d\rho \quad (2.4)$$

Тогда уравнение (2.3) эквивалентно парному уравнению

$$\int_0^\infty [1 - g(u)]C(u)J_0(ur)du = 1 - \frac{r^2}{2R} \quad (0 \leq r \leq \lambda^{-1}) \quad (2.5)$$

$$\int_0^\infty uC(u)J_0(ur)du = 0 \quad (r > \lambda^{-1})$$

$$g(u) = 1 - N(u) \sim e^{-2u} \quad (u \rightarrow \infty)$$

Решение уравнения (2.5) ищем в виде [5, с. 33]:

$$C(u) = \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) \cos ut du \quad (2.6)$$

Применяя методику, развитую в [5], для определения функции  $\varphi(t)$  получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\lambda} K(x, t)\varphi(t)dt = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{R}\right) \quad (0 \leq x \leq \lambda^{-1}) \quad (2.7)$$

$$K(x, t) = 2 \int_0^\infty g(u) \cos ux \cos ut du$$

При выводе (2.7) использовано, что [6]:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(1 - \frac{y^2}{2R}\right) dy = 1 - \frac{x^2}{R} \quad (2.8)$$

В силу гладкости формы штампа следует потребовать, чтобы контактное давление обращалось в нуль на краю области контакта, т.е.  $\lim q(r) = 0$  ( $r \rightarrow 1/\lambda$ ). Обращая интегральное преобразование Ханкеля (2.4) и интегрируя по частям с учетом (2.6), получим

$$q(r) = \int_0^{\infty} u C(u) J_0(ur) du = \frac{\varphi(1/\lambda)}{\sqrt{(1/\lambda)^2 - r^2}} - \int_r^{1/\lambda} \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (2.9)$$

Таким образом, должно выполняться равенство  $\varphi(1/\lambda) = 0$  или (см. (2.7)):

$$\frac{1}{\lambda^2 R} - \frac{1}{2} \int_0^{1/\lambda} K\left(\frac{1}{\lambda}, t\right) \varphi(t) dt = 1 \quad (2.10)$$

Дополнительное уравнение (2.10) связывает безразмерные параметры  $\lambda$  и  $1/R$  (кривизну штампа). Если считать заданными размерные величины  $h, \delta, R$  (т.е. задана безразмерная величина  $1/R$ , см. (2.2)), то на основании системы уравнений (2.7), (2.10) можно найти значение  $\lambda$ , т.е. размер области контакта  $a$ . Практически же удобнее считать известным значение  $\lambda$  и из системы (2.7), (2.10) находить значение  $1/R$  и функцию  $\varphi(x)$ . Здесь при решении этой системы линейных уравнений применялся метод механических квадратур с использованием квадратурной формулы Гаусса по 32 узлам [7]. Брались следующие два случая двухслойного основания: (1) сталь на латуни; (2) латунь на стали. Значения упругих характеристик (модуль Юнга  $E$  (МПа) и коэффициент Пуассона  $\nu$ ) таковы [8]: для стали  $E = 20 \cdot 10^4$ ,  $\nu = 0.28$ ; для латуни  $E = 9 \cdot 10^4$ ,  $\nu = 0.35$ . Как известно, модуль сдвига  $G = E/[2(1 + \nu)]$ .

В табл. 1 приведены расчетные значения параметра  $1/R$  в зависимости от  $\lambda$  для случаев  $N = 1, 2$ . Для однородного полупространства  $g(u) \equiv K(x, t) \equiv 0$  и  $1/R \equiv \lambda^2$ . В табл. 1 также даны для случаев 1, 2 значения безразмерной вдавливающей силы

$$\chi = \frac{P}{\theta_1 \delta a} = 2\pi\lambda \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \quad (2.11)$$

Из табл. 1 видно, что при прочих равных условиях, для случая 1 (сталь на латуни) площадь области контакта несколько меньше, а для случая 2 (латунь на стали) – несколько больше, чем для случая однородного полупространства, что подтверждает выводы [9], сделанные при решении аналогичной пространственной контактной задачи для двухслойного основания с неизвестной областью контакта методом нелинейных граничных интегральных уравнений.

3. После решения системы (2.7), (2.10) нормальные давления  $q(r)$  в области контакта вычисляются по формуле (2.9). При этом функцию  $\varphi'(x)$  удобно находить, дифференцируя уравнение (2.7), в которое уже подставлена найденная функция  $\varphi(t)$ . Зная теперь  $q(r)$ , на основе полученного выше решения граничной задачи (1.2) можно рассчитать тензор напряжений и отвечающее критерию пластичности Губера – Мизеса эффективное напряжение  $\sigma_e$  внутри двухслойного основания

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3.1)$$

где  $\sigma_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) – главные напряжения. В нашем случае главными будут напряжения [10]:

$$\sigma_2 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_{1,3} = [\sigma_r + \sigma_z \pm \sqrt{(\sigma_r + \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}] / 2 \quad (3.2)$$

Рассчитаем эффективное напряжение на оси симметрии задачи  $r = 0$ , где имеем  $\tau_{rz} = 0$ , поэтому  $\sigma_1 = \sigma_r$ ,  $\sigma_2 = \sigma_\varphi$ ,  $\sigma_3 = \sigma_z$ . Используя (1.1) – (1.8), нетрудно показать,

$N$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$
1	14.1	7.67	3.25	0.783	0.207	0.0556
2	17.3	9.95	4.59	1.21	0.300	0.0714
1	2.33	2.24	2.09	1.78	1.53	1.39
2	2.89	2.98	3.14	3.63	4.30	4.86

Таблица 2

$N$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$
1, max $\sigma_e^1$	2,76(0,88)	1,19(0,76)	0,538(0)	0,304(0)	0,112(0)
1, max $\sigma_e^2$	0,221(0)	0,316(0)	0,323(0)	0,192(0)	0,0910(-1,02)
2, max $\sigma_e^1$	3,34(0,88)	1,86(0,76)	1,11(0,56)	0,596(0,42)	0,270(0,20)
2, max $\sigma_e^2$	0,405(0)	0,720(0)	0,922(0)	0,696(0)	0,393(-0,86)

что  $\sigma_r = \sigma_\varphi$  при  $r = 0$ , а значит  $\sigma_e = |\sigma_r - \sigma_z|$ . Введем новые безразмерные обозначения (напомним, что индекс 1 соответствует слою, а индекс 2 – полупространству)

$$\frac{z}{h} = z', \quad \frac{\sigma_e^1 h}{\theta_1 \delta} = (\sigma_e^1)', \quad \frac{\sigma_e^2 h}{\theta_1 \delta} = (\sigma_e^2)' \quad (3.3)$$

Опуская штрихи, получим в слое ( $0 \leq z \leq 1$ ) на оси  $r = 0$ :

$$\sigma_e^1 = \left| \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut \left[ (1 - \kappa_1) F_2(u, z) + \frac{3}{2} (F_3(u, z) + zu F_1(u, z)) \right] du \right| \quad (3.4)$$

$$F_1(u, z) = C_* \operatorname{sh} uz + D_* \operatorname{ch} uz, \quad F_2(u, z) = C_* \operatorname{ch} uz + D_* \operatorname{sh} uz$$

$$F_3(u, z) = A_* \operatorname{sh} uz + B_* \operatorname{ch} uz$$

$$A_* = -AQ^{-1}, \quad B_* = -BQ^{-1}, \quad C_* = -CQ^{-1}, \quad D_* = -DQ^{-1}$$

На основании (1.8) имеем

$$F_1(u, z) = \frac{1}{\Delta} [M e^{-u(1-z)} + (2u-1)e^{-u(3-z)} + (2u+1)e^{-u(1+z)} - L e^{-u(3+z)}]$$

$$F_2(u, z) = \frac{1}{\Delta} [M e^{-u(1-z)} + (2u-1)e^{-u(3-z)} - (2u+1)e^{-u(1+z)} + L e^{-u(3+z)}] \quad (3.5)$$

$$F_3(u, z) = \frac{1}{2\Delta} [M(\kappa_1 - 1 - 2u)e^{-u(1-z)} + (LM - \kappa_1 + 2u\kappa_1)e^{-u(3-z)} -$$

$$-(-LM + \kappa_1 + 2u\kappa_1)e^{-u(1+z)} + L(\kappa_1 - 1 + 2u)e^{-u(3+z)}]$$

В полупространстве ( $z \leq 0$ ) на оси  $r = 0$ :

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut e^{uz} \left[ (1 - \kappa_2) F_* + \frac{3}{2} (E_* + zu F_*) \right] du \right| \quad (3.6)$$

$$E_* = -EQ^{-1}, \quad F_* = -FQ^{-1}$$

На основании (1.8) имеем

$$F_* = \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2 \Delta} [M e^{-u} + (2u - 1) e^{-3u}]$$

$$\Phi_* = \frac{1}{2\Delta} \{ [\kappa_1 (M - 1 - 2u) + M(L - 1 - 2u)] e^{-u} +$$

$$+ [\kappa_1 (L - 1 + 2u) + L(M - 1 + 2u)] e^{-3u} \} \quad (3.7)$$

В формулах (3.4) содержатся плохо сходящиеся (при  $z \rightarrow 1$ ) интегралы, обусловленные первыми слагаемыми в квадратных скобках в формулах (3.5). Для улучшения сходимости выделим эти интегралы и, применяя интегрирование по частям, воспользуемся формулами [6]

$$\int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u e^{-u(1-z)} \cos ut du = - \int_0^{1/\lambda} \frac{\varphi'(t) t dt}{(1-z)^2 + t^2} \quad (3.8)$$

$$(1-z) \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u^2 e^{-u(1-z)} \cos ut du = -2(1-z)^2 \int_0^{1/\lambda} \frac{\varphi'(t) t dt}{[(1-z)^2 + t^2]^2}$$

На границе раздела сред  $z = 0$  эффективное напряжение терпит разрыв, обусловленный разрывом напряжения  $\sigma_r$ . В табл. 2 для случаев 1, 2 при разных  $\lambda$  даны максимальные значения  $\sigma_e^1$  и  $\sigma_e^2$ , в скобках – соответствующие значения  $z$  ( $r = 0$ ). Видно, что с уменьшением  $\lambda$   $\max \sigma_e^1$  и точка его достижения, как правило, понижаются;  $\max \sigma_e^2$ , как функция от  $\lambda$ , обычно имеет максимум при определенном значении  $\lambda$ .

4. Рассчитаем компоненты тензора напряжения в двухслойном основании, используя безразмерные величины

$$-\frac{\sigma_r h}{\theta_1 \delta} = \sigma'_r, \quad -\frac{\tau_{rz} h}{\theta_1 \delta} = \tau'_{rz}, \quad -\frac{\sigma_\varphi h}{\theta_1 \delta} = \sigma'_\varphi, \quad -\frac{\sigma_z h}{\theta_1 \delta} = \sigma'_z \quad (4.1)$$

Штрихи далее заменяем индексами 1 (в слое) и 2 (в полупространстве). В слое ( $0 \leq z \leq 1$ ):

$$\sigma_r^1 = \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut \left[ \frac{3 - \kappa_1}{2} F_2(u, z) J_0(ur) + \right.$$

$$\left. + (F_3(u, z) + zu F_1(u, z)) \left( J_0(ur) - \frac{J_1(ur)}{ur} \right) \right] du$$

$$\tau_{rz}^1 = - \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut \left[ \frac{\kappa_1 - 1}{2} F_1(u, z) - F_4(u, z) - zu F_2(u, z) \right] J_1(ur) du \quad (4.2)$$

$$\sigma_\varphi^1 = \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut \left[ \frac{3 - \kappa_1}{2} F_2(u, z) J_0(ur) + \right.$$

$$\left. + (F_3(u, z) + zu F_1(u, z)) \frac{J_1(ur)}{ur} \right] du$$

$$\sigma_z^1 = \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} F_2(u, z) - F_3(u, z) - zu F_1(u, z) \right] J_0(ur) du$$

где  $J_1(r)$  – функция Бесселя, а функции  $F_l(u, z)$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ) даются формулами (3.5) и

$$F_4(u, z) = A_* \operatorname{ch} uz + B_* \operatorname{sh} uz = \frac{1}{2\Delta} [M(\kappa_1 - 1 - 2u)e^{-u(1-z)} + (LM - \kappa_1 + 2u\kappa_1)e^{-u(3-z)} + (-LM + \kappa_1 + 2u\kappa_1)e^{-u(1+z)} - L(\kappa_1 - 1 + 2u)e^{-u(3+z)}] \quad (4.3)$$

В полупространстве ( $z \leq 0$ );

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut e^{uz} \left[ \frac{3 - \kappa_2}{2} F_* J_0(ur) + (E_* + zuF_*) \left( J_0(ur) - \frac{J_1(ur)}{ur} \right) \right] du$$

$$\tau_{rz}^2 = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut e^{uz} \left[ \frac{\kappa_2 - 1}{2} F_* - E_* - zuF_* \right] J_1(ur) du \quad (4.4)$$

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut e^{uz} \left[ \frac{3 - \kappa_2}{2} F_* J_0(ur) + (E_* + zuF_*) \frac{J_1(ur)}{ur} \right] du$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) dt \int_0^\infty u \cos ut e^{uz} \left[ \frac{\kappa_2 + 1}{2} F_* - E_* - zuF_* \right] J_0(ur) du$$

Напомним, что при  $z = 0$   $\tau_{rz}^1 = \tau_{rz}^2$ ,  $\sigma_z^1 = \sigma_z^2$ , что может служить для отладки расчетов; остальные напряжения при  $z = 0$  терпят разрыв.

Для улучшения сходимости плохо сходящихся (при  $z \rightarrow 1$  и  $z \rightarrow +0$ ) интегралов в формулах (4.2) следует произвести следующие замены:

$$F_1(u, z) \rightarrow F_1(u, z) - e^{-u(1-z)} - \frac{2u+1}{M} e^{-u(1+z)}$$

$$F_2(u, z) \rightarrow F_2(u, z) - e^{-u(1-z)} + \frac{2u+1}{M} e^{-u(1+z)} \quad (4.5)$$

$$F_3(u, z) \rightarrow F_3(u, z) - \left( \frac{\kappa_1 - 1}{2} - u \right) e^{-u(1-z)} + \frac{-LM + \kappa_1 + 2u\kappa_1}{2M} e^{-u(1+z)}$$

$$F_4(u, z) \rightarrow F_4(u, z) - \left( \frac{\kappa_1 - 1}{2} - u \right) e^{-u(1-z)} - \frac{-LM + \kappa_1 + 2u\kappa_1}{2M} e^{-u(1+z)}$$

Выделяемые при замене (4.5) двукратные интегралы сводятся к однократным при помощи интегрирования по частям и значений интегралов

$$\int_0^\infty u^m e^{-pu} \cos ut J_n(ru) du = C_n^m(t, p, r) = C_n^m$$

$$\int_0^\infty u^m e^{-pu} \sin ut J_n(ru) du = S_n^m(t, p, r) = S_n^m \quad (4.6)$$

Интегралы  $C_0^0, S_0^0$  вычисляются по формуле 2.12.25.1 [11];  $C_1^0$  – по формуле 2.12.25.2 [11];  $S_1^0$  – путем дифференцирования по  $s$  формулы 2.12.25.2 [11];  $S_1^{-1}$  – по формуле 2.12.25.5 [11];  $C_1^0 = -\partial C_0^0 / \partial p$ ;  $S_1^0 = -\partial S_0^0 / \partial p$ ;  $C_1^1 = \partial S_1^0 / \partial t$ ;  $S_1^1 = -\partial S_1^0 / \partial p$ ;  $C_0^2 = \partial S_0^1 / \partial t$ ;  $S_0^2 = -\partial S_0^1 / \partial p$ ;  $C_1^2 = \partial S_1^1 / \partial t$ ;  $S_1^2 = -\partial S_1^1 / \partial p$ . Аналитические значения указанных интегралов проверены численно; таким же путем обнаружены ошибки в формулах 2.12.25.3 [11]. В итоге для вычисления напряжений в слое получаем формулы

$$\sigma_r^1 = (\sigma_r^1)^* + (\sigma_r^1)_*, \quad \tau_{rz}^1 = (\tau_{rz}^1)^* + (\tau_{rz}^1)_* \quad (4.7)$$

$$\sigma_\varphi^1 = (\sigma_\varphi^1)^* + (\sigma_\varphi^1)_*, \quad \sigma_z^1 = (\sigma_z^1)^* + (\sigma_z^1)_*$$

где члены со звездочкой наверху вычисляются по формулам (4.2) с заменами (4.5), дающими при всех  $z \in [0; 1]$  и  $u \rightarrow \infty$  убывание не медленнее, чем у функции  $e^{-2u}$ ; другие члены ( $z_1 = 1 - z$ ,  $z_2 = 1 + z$ ):

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r^1)_* &= - \int_0^{1/\lambda} \varphi'(t) \left\{ S_0^0(t, z_1, r) - \frac{\kappa_1 - 1}{2r} S_1^{-1}(t, z_1, r) - \right. \\
 &- z_1 [S_0^1(t, z_1, r) - r^{-1} S_1^0(t, z_1, r)] + \\
 &+ \frac{LM - 3}{2M} S_0^0(t, z_2, r) + \frac{z - 3}{M} S_0^1(t, z_2, r) + \frac{2z}{M} S_0^2(t, z_2, r) + \\
 &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\kappa_1 - LM}{2M} S_1^{-1}(t, z_2, r) + \frac{\kappa_1 - z}{M} S_1^0(t, z_2, r) - \frac{2z}{M} S_1^1(t, z_2, r) \right] \Big\} dt \\
 (\tau_{rz}^1)_* &= \int_0^{1/\lambda} \varphi'(t) \left[ z_1 S_1^1(t, z_1, r) + \frac{LM - 1}{2M} S_1^0(t, z_2, r) - \right. \\
 &- \frac{z_1}{M} S_1^1(t, z_2, r) + \frac{2z}{M} S_1^2(t, z_2, r) \Big] dt \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\varphi^1)_* &= - \int_0^{1/\lambda} \varphi'(t) \left[ \frac{3 - \kappa_1}{2} S_0^0(t, z_1, r) + \frac{\kappa_1 - 1}{2r} S_1^{-1}(t, z_1, r) - \right. \\
 &- \frac{z_1}{r} S_1^0(t, z_1, r) - \frac{3 - \kappa_1}{2M} S_0^0(t, z_2, r) - \frac{3 - \kappa_1}{M} S_0^1(t, z_2, r) - \\
 &- \frac{\kappa_1 - LM}{2Mr} S_1^{-1}(t, z_2, r) - \frac{\kappa_1 - z}{Mr} S_1^0(t, z_2, r) + \frac{2z}{Mr} S_1^1(t, z_2, r) \Big] dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z^1)_* &= - \int_0^{1/\lambda} \varphi'(t) \left[ S_0^0(t, z_1, r) + z_1 S_0^1(t, z_1, r) - \right. \\
 &- \frac{1 + LM}{2M} S_0^0(t, z_2, r) - \frac{z_2}{M} S_0^1(t, z_2, r) - \frac{2z}{M} S_0^2(t, z_2, r) \Big] dt
 \end{aligned}$$

При  $p = 0$  некоторые интегралы (4.6) становятся разрывными или негладкими при  $t = r$ , например [11],

$$S_0^0(t, 0, r) = \int_0^\infty \sin tu J_0(ru) du = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < r) \\ (t^2 - r^2)^{-1/2} & (t > r) \end{cases} \tag{4.9}$$

$$S_1^{-1}(t, 0, r) = \int_0^\infty \frac{\sin tu}{u} J_1(ru) du = \begin{cases} t/r & (0 \leq t \leq r) \\ r/(t + \sqrt{t^2 - r^2}) & (0 \leq r \leq t) \end{cases}$$

Поэтому вблизи границы  $z = 1$  (т.е. при  $z_* \leq z \leq 1$ ) для сохранения точности счета в соответствующих интегралах (4.8) по переменной  $t$  при  $r \in (0; 1/\lambda)$  следует разбить интервал интегрирования на два интервала  $t \in (0; r)$  и  $t \in (r; 1/\lambda)$ . При расчете напряжений на поверхности упругого тела  $z = 1$  следует в (4.5) отбросить последние слагаемые (и соответствующие им члены в (4.8), зависящие от  $z_2$ ). Тогда с учетом (4.9)



получим при  $z = 1$ :  $\tau_{rz}^1 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r^1)_* &= - \int_r^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \frac{\alpha_1 - 1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \int_0^r \Phi'(t)t dt + \int_r^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)dt}{t + \sqrt{t^2 - r^2}} \right] \left( 0 < r < \frac{1}{\lambda} \right) \\
 (\sigma_r^1)_* &= \frac{\alpha_1 - 1}{2r^2} \int_0^{1/\lambda} \Phi'(t)t dt \left( r \geq \frac{1}{\lambda} \right) \\
 (\sigma_r^1)_* &= \frac{\alpha_1 - 5}{4} \int_0^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)}{t} dt \quad (r = 0) \\
 (\sigma_\varphi^1)_* &= - \frac{3 - \alpha_1}{2} \int_r^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \frac{\alpha_1 - 1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \int_0^r \Phi'(t)t dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_r^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)dt}{t + \sqrt{t^2 - r^2}} \right] \left( 0 < r < \frac{1}{\lambda} \right) \\
 (\sigma_\varphi^1)_* &= - \frac{\alpha_1 - 1}{2r^2} \int_0^{1/\lambda} \Phi'(t)t dt \left( r \geq \frac{1}{\lambda} \right) \\
 (\sigma_\varphi^1)_* &= \frac{\alpha_1 - 5}{4} \int_0^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)}{t} dt \quad (r = 0) \\
 \sigma_z^1 &= -q(r) = \int_r^{1/\lambda} \frac{\Phi'(t)dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \left( 0 \leq r \leq \frac{1}{\lambda} \right) \\
 \sigma_z^1 &= 0, \quad (r \geq 1/\lambda)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Для улучшения сходимости (при  $z \rightarrow -0$ ) интегралов в формулах (4.4) нужно произвести следующие замены:

$$\begin{aligned}
 F_* &\rightarrow F_* - \frac{L + \alpha_1}{\alpha_2} e^{-u} \sim e^{-3u} \quad (u \rightarrow \infty) \\
 E_* &\rightarrow E_* - \left( \frac{\alpha_1(M-1)}{2M} - \frac{\alpha_1 + M}{M} u \right) e^{-u} \sim e^{-3u} \quad (u \rightarrow \infty)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Тогда для вычисления напряжений в полупространстве получаем формулы

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^2 &= (\sigma_r^2)^* + (\sigma_r^2)_*, \quad \tau_{rz}^2 = (\tau_{rz}^2)^* + (\tau_{rz}^2)_* \\
 \sigma_\varphi^2 &= (\sigma_\varphi^2)^* + (\sigma_\varphi^2)_*, \quad \sigma_z^2 = (\sigma_z^2)^* + (\sigma_z^2)_*
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

где члены со звездочкой наверху вычисляются по формулам (4.4) с заменами (4.11), другие члены ( $z_1 = 1 - z$ ):

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r^2)_* &= \int_0^{1/\lambda} \Phi(t) \left\{ \frac{3 - \alpha_2}{2} \frac{L + \alpha_1}{\alpha_2} C_0^1(t, z_1, r) + \left[ \frac{\alpha_1(M-1)}{2M} + \frac{L-1}{M} \right] \times \right. \\
 &\quad \times \left[ C_0^1(t, z_1, r) - \frac{1}{r} C_1^0(t, z_1, r) \right] - \left[ \frac{\alpha_1 + M}{M} - \frac{L + \alpha_1}{\alpha_2} z \right] \times \\
 &\quad \left. \times \left[ C_0^2(t, z_1, r) - \frac{1}{r} C_1^1(t, z_1, r) \right] \right\} dt
 \end{aligned}$$

Таблица 3

$N$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$
1, max $ \sigma_r^1 $	3,55 (0;1)	1,67 (0;1)	0,790 (0;1)	0,363 (0; 1)	0,158 (0; 1)
1, max $ \sigma_r^2 $	0,0315 (0,90;0)	0,0513 (1,0;0)	0,0651 (1,3;0)	0,0623 (0;0)	0,0637 (0;0)
2, max $ \sigma_r^1 $	4,64 (0;1)	2,43 (0;1)	1,30 (0;1)	0,737 (0;1)	0,440 (0;1)
2, max $ \sigma_r^2 $	0,0541 (0,90;0)	0,104 (0,93;0)	0,161 (1,2;0)	0,206 (0;0)	0,247 (0;0)

Таблица 4

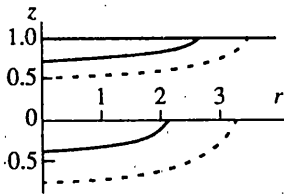
$N$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$
1, max $ \tau_{rz}^1 $	0,953 (0,21;0,92)	0,442 (0,43;0,83)	0,214 (0,85;0,61)	0,0970 (1,8;0,47)	0,0394 (3,8;0,37)
1, max $ \tau_{rz}^2 $	0,0315 (0,55;0)	0,0513 (0,63;0)	0,0651 (0,90;0)	0,0623 (1,7;0)	0,0637 (3,5;-0,30)
2, max $ \tau_{rz}^1 $	1,17 (0,21;0,92)	0,624 (0,43;0,83)	0,325 (0,85;0,68)	0,225 (1,6;0)	0,121 (3,4;0)
2, max $ \tau_{rz}^2 $	0,110 (0,51;0)	0,199 (0,58;0)	0,270 (0,85;0)	0,225 (1,6;0)	0,129 (3,2;-0,50)

Таблица 5

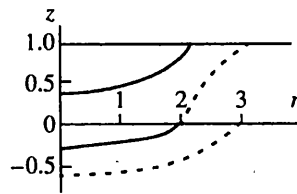
$N$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$
1, max $ \sigma_\varphi^1 $	3,55 (0;1)	1,67 (0;1)	0,790 (0;1)	0,363 (0;1)	0,158 (0;1)
1, max $ \sigma_\varphi^2 $	0,00882 (0;0)	0,00468 (0;-0,10)	0,0250 (0;0)	0,0623 (0;0)	0,0637 (0;0)
2, max $ \sigma_\varphi^1 $	4,64 (0;1)	2,43 (0;1)	1,30 (0;1)	0,737 (0;1)	0,440 (0;1)
2, max $ \sigma_\varphi^2 $	0,0183 (0;0)	0,0196 (0;-0,28)	0,0662 (0;0)	0,206 (0;0)	0,247 (0;0)

Таблица 6

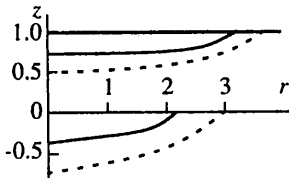
$N$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$
1, max $ \sigma_z^1 $	4,46 (0;1)	1,99 (0;1)	0,827 (0;1)	0,328 (0;1)	0,150 (0;1)
1, max $ \sigma_z^2 $	0,202 (0;0)	0,312 (0;0)	0,348 (0;0)	0,254 (0;0)	0,142 (0;0)
2, max $ \sigma_z^1 $	5,53 (0;1)	3,01 (0;1)	1,77 (0;1)	1,10 (0;1)	0,634 (0;1)
2, max $ \sigma_z^2 $	0,387 (0;0)	0,707 (0;0)	0,988 (0;0)	0,902 (0;0)	0,594 (0;0)



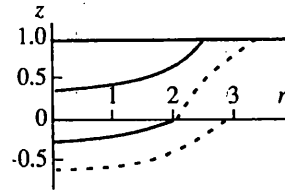
Фиг. 1



Фиг. 2



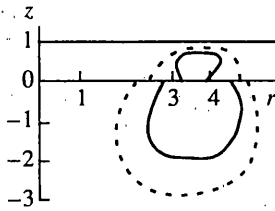
Фиг. 3



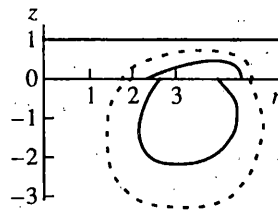
Фиг. 4

$$\begin{aligned}
 (\tau_{rz}^2)_* &= - \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) \left\{ \left[ \frac{\kappa_2 - 1}{2} \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1(M-1)}{2M} - \frac{L-1}{M} \right] C_1^1(t, z_1, r) + \right. \\
 &+ \left. \left[ \frac{\kappa_1 + M}{M} - \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2} z \right] C_1^2(t, z_1, r) \right\} dt \\
 (\sigma_\varphi^2)_* &= \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) \left\{ \frac{3 - \kappa_2}{2} \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2} C_0^1(t, z_1, r) + \frac{1}{r} \left[ \frac{\kappa_1(M-1)}{2M} + \frac{L-1}{M} \right] \times \right. \\
 &\times C_1^0(t, z_1, r) - \frac{1}{r} \left[ \frac{\kappa_1 + M}{M} - \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2} z \right] C_1^1(t, z_1, r) \left. \right\} dt \\
 (\sigma_z^2)_* &= \int_0^{1/\lambda} \varphi(t) \left\{ \left[ \frac{\kappa_2 + 1}{2} \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1(M-1)}{2M} - \frac{L-1}{M} \right] C_0^1(t, z_1, r) + \right. \\
 &+ \left. \left[ \frac{\kappa_1 + M}{M} - \frac{L + \kappa_1}{\kappa_2} z \right] C_0^2(t, z_1, r) \right\} dt
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

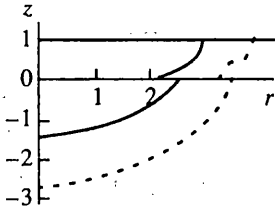
В табл. 3–6 для случаев 1 и 2 упругих пар основания при разных  $\lambda$  даны максимальные значения в слое и полупространстве модулей напряжений  $\sigma_r$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ , ответственных за образование соответственно поперечных трещин, трещин сдвига, растрескивание тела по углу  $\varphi$  и за образование продольных трещин. В скобках указаны координаты точек  $(r, z)$ , где достигаются эти максимумы. Анализ численных данных из табл. 3–6 показывает, что, как правило, максимальные модули напряжений в слое убывают с убыванием  $\lambda$ , сближаясь с максимальными модулями напряжений в полупространстве, которые могут иметь экстремум при определенных значениях  $\lambda$ . Трещины сдвига, обусловленные напряжением  $\tau_{rz}$ , всегда являются кольцевыми, их относительный радиус увеличивается с уменьшением  $\lambda$ . Достижение сразу несколькими модулями компонента тензора напряжений максимума в окрестности точки первоначального контакта упругого тела и штампа  $r = 0, z = 1$  можно связать с известными коническими трещинами, возникающими при вдавлении сферического индентора [12].



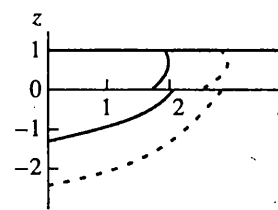
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Изолинии отдельных компонент тензора напряжений в слое и полупространстве при  $\lambda = 1/4$  показаны на фиг. 1–8. Край области контакта соответствует точке  $r = 4$  на линии  $z = 1$ . На сплошных линиях напряжения составляют 80% от соответствующих максимальных (по модулю) значений (отдельно в слое и полупространстве), а на штриховых – 60%. Изолинии для  $\sigma_r$  даны на фиг. 1 (сталь на латуни) и фиг. 2 (латунь на стали), для  $\sigma_\phi$  даны на фиг. 3 (сталь на латуни) и фиг. 4 (латунь на стали), для  $\tau_{rz}$  – на фиг. 5 (сталь на латуни) и фиг. 6 (латунь на стали), для  $\sigma_z$  – на фиг. 7 (сталь на латуни) и фиг. 8 (латунь на стали). Отметим близость изолиний для компонент  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$ . Во всех случаях изолинии концентрируются вокруг точки, где соответствующее напряжение имеет максимум, и дают представление о расположении в теле соответствующих возможных трещин.

Работа выполнена в соответствии с программой грантов ИНТАС–РФФИ (95-IN-RU-492), РФФИ (99-01-00038) и при финансовой поддержке программы "Интеграция".

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потележко В.П., Филиппов А.П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании // Прикл. механика. 1967. Т. 3. № 1. С. 87–91.
2. Suresh S., Giannakopoulos A.E., Alcalá J. Spherical indentation of compositionally graded materials: theory and experiments // Acta Mater. 1997. V. 45. № 4. P. 1307–1321.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. Александрова Г.П. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
5. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.

8. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1988. 256 с.
9. Александров В.М., J.J. Kalker, Пожарский Д.А. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 51–55.
10. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
12. Chen S.Y., Farris T.N., Chandrasekar S. Contact mechanics of hertzian cone cracking // Int. Solids Structures. 1995. V. 32. № 3/4. P. 329–340.

Москва, Дельфт(Нидерланды)

Поступила в редакцию  
21.06.1999