

УДК 539.3

© 2000 г. С.М. АЙЗИКОВИЧ, Л.И. КРЕНЕВ, И.С. ТРУБЧИК

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕДРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В НЕОДНОРОДНОЕ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Рассматривается контактная задача для неоднородного (слоистого или функционально-градиентного) упругого полупространства.

Развит приближенный аналитический метод решения задачи в случае внедрения в неоднородный материал недеформируемого сферического индентора. Предполагается, что модуль сдвига и коэффициент Пуассона изменяются по глубине полупространства произвольным образом. Упругие свойства полупространства стабилизируются с глубиной, т.е. его можно моделировать в виде неоднородного слоя толщины H сцепленного с однородным упругим полупространством.

Задача сводится к решению парного интегрального уравнения. Разработанный метод позволяет построить в аналитической форме приближенное двухсторонне асимптотически точное решение этого уравнения.

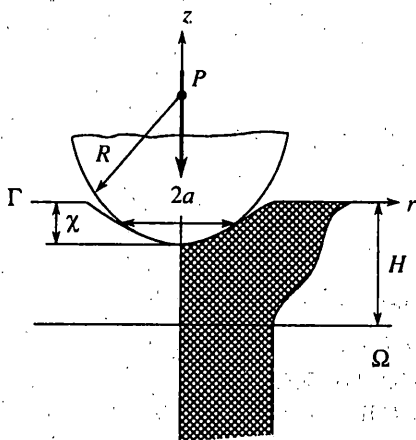
На примерах изучается влияние различных законов изменения по глубине модуля сдвига в полупространстве на распределение контактных напряжений под индентором и размер зоны контакта индентора с основанием в зависимости от значений характерного геометрического параметра задачи и величины вдавливающей силы. Определяются ограничения на величину силы, вдавливающей индентор, для того чтобы значения деформаций неоднородного полупространства не превосходили пределов упругости.

Рассмотрены численные примеры для слоистой и непрерывно-неоднородной модели покрытия однородного полупространства.

2. Введение и постановка задачи. Решение классической задачи Герца для однородного полупространства хорошо известно, см. например, [1]. В [2] постановка классической задачи Герца обобщается и рассматривается случай, когда сферический индентор вдавливается в слой лежащий на недеформируемом основании или на однородном полупространстве имеющем упругие свойства отличные от упругих свойств слоя. Задача сводится к решению интегрального уравнения. Приближенное решение было построено двумя методами: методом работы [3], который эффективен для очень тонких слоев лежащих на жестком основании, когда толщина H слоя меньше половины радиуса контакта $a(\lambda = H/a < 0,5)$, и методом работы [4], который применим в случае когда толщина слоя такова, что $\lambda > 1,7$. Оба этих метода были использованы с некоторыми изменениями в случае когда одно из контактирующих тел представляет собой слой лежащий на упругом полупространстве.

В [5] рассмотрена аналогичная задача. Решение интегрального уравнения было построено численно.

В последнее время появилось много работ, в которых задача о внедрении сферического индентора в обобщенной постановке исследовалась численно [6]–[12] (методом конечных элементов и т.д.). Но из полученных в них решений трудно выявить их функциональные зависимости от параметров, в частности связанных с неоднородностью полупространства.



Фиг. 1

В данной работе рассматривается контактная задача для полупространства, модуль сдвига и коэффициент Пуассона которого изменяются по глубине произвольным образом. Предполагается, что упругие свойства полупространства стабилизируются с глубиной, т.е. его можно моделировать в виде неоднородного слоя толщины H сцепленного с однородным упругим полупространством.

Для непрерывно-неоднородного полупространства, при решении задачи методом интегральных преобразований, трудности возникают уже на первом этапе, при сведении задачи к интегральному уравнению, так как для построения трансформанты ядра интегрального уравнения надо найти решение краевой двухточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для

этого в работе используется эффективный алгоритм метода моделирующих функций [13]. Построенная численно трансформанта ядра интегрального уравнения аппроксимируется аналитическим выражением специального вида, для которого строится замкнутое аналитическое решение приближенного интегрального уравнения. Доказывается, что это решение является приближенным асимптотически точным решением исходного уравнения при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$. (Здесь λ — отношение толщины H неоднородного верхнего слоя, к половине радиуса зоны контакта штампа с основанием.) Анализируется погрешность построенных решений.

Пусть сферический индентор вдавливается в поверхность Γ неоднородного упругого полупространства Ω силой P (фиг. 1). С полупространством связана цилиндрическая система координат (r, φ, z) .

Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом R сферы, описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют. Считаем, что в окрестности начальной точки контакта сферический индентор аппроксимируется жестким параболическим индентором

$$z = \varphi(r) = \beta r^2 \quad (1.1)$$

Аппроксимация обоснована для малого радиуса контакта $a < 0,1R$ для неоднородных тел [10]. Это условие выполняется практически для всех случаев упругого сферического внедрения. Вне индентора поверхность полупространства не нагружена. Под действием силы P индентор перемещается на расстояние χ вдоль оси z .

Считаем, что модуль сдвига $G(z)$ и коэффициент Пуассона $\nu(z)$ неоднородного слоя являются произвольными функциями координаты z :

$$\begin{aligned} G &= G_0(z), \quad \nu = \nu_0(z), \quad -H \leq z \leq 0 \\ G &= G(-H), \quad \nu = \nu_0(H), \quad -\infty \leq z \leq -H \end{aligned} \quad (1.2)$$

При вышеуказанных предположениях, граничные условия имеют вид:

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a \\ w = \chi(r) = \chi - \varphi(r), & r \leq a \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь w — смещение вдоль оси z ; τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$, σ_z — радиальные, тангенциальные и нормальные напряжения.

При $z = -H$ должно выполняться условие сопряжения по напряжениям и перемещениям: $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}$, $\tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}$, $w^{(1)} = w^{(2)}$, $u^{(1)} = u^{(2)}$.

Напряжения и деформации стремятся к нулю при $(r, -z) \rightarrow \infty$. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_z(r, 0) = -q(r), \quad 0 < r \leq a \quad (1.4)$$

размер зоны контакта a , связь между вдавливающей силой P и осадкой штампа χ , а также форму осадки поверхности вне штампа.

Так как края индентора не врезаются в поверхность полупространства, то должно выполняться соотношение

$$q(a) = 0$$

которое используется для определения полуширины зоны контакта и накладывает некоторые ограничения на функцию $q(r)$.

Заметим, также в связи с отсутствием сцепления индентора с поверхностью полупространства, для корректной постановки задачи должно быть выполнено соотношение $q(r) \geq 0$ для всех $r \leq a$.

2. Некоторые свойства парных интегральных уравнений задачи. Используя методы операционного исчисления поставленная задача сводится к решению парного интегрального уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q(\alpha) L(\lambda \alpha) J_0(\alpha r) d\alpha &= \theta(0) f(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha &= 0, \quad r > 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\alpha \rho) \rho d\rho \quad (2.2)$$

$$f(r) = \delta - \varphi(ra)/a, \quad \delta = \chi/a, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, $\psi(ar) = \beta a^2 r^2$, R – радиус сферы внедряемой в полупространство, $\lambda = H/a$ – характерный геометрический параметр задачи, $L(\lambda \alpha)$ – трансформанта ядра парного интегрального уравнения. В общем случае функция $L(\lambda \alpha)$ строится численно, используя метод моделирующих функций, также как в [13]. При выполнении условий

$$\min_{z \in (-\infty; 0]} \theta(z) \geq c > 0, \quad \min_{z \in (-\infty; 0]} \theta(z) \leq c < 0 \quad (2.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \theta(z) = \text{const}, \quad \theta(z) = \frac{G(z)}{1 - v(z)}$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные, может быть показано [13, 14], что трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$L(\alpha) = A + p_1 |\alpha| + o(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

$$L(\alpha) = 1 + p_2 |\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty$$

$$A = \lim_{z \rightarrow -\infty} \theta(0) \theta^{-1}(z) \quad (2.5)$$

Здесь p_1, p_2 – постоянные. Для многослойных материалов свойство функций податливости, подобное (2.5), отмечено в [15].

Определение 2.1. Будем говорить, что функция $L(\alpha)$ принадлежит классу функций $\Pi_N(\Sigma_M, S_{N,M})$, если она имеет вид

$$L(\alpha\lambda) = \begin{cases} \prod_{i=1}^N (\alpha^2 + A_i^2 \lambda^{-2})(\alpha^2 + B_i^2 \lambda^{-2})^{-1} \equiv L_N(\alpha\lambda) \in \Pi_N \\ \prod_{k=1}^M C_k \lambda^{-1} |\alpha| (\alpha^2 + D_k^2 \lambda^{-2})^{-1} \equiv L_M^\Sigma(\alpha\lambda) \in \Sigma_M \\ L_N(\alpha\lambda) + L_M^\Sigma(\alpha\lambda) \in S_{N,M} \end{cases} \quad (2.6)$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$), C_k, D_k ($k = 1, \dots, M$) – некоторые комплексные постоянные, $(A_i - A_k)(B_i - B_k) \neq 0$, при $i \neq k$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. [16] Если функция $L(\alpha)$ обладает свойством (2.4), то она допускает аппроксимацию выражениями вида:

$$L(\alpha\lambda) = L_N(\alpha\lambda) + L_\infty^\Sigma(\alpha\lambda) \quad (2.7)$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $L(\alpha)$, принадлежащей классу X , будем обозначать через X . Используя (2.7), перепишем (2.1) в операторном виде

$$\Pi_{Nq} + \Sigma_\infty q = f \quad (2.8)$$

Определение 2.2. Будем говорить, что для уравнения (2.1) выполнено условие A , если для него при $L(\alpha) \in \Pi_N$ можно построить замкнутое решение, следуя [17]; будем обозначать его

$$q = \Pi_N^{-1} f \quad (2.9)$$

3. Приближенное аналитическое решение парного интегрального уравнения задачи. Используя метод работы [17] для $L(\alpha) \in \Pi_N$ и $\psi(r)$ вида (1.1) получим выражение для распределения контактных нормальных напряжений под индентором в виде

$$q_N^\Pi(r) = \frac{2}{\pi} \left\{ -2\theta(0) \frac{a}{R} L_N^{-1}(0) \sqrt{1-r^2} - \sum_{i=1}^N C_i a_i \int_r^1 \frac{\text{sh}(a_i t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right\} \quad (3.1)$$

Коэффициенты C_i определяются из решения следующей линейной алгебраической системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i \text{sh } a_i + b_i \text{ch } a_i}{b_k^2 - a_i^2} + \\ + L_N^{-1}(0) b_k^{-1} \theta(0) \left[\frac{\chi}{a} + \frac{a}{R} \left[1 + 2(b_k + 1) b_k^{-2} + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} + b_i^{-2}) \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Постоянная χ определяется из условия $q(1) = 0$. Оно имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N C_i \text{ch}(a_i) + L_N^{-1}(0) \theta(0) \left[\frac{\chi}{a} + \frac{a}{R} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} - b_i^{-2}) \right] \right] = 0 \quad (3.3)$$

$$a_i = A_i \lambda^{-1}, \quad b_i = B_i \lambda^{-1}$$

Выражение для вдавливающей силы определяется из условия равновесия штампа

$$P = 2\pi a^2 \int_0^1 q(r) r dr$$

В результате будем иметь

$$P_N^{\Pi} = 4a^2 \left[-\frac{2}{3} \frac{a}{R} L_N^{-1}(0) \theta(0) + \sum_{i=1}^N C_i (-\operatorname{ch} a_i + a_i^{-1} \operatorname{sh} a_i) \right] \quad (3.4)$$

При построении решения задачи в общем случае осесимметричного гладкого штампа используем следующее определение.

Определение 3.1. Абсолютно интегрируемая на отрезке $[0, 1]$ функция $f(r)$ удовлетворяет условию M_0 , если имеет место разложение Дини–Бесселя [18]:

$$f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_0(\mu_j r), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \lambda_n| \leq M_f^0(0, 1) < \infty$$

где $M_f^0(0, 1)$ – некоторая постоянная.

Можно показать, аналогично [16], что здесь условие А выполняется для функций $f(r)$ принадлежащих классу функций M^0 . В этом случае существует функция $q(r) \in C(0, 1)$ такая, что имеет место равенство (2.9) и справедлива оценка:

$$\|q(r)\|_{C(0,1)} \leq m(\Pi_N) M_f^0(0, 1), \quad m(\Pi_N) = \operatorname{const}$$

$C(0, 1)$ – класс функций непрерывных на отрезке $(0, 1)$.

Ниже будем обозначать через $m(X)$ некоторую постоянную, зависящую от конкретного вида принадлежащей X функции.

Уравнение (2.1) было подробно исследовано в [19, 20]. Используя методику [19, 20] нетрудно показать, что в общем случае, когда функция $L(\alpha)$ обладает свойствами (2.4), т.е. принадлежит классу $S_{N,M}$, решение вида (2.9) является асимптотически точным решением уравнения (2.1) при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ (т.к. в этом случае оператор $\Pi_N^{-1} \Sigma_{\infty}$ уравнения (2.8) является оператором сжатия [21]). Кроме того погрешность приближенного решения не превосходит погрешности аппроксимации функций $L(\alpha)$ функциями класса Π_N .

4. Численные результаты. Численный анализ проведем для реального покрытия, когда неоднородность материала обусловлена различными сочетаниями в покрытии Ni и Cu, при этом: $E_{\max} = E_{\text{Ni}} = 735\,000 \text{ Н/мм}^2$, $E_{\min} = E_{\text{Cu}} = 210\,000 \text{ Н/мм}^2$.

Введем параметр $k = \max_{z \in (0, -H)} E(z) / \min_{z \in (0, -H)} E(z)$. В данном случае $k \approx 3,5$.

При всех возможных законах неоднородности величина n_c : отношения модуля упругости на поверхности покрытия к модулю упругости в любой внутренней точке заключена в пределах $1/3,5 < n_c < 3,5$. Анализ проведем на типичных примерах слоистых и непрерывно-неоднородных покрытий.

Для этих моделей предполагаем коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$, а модуль Юнга в неоднородном покрытии изменяется по глубине в соответствии со следующими соотношениями:

$$E(z) = \begin{cases} E_c^i = E_0 f_i(z), & -H \leq z \leq 0 \\ E_0, & z < H \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.1)$$

Рассмотрим следующие виды неоднородности:

$$E_c^1 = 3,5 E_0, \quad E_c^2 = \frac{1}{3,5} E_0, \quad E_c^3 = 3,5 E_0 + 2,5 E_0 z / H, \quad E_c^4 = \frac{1}{3,5} E_0 + \frac{2,5}{3,5} E_0 z / H \quad (4.2)$$

На фиг. 2, а–д даны графики трансформант ядер $L(u)$ (кривая 1) интегральных уравнений, построенных численно для соответствующих законов неоднородности. Кри-

вая 2 на этих графиках соответствует погрешности аппроксимации трансформанты ядра $L(u)$ выражениями вида (2.6) для $N = 10$.

Заметим, что в соответствии с [14] для слоистого покрытия характерно экспоненциальное убывание трансформанты ядра при $u \rightarrow \infty$:

$$L(u) = 1 + \frac{1}{2} e^{-2|u|h_1} + o(e^{-2|u|h_1})$$

где h_1 толщина верхнего слоя. Но в тоже время для непрерывно-неоднородного покрытия характерно следующее поведение при $u \rightarrow \infty$:

$$L(u) = 1 + C_1 |u|^{-1} + C_2 u^{-2} + O(|u|^{-3})$$

где C_1, C_2 некоторые постоянные. Следовательно трансформанта ядра для слоистого покрытия (когда $u \rightarrow \infty$) стремится к 1 более быстро, чем в случае непрерывно-неоднородного покрытия.

Для законов неоднородности имеющих одинаковое значение модуля Юнга при $z = 0$ и $z = -H$ ошибка аппроксимации трансформанты ядра выражением вида (2.6) для двухслойного основания меньше, чем для линейного закона неоднородности при одинаковых значениях параметра N .

5. Определение формы осадки поверхности неоднородного полупространства при внедрении в него сферического индентора. Так как решение парного интегрального уравнения (2.1) для $L(\alpha)$ класса Π_N имеет аналитический вид (3.1), найдем выражение для $f(r)$ при $r \geq 1$ и $L(\alpha) \in \Pi_N$, $\psi(r)$ вида (1.1). Из (2.1), используя (3.1), преобразуя, получим следующее выражение:

$$f_N^\Pi(r) = \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{a}{R} \left(r^2 \arcsin \frac{1}{r} - \sqrt{r^2 - 1} \right) + \frac{\chi}{a} \arcsin \frac{1}{r} - \sum_{k=1}^N D_k b_k I_k(r) \left(\sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i \operatorname{sh} a_i}{b_k^2 - a_i^2} - \frac{2aL_N^{-1}(0)}{Rb_k^2} \right) \right\}, \quad r > 1 \quad (5.1)$$

$$I_k(r) = \int_1^r \frac{e^{-b_k(t-1)}}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, \quad D_k = \left(\frac{a_k^2}{b_k^2} - 1 \right) \prod_{i=1, k}^N \frac{a_i^2 - b_k^2}{b_i^2 - b_k^2}$$

где значок $\prod_{i=1, k}^N$ означает отсутствие в произведении k -го множителя. (Под штампом при $r < 1$, $f(r) = \chi/a - ar^2/R$.)

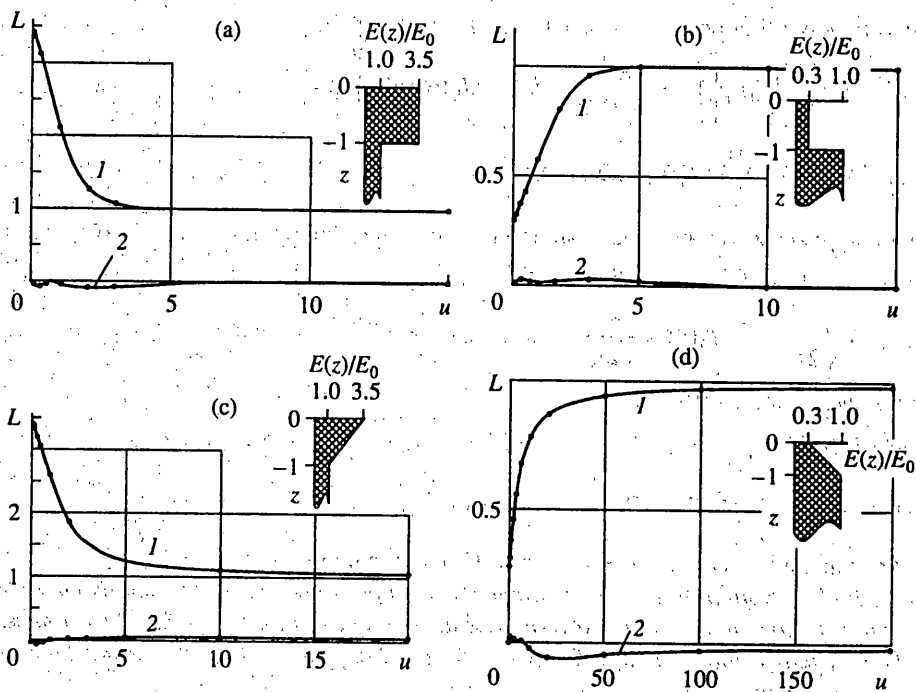
Возникает вопрос об использовании формулы (5.1) для определения формы осадки поверхности неоднородного полупространства в общем случае, т.е. когда трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает свойствами (2.4), функция $L(\alpha)$ принадлежит классу функций $S_{N,M}$, $f(r)$ удовлетворяет условию M_0 , при $r \in (0, 1)$.

Согласно теоремы 2.2 [19] и теоремы 1.2 [20] выражение (3.1) является асимптотически точным решением уравнения (2.1) для $L(\alpha) \in S_{N,M}$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

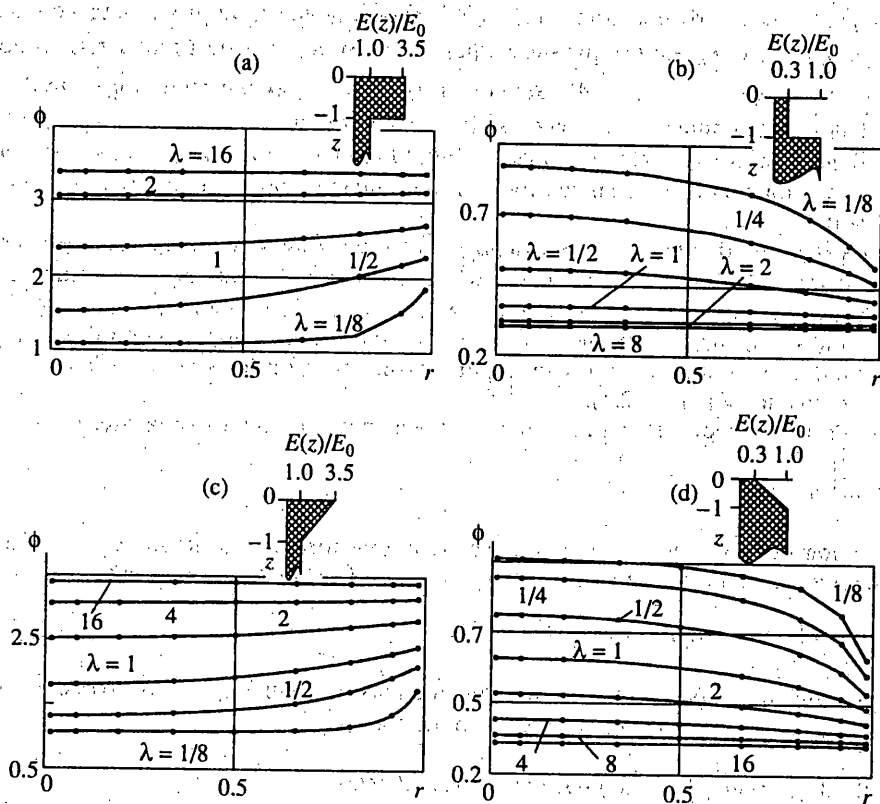
Подставив это асимптотическое решение $q_N^\Pi(r)$ в (2.1), для $L(\alpha) \in S_{N,M}$ найдем приближенное выражение для осадки поверхности неоднородного полупространства вне штампа $f_{N,M}^S(r)$ в общем случае

$$f_{N,M}^S(r) = (\Pi_N + \Sigma_M) q_N^\Pi(r), \quad r > 1 \quad (5.2)$$

Задача заключается в том, чтобы определить будут ли асимптотические свойства сохраняться относительно определяемой приближенным способом правой части интегрального уравнения вне отрезка $(0, 1)$, для функций $f(r)$ удовлетворяющих условию M^0 .



Фиг. 2



Фиг. 3

Не нарушая общности, считаем $M = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned}\Sigma_1 q_N^{\Pi}(r) &= \int_0^{\infty} q_N^{\Pi}(\rho) \rho \left[\int_0^{\infty} \frac{C \lambda^{-1} \alpha}{\alpha^2 + D^2 \lambda^{-2}} J_0(\alpha r) J_0(\alpha \rho) d\alpha \right] d\rho = \\ &= C \lambda^{-1} K_0(r D \lambda^{-1}) \int_0^1 q_N^{\Pi}(\rho) I_0(\rho D \lambda^{-1}) \rho d\rho, \quad r > 1\end{aligned}$$

Используя асимптотические свойства цилиндрических функций мнимого аргумента

$$K_0(z) \sim -\ln z, \quad I_0(z) \sim 1 \quad \text{при } z \rightarrow 0$$

$$K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

получим следующие оценки:

$$\max_{r>1} |\Sigma_1(q_N^{\Pi}(r))| \leq M^* e^{-D\lambda^{-1}\delta}, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (\lambda < \lambda^*), \quad \delta = r - \rho > 0$$

$$\max_{r>1} |\Sigma_1(q_N^{\Pi}(r))| \leq M^0 \lambda^{-1+\varepsilon}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (\lambda > \lambda^0), \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ . Отсюда следует теорема.

Теорема 5.1. Выражение (5.1) является асимптотически точным представлением осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства для $L(\alpha)$ класса $S_{N,M}$ при выполнении условия M^0 при $0 < \lambda < \lambda^$ и при $\lambda > \lambda^0$, где λ^* и λ^0 — некоторые фиксированные значения λ .*

6. Численные результаты. На фиг. 3, *a-d* даны графики отношений $\Phi_i(r) = q_i(r) q_0^{-1}(r)$, которые характеризуют распределение нормальных контактных давлений $q_i(r)$ под недеформируемым сферическим индентором для законов неоднородности вида $E_c^i(z)$ ($i = 1, \dots, 4$). Значения $q_i(r)$ были найдены по формуле (3.1) при $N = 10$. Цифры на кривых указывают значения величины λ .

Фиг. 4 показывает графики отношений $P_i(w)/P_0(w)$, которые характеризуют влияние законов неоднородности на зависимость осадки индентора от величины приложенной к нему силы.

7. Апостериорная оценка точности двусторонне асимптотического метода решения интегрального уравнения. Численное исследование зависимости погрешности от λ . Выше было показано, что задача определения распределения контактных давлений, возникающих при внедрении сферического индентора в неоднородный по глубине слой, сцепленный с однородным полупространством, сводится к решению парного интегрального уравнения вида (2.1).

Причем имеет место дополнительное условие равновесия штампа, т.е.

$$P = 2\pi \int_0^1 q(\rho) \rho d\rho$$

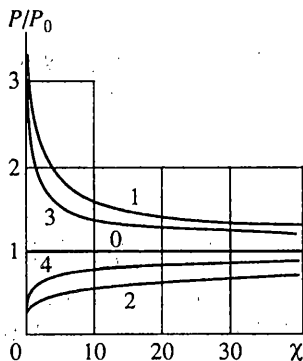
При построении приближенного двусторонне асимптотического точного решения поставленной задачи мы заменили ядро уравнения (2.1) $L(\alpha)$ его аппроксимацией вида

$$L_n(\lambda\alpha) = \prod_{i=1}^N (\alpha^2 + A_i^2 \lambda^{-2})(\alpha^2 + B_i^2 \lambda^{-2})^{-1} \quad (7.1)$$

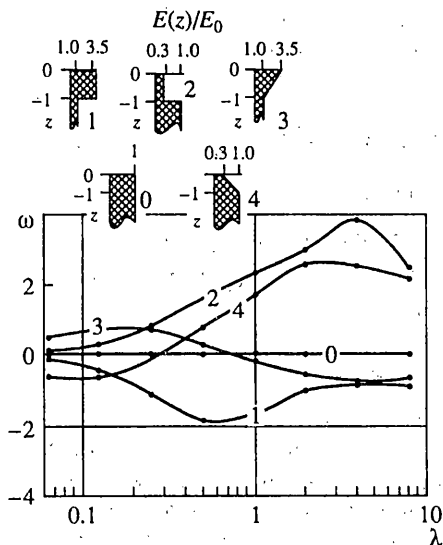
После определения распределения контактных давлений $q_n(\rho)$ под штампом можно найти интегральную характеристику для ошибки

$$\varepsilon_n(r) = \int_0^1 q_n(\rho) \rho d\rho \left(\int_0^{\infty} (L(\lambda\alpha) - L_n(\lambda\alpha)) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \rho) d\alpha \right) \quad (7.2)$$

получающейся в результате замены точной трансформанты ядра приближенной.



Фиг. 4



Фиг. 5

Функция $f(r)$, стоящая в правой части (2.1), соответствует значениям осадки поверхности неоднородного полупространства под сферическим индентором и, таким образом, физически значение невязки соответствует относительной погрешности в задании формы штампа.

Подинтегральное выражение в (7.2) отлично от нуля в ограниченной области, поэтому можем легко найти $\epsilon_n(r)$ с помощью квадратурных формул (например, Гаусса). На фиг. 5 показаны интегральные значения погрешности $\omega(\lambda)$ [%] при определении смещения индентора

$$\omega(\lambda) = \int_0^1 \epsilon(r, \lambda) dr$$

Фиг. 5 подтверждается численным экспериментом теоретически определенные двустороннеасимптотические ($\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$) свойства решения.

8. Определение диапазона изменения величины силы вдавливающей сферический индентор в неоднородный материал при проведении неразрушающих испытаний тонких неоднородных покрытий. Пусть целью эксперимента является контроль характера неоднородности слоя, сцепленного с однородным упругим полупространством, по зависимости сила – перемещение при внедрении жесткого сферического индентора.

Для того, чтобы эксперимент был неразрушающим при внедрении штампа в материал напряжения не должны превышать пределов упругости. Так как данные рассуждения необходимы только для оценки порядка исследуемых величин достаточно ограничиться однородным случаем. Можно записать следующие соотношения, известные в классической задаче Герца для сферы и полупространства [1]

$$E = 3P/(4a\chi) \quad (8.1)$$

$$R = a^2 / \chi \quad (8.2)$$

Максимальное контактное напряжение при внедрении сферы в полупространство имеет значение

$$\sigma^* = 3P/(2\pi a^2) \quad (8.3)$$

Используя (8.1)–(8.3) получим

$$\sigma^* = 2E\chi/(\pi a) = 2Ea/(\pi R) \quad (8.4)$$

По результатам анализа многочисленных экспериментов принято, что предел упругости связан с твердостью по Бринеллю: $\sigma^* = 0,383H_b$. Введем обозначение

$$k^* = 0,383H_b/E. \quad (8.5)$$

Тогда получим $\sigma^* = k^*E$, а из (8.4) следует, что

$$k^* = 2a/(\pi R) \quad (8.6)$$

Таким образом значение радиуса кривизны штампа и перемещение связаны с зоной контакта a следующим образом:

$$R = 2a/\pi k^*, \quad (8.7)$$

$$\chi = a^2/R = \pi k^* a/2$$

Исследование характера неоднородности слоя накладывает определенные ограничения на размеры зоны контакта, а именно: от $a \approx 1/4H$ до $a \approx 4H$, где H – толщина слоя. Пусть стоит задача испытания покрытий, толщиной от 5 до 100 мкм (микрон), причем с твердостью по Бринеллю 300–600 Мпа, и упругим модулем подстилающего материала 210 000 Мпа. В этом случае $k^* \approx 2/3000$; отсюда следует

$$R = (2/\chi)ak^* \approx 1000a \approx \chi \times 10^6 \quad (8.8)$$

$$\chi = a^2/R \approx a/1000, \quad R = 1\,000\,000\chi \quad (8.9)$$

Таким образом, R должно быть заключено в пределах от $R_5 \approx 5/4$ мм до $R_{100} \approx 400$ мм, а χ соответственно от $\chi_5 \approx 5/4$ нм до $\chi_{100} \approx 400$ нм.

Так как $P = 2/3\sigma^*\pi a^2$, то диапазон изменения нагрузки заключен между $P_5 \approx 0,005H$ и $P_{100} \approx 2H$.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS-93-3513 и гранта РФФИ–ИНТАС 95-IN-RU-492.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонсон Л. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
2. El-Sherbiny, M.G.D., Halling, J. The Hertzian contact of surfaces covered with metallic films // Wear. 1976. V. 40, № 3. P. 325–337.
3. Попов Г.Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 152–164.
4. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 445–455.
5. Потележко В.П., Филипов А.П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании // Прикл. механика. 1967. Т. 3. Вып. 1. С. 87–91.
6. Moumitounet P., Edlinger M.L., Felder E. Finite element analysis of elastoplastic indentation: Pt I. Homogeneous media; Pt II. – Application to hard coatings // Trans. ASME. J. Tribology. 1993. V. 115. No. 1. P. 10–19.
7. Kral E.R., Komvopoulos K., Bogy D.B. Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1993. V. 60. No. 4. P. 829–841.
8. Kral E.R., Komvopoulos K., Bogy D.B. Finite element analysis of repeated indentation of an elastic-plastic layered medium by a rigid sphere. Pt I. Surface results. Pt II. Subsurface results // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. No. 1. P. 20–42.
9. Yingzhi K.Li., Hills D.A. The Hertzian cone crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58. No. 1. P. 120–127.
10. Suresh S., Giannakopoulos A.E., Alcalá J. Spherical indentation of compositionally graded materials: Theory and experiments // Acta metall. Mater. 1997. V. 45. No. 4. P. 1307–1321.
11. Giannakopoulos A.E., Suresh S. Indentation of solids with gradients in elastic properties: Pt I. Point force. Pt II. Axisymmetric indentors // Intern. J. Solids and Structures. 1997. V. 34. No. 19. P. 2357–2428.

12. Zeng K., Breder K., Rowcliffe D.J. The Hertzian stress field and formation of come cracks: I. Theoretical approach. II. Determination of fracture toughness // *Acta metall. mater.* 1992. V. 10. P. 2595–2605.
13. Айзикович С.М., Александров В.М. Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое неоднородное по глубине полупространство // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 2. С. 73–82.
14. Айзикович С.М., Александров В.М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 266. № 1. С. 40–43.
15. Приварников А.К. Пространственная деформация многослойного основания // *Устойчивость и прочность элементов конструкций.* Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27–45.
16. Айзикович С.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // *ПММ.* 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
17. Александров В.М. О решении одного класса парных уравнений // *Докл. АН СССР.* 1973. Т. 210. № 1. С. 55–58.
18. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
19. Айзикович С.М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при малых значениях параметра // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 313. № 1. С. 48–52.
20. Айзикович С.М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при больших значениях параметра // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 319. № 5. С. 1037–1041.
21. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
22. Kuznetsov Ye.A. Plane contact problem for a half-space with a Poisson's ratio that varies with depth // *Wear.* 1983. V. 92. No. 2. P. 171–196.
23. Айзикович С.М., Александров В.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости неоднородных по глубине // *Изв. АН Арм ССР. Механика.* 1986. Т. 39. № 3. С. 13–28.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
18.03.1998