МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. И.В. АНДРИАНОВ, В.В. ДАНИШЕВСКИЙ, Г.А. СТАРУШЕНКО, С. ТОКАЖЕВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ВОЛОКНИСТЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ РОМБОВИДНОЙ ФОРМЫ

Определяются эффективные характеристики двухфазного периодически микронеоднородного волокнистого композитного материала в случае больших размеров включений. Для этого используется метод осреднения с последующим применением ряда асимптотических упрощений. Предлагаемый подход иллюстрируется на примере определения эффективного коэффициента теплопроводности композита, состоящего из непрерывной матрицы и периодически расположенных в ней волокон ромбовидного сечения, составляющих простую квадратную решетку. Полностью исследована вся область изменения определяющих систему параметров и получены асимптотические выражения, включающие как частные случаи все возможные асимптотики искомого эффективного коэффициента и описывают решение задачи как в случае несоприкасающихся включений, так и при наличии контакта между последними.

1. Рассматривается двухфазный микронеоднородный материал, состоящий из непрерывной матрицы и периодически расположенных в ней включений – волокон. Определяется эффективный коэффициент теплопроводности, однако все последующие рассуждения остаются справедливыми и в случае иных физических трактовок задачи, когда искомыми являются электропроводность, диоэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и другие свойства композитного материала [1].

Отметим, что случаю волокнистых включений кругового поперечного сечения посвящена обширная литература [2–10], и в целом вопрос определения эффективных характеристик может считаться решенным для включений любых размеров и характеристик. Значительно меньшее количество работ посвящено включениям, имеющим угловые точки [11–14]. При малой концентрации таких включений можно использовать известные методы [2, 8–10].

Когда размеры включений велики и последние стремятся к контакту, решение задачи далеко не тривиально. В зависимости от соотношения определяющих систему параметров – концентрации включений и характеристик составных фаз композита, – имеют место различные асимптотики искомого эффективного коэффициента.

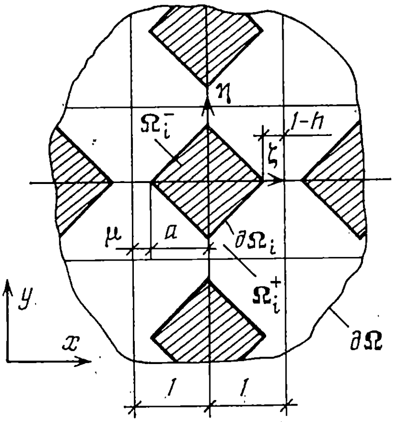
В настоящей работе рассмотрены ромбовидные включения больших размеров, причем исследуются три различные задачи.

1. Ромбовидные включения больших размеров, стремящиеся к контакту, но не достигающие его.

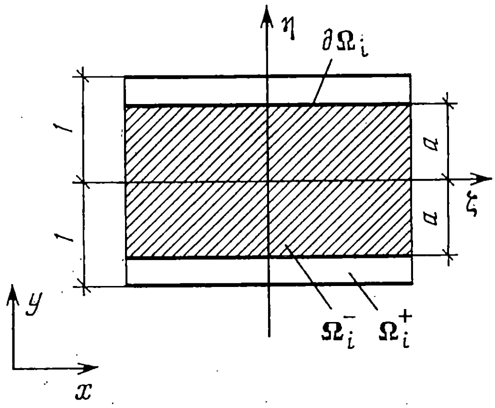
2. Включения восьмиугольной формы.

3. Случай контакта между включениями ромбовидной формы.

При наличии точки контакта между включениями в рассматриваемом случае, на первый взгляд, приходим к композитной структуре в равнопредставленными фазами [15], и, таким образом, можем использовать формулу Дыхне [16], в соответствии с которой эффективная проводимость композитного материала является средним гео-



Фиг. 1



Фиг. 2

метрическим из проводимостей фаз (что делают некоторые авторы [11]). Детальный анализ, однако, показывает, что ситуация здесь более сложная, и само понятие равнопредставленности фаз нуждается в точном определении.

На примере рассматриваемой композитной структуры проведен анализ трех возможных предельных форм композита с контактирующими включениями, проведено сравнение полученных результатов с известным решением Дыхне [16], определены границы применимости полученных выражений и формулы Дыхне.

2. Определяется эффективный коэффициент теплопроводности двухфазного композитного материала, состоящего из непрерывной матрицы и периодически расположенных в ней волокон ромбовидного сечения, составляющих простую квадратную решетку (фиг. 1). Определяющие соотношения могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U^+}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^2}=F^+, \quad \lambda\left(\frac{\partial^2 U^-}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^-}{\partial y^2}\right)=F^- \tag{2.1}$$

$$U^+=U^-\Big|_{\partial\Omega_i}, \quad \frac{\partial U^+}{\partial \mathbf{n}}=\lambda\frac{\partial U^-}{\partial \mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega_i}, \quad U=0\big|_{\partial\Omega} \tag{2.2}$$

где U – функция распределения температуры (U^+, U^- – соответственно в матрице и включении), F – плотность тепловых источников (F^+, F^- – соответственно в матрице и включении), $\lambda=\lambda_b/\lambda_m$ – отношение проводимости включений λ_b к проводимости матрицы λ_m, $\partial/\partial\mathbf{n}$ – производная по внешней нормали к границе раздела фаз $\partial\Omega_i$, $\partial\Omega$ – внешний контур композитного материала.

Рассмотрим ячейку периодичности структуры с характерным размером 2ε ($\varepsilon \ll 1$) (фиг. 1). Пусть оси координатной системы x, y параллельны сторонам ячейки периодичности; введем в ячейке локальную систему координат при помощи метода двух масштабов [17]: $\zeta = x/\varepsilon$, $\eta = y/\varepsilon$, т.е. вместо исходных переменных x, y вводим "быстрые" ζ, η и "медленные" (x, y) переменные. Тогда соответствующие производные перепишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}=\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta, \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial\eta}\cos\beta$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы внешней нормали к границе раздела фаз $\partial\Omega_i$, записанные в быстрых переменных.

Решение исходной задачи будем искать в виде асимптотического разложения

$$U = U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) + \varepsilon^2 U_2(x, y) + \ldots \tag{2.3}$$

причем функции U_i ($i = 1, 2, 3\ldots$) удовлетворяют условиям периодичности

$$U_i(x, y, \zeta+2, \eta+2) = U_i(x, y, \zeta, \eta) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) в исходную краевую задачу (2.1), (2.2), после расщепления по ε приходим к следующей рекуррентной системе уравнений:

$$\partial^2 U_1^{\pm} / \partial\zeta^2 + \partial^2 U_1^{\pm} / \partial\eta^2 = 0 \tag{2.5}$$

$$U_1^+ = U_1^-\Big|_{\partial\Omega_i}, \quad \left.\frac{\partial U_1^+}{\partial \mathbf{k}} - \lambda\frac{\partial U_1^-}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{n}}(\lambda - 1)\right|_{\partial\Omega_i} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial^2 U_1^+}{\partial x\partial\zeta} + \frac{\partial^2 U_2^+}{\partial y\partial\eta}\right) + \frac{\partial^2 U_2^+}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^+}{\partial\eta^2} = F^+ \tag{2.7}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial^2 U_1^-}{\partial x\partial\zeta} + \frac{\partial^2 U_1^-}{\partial y\partial\eta}\right) + \frac{\partial^2 U_2^-}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^-}{\partial\eta^2}\right) = F^-$$

$$U_2^+ = U_2^-\Big|_{\partial\Omega_i}, \quad \left.\frac{\partial U_1^+}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial U_2^+}{\partial \mathbf{k}} = \lambda\frac{\partial U_1^-}{\partial \mathbf{n}} + \lambda\frac{\partial U_2^-}{\partial \mathbf{k}}\right|_{\partial\Omega_i} \tag{2.8}$$

Рассмотрим уравнения системы (2.5) с соответствующими условиями сопряжения (2.6). В силу периодичности функции U_1 по быстрым переменным ζ, η эта задача рассматривается на периоде $\zeta \in [-1, 1]$; $\eta \in [-1, 1]$. Для больших размеров круглых волокнистых включений эффективные асимптотические решения были получены на основе "метода смазки" [2–7]. Далее применяем аналогичный подход, дополнив его методом возмущения формы границы [18]. Рассмотрим ячейку периодичности (фиг. 1) и обозначим величину зазора между включениями через $2(1 - h)$. Тогда условия (2.6) запишутся в виде:

$$U_1^+ = U_1^-\Big|_{\eta=\pm h}, \quad \left.\frac{\partial U_1^+}{\partial \mathbf{k}} - \lambda\frac{\partial U_1^-}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{n}}(\lambda - 1)\right|_{\eta=\pm h} \tag{2.9}$$

Введем искусственный малый параметр δ следующим образом: $h = a - \delta|\zeta|$, и будем искать решение в виде разложения по степеням δ: $U_1 = U_1^{(0)} + \delta U_1^{(1)} + \delta^2 U_1^{(2)} + \ldots$

Если ограничиться нулевым приближением, то физический смысл сделанного упрощения заключается в замене исходной краевой задачи с границами, изображенными на фиг. 1, более простой задачей, приведенной на фиг. 2.

Условия сопряжения (2.9) принимают следующий вид:

$$U_1^+ = U_1^-\Big|_{\eta=\pm h}, \quad \left.\frac{\partial U_1^+}{\partial \eta} - \lambda\frac{\partial U_1^-}{\partial \eta} = \frac{\partial U_0}{\partial y}(\lambda - 1)\right|_{\eta=\pm h} \tag{2.10}$$

Далее, рассмотрим область, занимаемую матрицей Ω_i^+ (фиг. 2). Поскольку размер включений велик ($a \to 1$), введем новый малый параметр $\mu = 1 - a \to 0$. Введем переменные с $\zeta_1 = \zeta/\mu$, $\eta_1 = 0{,}5\eta$, изменяющиеся в пределах $\zeta_1 \in [-0{,}5; 0{,}5]$, $\eta_1 \in [-0{,}5; 0{,}5]$.

Тогда уравнение запишется следующим образом:

$$\mu^2\partial^2 U_1^+ / \partial\zeta_1^2 + 4\partial^2 U_1^+ / \partial\eta_1^2 = 0 \tag{2.11}$$

$$\partial^2 U_1^- / \partial\zeta^2 + \partial^2 U_1^- / \partial\eta^2 = 0 \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.11) ищем в виде асимптотического разложения по степеням параметра μ: $U_1 = U_1^{(0)} + \mu U_1^{(1)} + \mu^2 U_1^{(2)} + \ldots$ Ограничиваясь нулевым приближением и переходя к исходным переменным, можно записать краевую задачу (1.11), (1.12), (1.10) в виде:

$$\partial^2 U_1^+ / \partial\eta^2 = 0 \tag{2.13}$$

$$\partial^2 U_1^- / \partial\zeta^2 + \partial^2 U_1^- / \partial\eta^2 = 0 \tag{2.14}$$

$$U_1^+ = U_1^-\Big|_{\eta=\pm h}, \qquad \frac{\partial U_1^+}{\partial\eta} - \lambda\frac{\partial U_1^-}{\partial\eta} = \frac{\partial U_0}{\partial y}(\lambda - 1)\Bigg|_{\eta=\pm h} \tag{2.15}$$

Теперь для постановки задачи на ячейке остается добавить к ней условия симметрии

$$U_1^-\Big|_{\eta=0} = 0 \tag{2.16}$$

и периодичности (2.6):

$$U_1^+\Big|_{\eta=\pm h} = 0 \tag{2.17}$$

Решая краевую задачу (2.13) – (2.17) с учетом симметрии исходной модели и полагая затем $\delta = 1$, можем записать выражения для U_1 следующим образом:

$$U_1^- = \frac{\partial U_0}{\partial y}(\lambda-1)\frac{\eta h - \eta}{h+\lambda-\lambda h} = \frac{\partial U_0}{\partial x}(\lambda-1)\frac{\zeta h - \zeta}{h+\lambda-\lambda h}$$

$$U_1^+ = \frac{\partial U_0}{\partial y}(\lambda-1)\frac{\eta h + h}{h+\lambda-\lambda h} = \frac{\partial U_0}{\partial x}(\lambda-1)\frac{\eta h + h}{h+\lambda-\lambda h} \quad \text{при } \eta, \zeta < 0$$

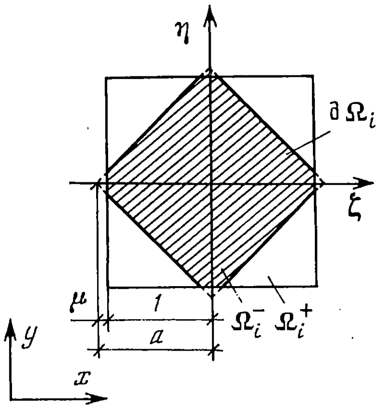
$$U_1^+ = \frac{\partial U_0}{\partial y}(\lambda-1)\frac{\eta h - h}{h+\lambda-\lambda h} = \frac{\partial U_0}{\partial x}(\lambda-1)\frac{\eta h - h}{h+\lambda-\lambda h} \quad \text{при } \eta, \zeta \geqslant 0$$

$$h = a - |\zeta| = a - |\eta|$$

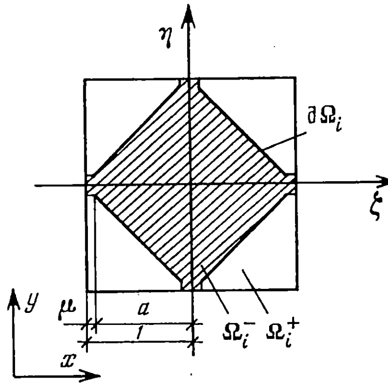
Рассмотрим теперь краевую задачу (2.9), (2.10). Для выделения из нее медленных составляющих естественно применить осреднение. В результате имеем

$$\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}\right)(\operatorname{mes}\Omega_i^+ + \lambda \operatorname{mes}\Omega_i^-) + 2\iint\limits_{\Omega_i^+}\left(\frac{\partial^2 U_1^+}{\partial x\partial\zeta} + \frac{\partial^2 U_1^+}{\partial y\partial\eta}\right)d\zeta d\eta +$$
$$+\iint\limits_{\Omega_i^+}\left(\frac{\partial^2 U_2^+}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^+}{\partial\eta}\right)d\zeta d\eta + 2\lambda\iint\limits_{\Omega_i^-}\left(\frac{\partial^2 U_1^-}{\partial x\partial\zeta} + \frac{\partial^2 U_1^-}{\partial y\partial\eta}\right)d\zeta d\eta +$$
$$+\lambda\iint\limits_{\Omega_i^-}\left(\frac{\partial^2 U_2^-}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^-}{\partial\eta^2}\right)d\zeta d\eta = \operatorname{mes}\Omega_i F \tag{2.18}$$

Для исключения из полученного осредненного уравнения (2.18) членов, содер-



Фиг. 3



Фиг. 4

жащих функции U_2, воспользуемся формулой Грина. В итоге имеем:

$$q(\partial^2 U_0 / \partial x^2 + \partial^2 U_0 / \partial y^2) = F$$

$$q = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_i}\left[\lambda(\lambda-1)\iint\limits_{\Omega_i^-}\frac{h-1}{\lambda+h-\lambda h}d\zeta d\eta + \lambda \operatorname{mes}\Omega_i^- + \right.$$

$$\left. +(\lambda-1)\iint\limits_{\Omega_i^+}\frac{h}{\lambda+h-\lambda h}d\zeta d\eta + \operatorname{mes}\Omega_i^+\right] \tag{2.19}$$

Будем сначала считать, что объем включений велик и они стремятся к контакту, тогда получаем следующее асимптотическое выражение для искомого эффективного коэффициента:

$$q = \mu + \frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\left(\frac{\lambda}{1-\mu+\lambda\mu}\right) \quad \text{при} \quad \mu \to 0 \tag{2.20}$$

Данная задача может рассматриваться как приближение к точке контакта изнутри ($a \to 1-0$), при этом пока ничего нельзя сказать о возможности использования полученной асимптотики (2.20) при наличии контакта между включениями.

Для приближения к точке контакта с другой стороны (снаружи – ($a \to 1 + 0$) рассмотрим включения восьмиугольной формы (эта задача представляет и самостоятельный интерес).

Ячейка периодичности для этого случая изображена на фиг. 3; величина h определяется зависимостью вида

$$h = \begin{cases} a - |\zeta| = a - |\zeta|, & \mu \leqslant |\zeta|,\ |\eta| \leqslant 1 \\ 1, & 0 \leqslant |\zeta|,\ |\eta| < \mu \end{cases}$$

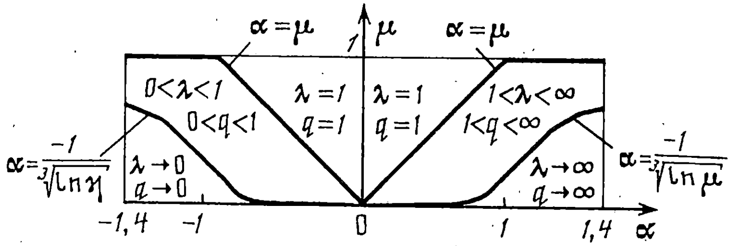
Согласно формуле (2.19), эффективный коэффициент таков

$$q = \lambda\mu + \frac{\lambda}{\lambda-1}\ln(\lambda+\mu-\lambda\mu) \tag{2.21}$$

Так же, как и в предыдущем случае, нельзя говорить о пригодности полученного выражения (2.21) для описания эффективного коэффициента в самой точке контакта.

Теперь перейдем к точечному контакту между включениями. Для этого аппроксимируем ромбовидную форму включения областью, изображенной на фиг. 4.

N	$\lambda \cong \mu^{-\alpha}$	λ	$a \to 1{-}0$	$a = 1$	$a \to 1+0$
1	$-\infty < \alpha < 0$	$\lambda \to 0$	$q = \mu - \lambda \ln \lambda \to 0$	$q = -\lambda \ln\,(\lambda + \mu) \to 0$	$q = -\lambda \ln\,(\lambda + \mu) \to 0$
2	$\alpha \to 0{-}0$	$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$	–	–	–
2.1	$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln \mu}}$	$\lambda \to 0$	$q = -\lambda \ln \lambda \to 0$	$q = -\lambda \ln \lambda \to 0$	$q = -\lambda \ln \lambda \to 0$
2.2	$\alpha = \dfrac{1}{\ln \mu}$	$\lambda = \dfrac{1}{e}$	$q = \dfrac{1}{e-1}$	$q = \dfrac{1}{e-1}$	$q = \dfrac{1}{e-1}$
2.3	$\alpha = -\mu$	$\lambda = 1$	$q = 1$	$q = 1$	$q = 1$
3	$\alpha \to 0+0$	$1 \leqslant \lambda < \infty$	–	–	–
3.1	$\alpha = \mu$	$\lambda = 1$	$q = 1$	$q = 1$	$q = 1$
3.2	$\alpha = -\dfrac{1}{\ln \mu}$	$\lambda = e$	$q = \dfrac{e}{e-1}$	$q = \dfrac{e}{e-1}$	$q = \dfrac{e}{e-1}$
3.3	$\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln \mu}}$	$\lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$
4	$0 < \alpha < 1$	$\lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \ln \dfrac{\lambda}{1 + \lambda\mu} \to \infty$	$q = \ln \dfrac{\lambda}{1 + \lambda\mu} \to \infty$
5	$\alpha = 1$	$\lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \ln \dfrac{\lambda}{2} \to \infty$	$q = \ln \dfrac{\lambda}{2} \to \infty$
6	$\alpha = 1 + \sigma \to 1 + 0$	$\lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \lambda^{\sigma} + \ln \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^{\sigma}} \to \infty$	$q = \lambda^{\sigma} + \ln \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^{\sigma}} \to \infty$
	$\sigma = \dfrac{\ln(\ln(2\mu)^{-1})}{\ln \mu} \to 0+0$	$\lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \lambda^{\sigma} + \ln \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^{\sigma}} \to \infty$	$q = \lambda^{\sigma} + \ln \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^{\sigma}} \to \infty$
7	$1 < \alpha < \infty$	$\lambda \to \infty$	$q = \ln \lambda \to \infty$	$q = \lambda^{1-1/\alpha} \to \infty$	$q = \lambda^{1-1/\alpha} \to \infty$



Фиг. 5

В этом случае величина h определяется так

$$h=\begin{cases}\mu, & 1-\mu<|\zeta|,\ |\eta|\leqslant 1\\ 1-|\zeta|=1-|\eta|, & \mu\leqslant|\zeta|,\ |\eta|\leqslant 1-\mu\\ 1, & 0\leqslant|\zeta|,\ |\eta|<\mu\end{cases}$$

и формула (2.19) дает следующее выражение для эффективного коэффициента:

$$q=\mu+\lambda\mu+\frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\left(\frac{\lambda+\mu-\lambda\mu}{1-\mu+\lambda\mu}\right)$$

3. Исследуем асимптотики эффективного коэффициента в зависимости от соотношения величин μ и λ. Введем параметр α, характеризующий это соотношение, следующим образом: $\lambda\cong\mu^{-\alpha}$.

Варьируя величину α, можно исследовать различные асимптотики решения во всей области изменения μ и λ при $\mu\to 0$ (см. табл., N – номер вариантов). Как видно из фиг. 5, при этом охватываются все возможные предельные значения μ и λ в случае больших размеров включений.

Приближение (2.21) позволяет осуществить предельный переход к точке контакта и получит верные асимптотики решения при $a = 1$ для любых значений величины α. Приближение (2.20) в точке контакта верно описывает поведение эффективного коэффициента только в области $\alpha\in(-\infty;\ 0]$. При $\alpha>0$ формула (2.20) оказывается непригодной в точке контакта, поскольку исходная задача формально предполагает наличие между включениями бесконечно тонкого слоя матрицы и не позволяет фактически правильно описать случай $\alpha = 1$.

Проанализируем физический смысл полученных асимптотик точки контакта. В общем случае эффективный коэффициент теплопроводности складывается из двух составляющих

$$q=q_m+q_k,\quad q_k=\lambda\mu+\mu$$

$$q_m=\frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\left(\frac{\lambda+\mu-\lambda\mu}{1-\mu+\lambda\mu}\right)$$

где q_m – вклад за счет распространения тепла через материал матрицы, q_k – вклад, вносимый наличием точки контакта.

При $\alpha\leqslant 1$ вклад второго слагаемого невелик и эффективная проводимость среды в основном определяется величиной q_m.

При $\alpha = 1-\ln(-\ln(2\mu))/\ln\mu$ влияния на эффективную проводимость величин q_k и q_m сравниваются.

Наконец, при $\alpha>1$ $q\cong q_k$.

4. Рассмотренные композитные структуры в случае точечного контакта между включениями представляют собой композиты с равночередующимися фазами матрица – включение [15, 16]. Кажущееся противоречие полученных выражений с известной формулой Дыхне [16] указывает на самом деле на различную физическую и математическую природу различных предельных переходов, приводящих к шахматным структурам.

В силу симметрии рассматриваемых шахматных структур для них возможны три различные предельные формы (в отличие от любых других видов включений, когда таких форм будет только две: контакт включений – контакт матрицы). Рассмотрим их последовательно.

a. Линии контакта фаз имеют проводимость матрицы (фиг. 6,*a*). Проводимость такой структуры в направлении, например, оси x_1 ($y_1 = \mathrm{const}$, $0 < y_1 < \sqrt{2}$) в пределах выделенного элемента описывается разрывной функцией вида (фиг. 6,*в*):

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_b, & -\sqrt{2} < x_1 < 0 \\ \lambda_m, & 0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

где λ_b, λ_m – проводимость включения и матрицы соответственно.

Для такого предельного состояния при $\lambda_b = 0$ (случай непроводящих включений) эффективная проводимость всей структуры не равна нулю в силу возможности распространения тепла через точки контакта между отдельными элементами матрицы.

Осредненный коэффициент такой структуры, который далее будем обозначать q_m, согласно соотношению (2.20) определяется выражением вида

$$q_m = \lambda_m(1-a) + \frac{\lambda_b\lambda_m}{\lambda_b - \lambda_m} \ln \frac{\lambda_b}{a\lambda_m + \lambda_b(1-a)} \tag{4.1}$$

b. Линии контакта фаз имеют проводимость включения (фиг. 7,*a*).

Соответствующая такой структуре функция распределения проводимости имеет вид (фиг. 7,*b*):

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_b, & -\sqrt{2} \leqslant x_1 \leqslant 0 \\ \lambda_m, & 0 < x_1 < \sqrt{2} \end{cases}$$

Очевидно, что в предельном случае $\lambda = 0$ в силу отсутствия контакта между отдельными элементами матрицы такая структура не будет существовать как единое целое – она распадается.

Осредненный коэффициент описанной системы q_b, согласно соотношению (2.21), определяется следующей формулой:

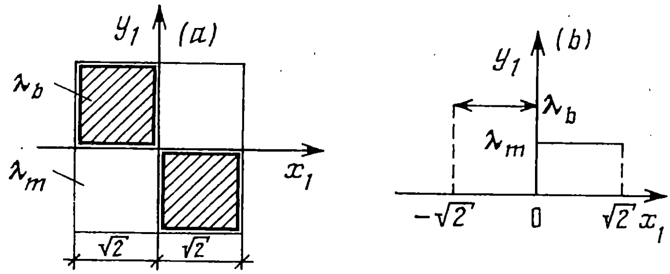
$$q_b = \lambda_b(1-a) + \frac{\lambda_b\lambda_m}{\lambda_b - \lambda_m} \ln \frac{(2-a)\lambda_b + (a-1)\lambda_m}{\lambda_m} \tag{4.2}$$

Отметим, что рассмотренные предельные системы переходят одна в другую при $\lambda_b \to \lambda_m$. Однако в обоих случаях нельзя говорить о равнопредставленности фаз, так как замена $\lambda_b \leftrightarrow \lambda_m$ приводит к принципиальному изменению структуры композитного материала. Таким образом, в этих случаях формула Дыхне неприменима.

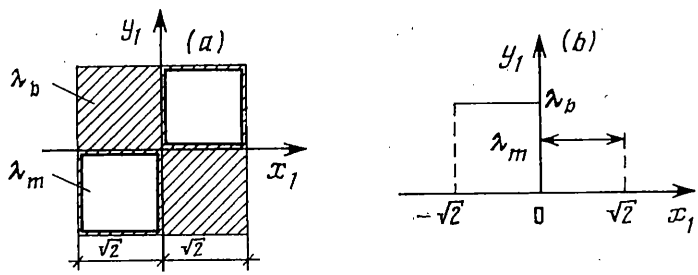
c. Структура Дыхне: фазы отделены друг от друга линией раздела (именно такая физическая трактовка представлена в работе Дыхне [16]) (фиг. 8,*a*).

Функция распределения проводимости такой структуры изображена на фиг. 8,*b*, причем на линиях контакта фаз эта функция математически доопределяется средним значением своих пределов слева и справа

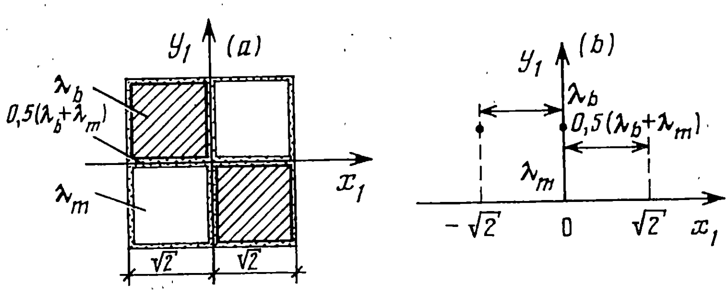
$$\lambda = \begin{cases} \lambda_b, & -\sqrt{2} < x_1 < 0 \\ 0,5(\lambda_b + \lambda_m), & x_1 = \pm\sqrt{2},\ x_1 = 0 \\ \lambda_m & 0 < x_1 < \sqrt{2} \end{cases}$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Принципиальным отличием структуры Дыхне от рассмотренных выше случаев является равнопредставленность фаз, т.е. замена $\lambda_b \leftrightarrow \lambda_m$ не приводит к изменению ни геометрических, ни физических характеристик композита – система при этом переходит сама в себя. Эффективная проводимость композитных структур такого типа q_D определяется по формуле Дыхне [16]:

$$q_D = \sqrt{\lambda_b \lambda_m} \tag{4.3}$$

В предельном случае $\lambda_b = 0$ в структуре Дыхне остается некоторый бесконечно тонкий каркас ненулевой проводимости, сохраняющий структуру. Поэтому, хотя при $\lambda_b \to 0$ получаем $q_m \to 0$ и $q_D \to 0$, но асимптотически имеет место оценка: $q_D \gg q_m$, $\lambda_b \to 0$.

Приведенные выше соображения позволяют заключить, что данную структуру Дыхне можно рассматривать как предельный случай композитного материала с включениями ромбовидной формы. Таким образом, формула Дыхне может быть выведена из полученных ранее соотношений (4.1), (4.2) при соответствующих предельных переходах.

Для осуществления предельного перехода к структуре Дыхне (фиг. 8) используем соотношения (4.1), (4.2) при $a = 1$, в которых роль λ_b, λ_m играют некоторые приведенные проводимости $\tilde{\lambda}_b, \tilde{\lambda}_m$ такие, что $\tilde{\lambda}_b = \tilde{\lambda}_m = 0,5(\lambda_b + \lambda_m)$ при $a = 1$.

Для четверти ячейки периодичности ($\zeta, \eta \geqslant 0$) вблизи линии контакта можно записать

$$\tilde{\lambda}_b = \frac{\lambda_b + \lambda_m}{2} + \operatorname{sign}(1-a)\frac{\lambda_b - \lambda_m}{2}$$

$$\tilde{\lambda}_m = \frac{\lambda_b + \lambda_m}{2} - \operatorname{sign}(1-a)\frac{\lambda_b - \lambda_m}{2}$$

Тогда из формул (4.1) и (4.2) для эффективной проводимости структуры Дыхне получается следующее выражение:

$$g = g_D = \frac{\tilde{\lambda}_m \tilde{\lambda}_b}{\tilde{\lambda}_m - \tilde{\lambda}_b} \ln \frac{\tilde{\lambda}_b}{\lambda_m}$$

которое в силу асимптотического представления [19]: $\ln z \cong \sqrt{z} - 1/\sqrt{z}$ при $z \to 1$ совпадает с формулой Дыхне (4.3).

5. Итак, для шахматных композитных структур существуют три различные предельные формы. В связи с этим возникает вопрос о возможной физической эквивалентности этих форм и условиях, при которых последняя может иметь место, т.е. необходимо найти соотношения физико-геометрических параметров, при которых осредненные коэффициенты структур a (4.1) и b (4.2) будут асимптотически совпадать с осредненным коэффициентом Дыхне (4.3).

Рассмотрим последовательно все возможные случаи проводимости включений. Не ограничивая общности, полагаем $\lambda_m = 1$, $\lambda_b/\lambda_m = \lambda = \lambda_b$, тогда соотношения (4.1), (4.2) примут вид (20), (21) соответственно.

(α) $\lambda \to 0$ – *случай непроводящих включений*. В этом случае структура a физически эквивалентна структуре Дыхне, если характерный размер включений порядка $a = 1 - \varepsilon \to 1 - 0$, где $\varepsilon \cong \sqrt{\lambda} + \lambda \ln \lambda \to 0$. Эффективная проводимость структуры b при любом размере включений порядка $a \cong 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ значительно меньше:

$$q_m \cong q_D \cong \sqrt{\lambda}, \quad q_b \cong -\lambda \ln(\lambda + a - 1)$$

$$q_m \cong q_D \geqslant q_b$$

(β) $0 < \lambda < 1$ – *включения малой проводимости*. Так же, как и в случае (α), эквивалентными могут быть только структуры a и структура Дыхне. Эффективная проводимость структуры b значительно меньше

$$q_m \cong q_D \cong \sqrt{\lambda}, \quad a \cong 1 - \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\ln\lambda + \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$$

$$q_b \cong \frac{\lambda}{\lambda - 1}\ln\lambda, \quad q_m \cong q_D \geqslant q_b$$

(γ) $\lambda \cong 1$ – *структура близка к однородной*. В этом случае результат очевиден: $q_m \cong q_b \cong q_D \cong \sqrt{\lambda}$, $a \cong 1$

(δ) $1 \ll \lambda \ll (1-a)^2$ – *проводимость включений большая, но конечная величина*. В этом случае проводимость структуры Дыхне значительно выше как проводимости структуры b, так и, тем более, структуры a: $q_D \geqslant q_b$, $q_D \geqslant q_m$

Имеют место следующие асимптотики:

$$q_b \cong q_m \cong \frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\lambda, \quad 1 \ll \lambda \ll |1-a|^{-1}$$

$$q_b \cong \frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\lambda, \quad q_m \cong \frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\frac{\lambda}{2}$$

$$q_b > q_m, \quad \lambda \cong |1-a|^{-1}$$

$$q_b \gg q_m, \quad |1-a|^{-1} \ll \lambda \ll (1-a)^{-2}$$

Эти результаты говорят о том, что с ростом проводимости включений эффективная проводимость структуры b растет гораздо быстрее эффективной проводимости структуры a, асимптотически приближаясь к осредененным соотношениям структуры Дыхне.

(ε) $\lambda \cong (1-a)^{-2}$ – *проводимость включений стремится к бесконечности.* Здесь становятся эквивалентными структура b и структура Дыхне

$$q_b \cong q_D \cong \sqrt{\lambda}, \quad q_m \cong \frac{\lambda}{2\lambda-1}\ln\lambda, \quad q_b \cong q_D \gg q_m$$

(φ) $\lambda \gg (1-a)^{-2}$ – при дальнейшем увеличении проводимости включений распространение тепла через точки контакта включений становится основным фактором, определяющим эффективную проводимость структуры b: $q_b \gg q_D \gg q_m$. Так, например, при $\lambda \cong (1-a)^{-3}$ имеем

$$q_b \cong \sqrt[3]{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\ln\lambda, \quad q_D = \sqrt{\lambda}, \quad q_m \cong \frac{\lambda}{3\lambda-1}\ln\lambda$$

6. Итак, в работе получены асимптотические выражения искомого эффективного коэффициента теплопроводности двухфазного композитного материала с волокнистыми включениями ромбовидной формы большого размера. Решение включает в себя все возможные асимптотики эффективного коэффициента в зависимости от соотношения определяющих систему параметров – характерного геометрического размера включений a и отношения проводимостей фаз λ. При этом охвачены все возможные предельные значения a и λ в случае больших размеров включений ($a \to 1$).

Рассмотрены три возможные предельные формы композитной структуры при наличии контакта между включениями. В соответствии с ними определены границы применимости полученных выражений и формулы Дыхне. Произведен подробный анализ полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batchelor G.K.* Transport properties of two-phase materials with random structure // A. Rev. Fluid Mech. 1974. V. 6. P. 227–255.
2. *Кристинсен Р.М.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
3. *Perrins W.T., McKenzie D.R., McPhedran R.C.* Transport properties of regular arrays of cylinders // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 369. No. 1737. P. 207–225.
4. *McPhedran R.C.* Transport properties of cylinder pairs and of the square array of cylinders // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1986. V. 408. No. 1834. P. 31–43.
5. *McPhedran R.C., Milton G.W.* Transport properties of touching cylinder pairs of the square array of touching cylinders // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1987. V. 411. No. 1841. P. 313–326.
6. *McPhedran R.C., Poladian L., Milton G.W.* Asymptotic studies of closely spaced highly conducting cylinders // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1988. V. 415. No. 1848. P. 185–196.
7. *Tokarzewski S., Blawzdziewicz J., Andrianov I.* Effective conductivity for densely packed highly conducting cylinders // Appl. Phys. A. 1994. V. 59. No. 6. P. 601–604.

8. *Ванин Г.А.* Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 320 с.
9. *Победря Б.Е.* Механика композиционых материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
10. *Шермергор Г.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
11. *Helsing J.* Transport properties of two – dimensional tilings with corners // Phys. Rev. B. 1991. V. 44. No. 21. P. 11677–11682.
12. *Tao R., Chen Z., Sheng P.* First-prinsiples Fourier approach for the calculation of the effective dielectric constant of periodic composites // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. No. 4. P. 2417–2420.
13. *Bergman D.J., Dunn K.-J.* Bulk effective dielectric constant of a composite with a periodic microgeometry // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. No. 23. P. 13262–13271.
14. *Milton G.W., McPhedran R.C., McKenzie D.R.* Transport properties of arrays of intersecting cylinders // Appl. Phys. 1981. V. 25. No. 1. P. 23–30.
15. *Бердичевский В.Д.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
16. *Дыхне А.М.* Проводимость двумерной двухфазной системы // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. Вып. 1. С. 110–115.
17. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
18. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Вища шк., 1989. 352 с.
19. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.

Киев

Поступила в редакцию
15.10.1996