

УДК 539.4:678

© 2000 г. С.В. ЕЛИЗАРОВ, В.В. ПАРЦЕВСКИЙ

## ДЕФОРМАЦИЯ МНОГОНАПРАВЛЕННОГО СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА С ВНУТРИСЛОЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

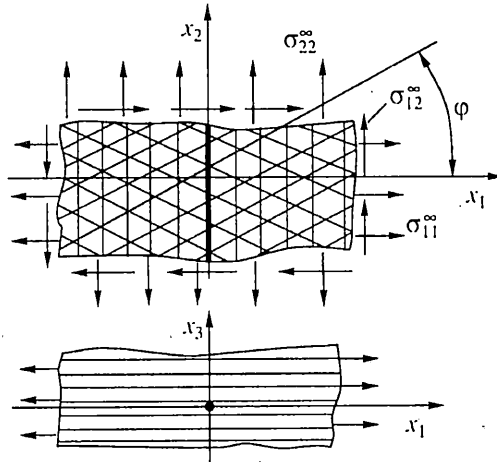
Современные несущие конструкции из композитов обычно имеют слоистую структуру, причем слои могут быть из тканей различной структуры или различно ориентированные однонаправленные. Для слоистых композитов на полимерной основе (стекло-, угле-, боропластики и т.д.) из однонаправленных слоев характерна сильно выраженная анизотропия физико-механических свойств отдельных слоев. Причем степень анизотропии прочности существенно выше степени анизотропии жесткости. Так, для однонаправленных стеклопластиков отношение модулей упругости поперек и вдоль направления армирования  $E_2/E_1 = 0,13 - 0,33$ , а отношение соответствующих пределов прочности при растяжении  $\sigma_{22}^+ / \sigma_{11}^+ = 0,03 - 0,11$ . Для углепластиков эти отношения составляют  $0,09 - 0,13$  и  $0,03 - 0,07$  соответственно [1, 2]. Кроме того, из-за стеснения деформации в слое в составе многонаправленного пакета резервирование прочности за счет макропластических и вязкоупругих свойств связующего практически не реализуются: слой в поперечном волокнам направлении при растяжении и сдвиге разрушается практически упруго – хрупко.

Отсюда следует принципиальная невозможность удовлетворения условиям равнопрочности: слои распределяют нагрузку между собой пропорционально жесткостям. Уже при значениях макроскопических нагрузок, в несколько раз меньших разрушающих, в отдельных слоях конструкции могут появляться трещины вдоль волокон. Эти трещины, как правило, нормальны к плоскости слоя и занимают всю толщину. В поле макродеформаций с невысокими градиентами рост таких трещин вдоль волокон обычно неустойчив, поэтому они могут проходить по всему изделию. Макроскопически эти эффекты проявляются в появлении физической нелинейности деформирования. Теоретическое изучение деформирования конструкций из слоистых композитов, сопровождающего растрескиванием, необходимо для правильного проектирования и для оценки несущей способности [1–3].

Некоторые модели для изучения концентрации напряжений около трещин проанализированы в [2]. На базе упрощенного варианта уравнений теории слоистых сред [4] в [5] рассмотрены ортогонально армированные слоистые композиты с трещинами.

Здесь на основе теории [4], обобщенной на случай среды из различных анизотропных слоев, поставлена и решена задача о концентрации напряжений в композите из однонаправленных различно ориентированных слоев периодической структуры с трещинами.

1. Рассмотрим континуально – дискретную модель упругой слоистой среды (фиг 1), составленную из жестких слоев, разделенных мягкими [4]. Мягкие слои толщиной  $s$  считаем одинаковыми, изотропными, работающими на поперечный сдвиг  $\epsilon_{13}$ ,  $\epsilon_{23}$  и поперечное растяжение  $\epsilon_{33}$ . Жесткие – толщиной  $h_k$  ( $|k| < \infty$ ) полагаем ортотропными, главные оси упругости  $k$ -го слоя составляют угол  $\varphi_k$  с осями общей для среды глобальной декартовой системы  $Ox_1x_2x_3$ . Жесткие слои полагаем пластинами Кирхгофа – Лява. Пусть структура среды периодична по номеру слоя, период составляет  $m$



Фиг. 1

различных жестких слоев, тогда  $\Phi_k = \Phi_{k+m}$ . Каждый жесткий слой с индексом  $k$  снабдим еще и парой индексов  $p$  и  $j$ , где  $p = \overline{0, m-1}$  – номер слоя внутри периода, так что  $k = mj + p$ .

Пусть в слое  $k = 0$  имеется трещина в плоскости  $Ox_2x_3$ , бесконечно длинная в направлении  $x_2$  на всю толщину слоя. Таким образом, оси глобальной системы  $Ox_1x_2x_3$  совпадают с главными осями упругости нулевого слоя: ось  $x_2$  – вдоль направления его армирования. Рассмотрим случай нагружения слоистой среды на бесконечности однородным плоским полем макронапряжений  $\sigma_{11}^\infty$ ,  $\sigma_{22}^\infty$ ,  $\sigma_{12}^\infty$ . При этом решение не зависит от  $x_2$ . Уравнения слоистой среды в перемещениях [4], обобщенные на случай анизотропных жестких слоев будут

$$\begin{aligned} A_{11}^k u_{1,2}^k + A_{16}^k u_{2,2}^k + B[u_1^{k+1} - 2u_1^k + u_1^{k-1} + r_{k+1}u_{3,1}^{k+1} - r_{k-1}u_{3,1}^{k-1}] &= 0 \\ A_{16}^k u_{1,2}^k + A_{66}^k u_{2,2}^k + B[u_2^{k+1} - 2u_2^k + u_2^{k-1}] &= 0 \\ D_{11}^k u_{3,4}^k - C(u_3^{k+1} - 2u_3^k + u_3^{k-1}) - Br_k[u_{1,1}^{k+1} - u_{1,1}^{k-1} + r_{k+1}u_{3,2}^{k+1} + 2r_k u_{3,2}^k + r_{k-1}u_{3,2}^{k-1}] &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u_j^k$  – перемещения срединной плоскости жесткого слоя с номером  $k$ , ( $j = \overline{1, 3}$ ),  $r_k = (h_k + s)/2$ . Цифрой после запятой отмечен порядок производной по  $x_1$ . Сдвиговая и нормальная жесткости мягких  $B$ ,  $C$ , а также мембранные и изгибные жесткости  $A_{1n}^k$ ,  $D_{1n}^k$  жестких слоев выражаются через модули упругости и сдвига  $E$ ,  $G$  мягких и через матрицу жесткости  $c_{lm}^k$  [1] жестких слоев  $B = G/s$ ,  $C = E/s$ ,  $A_{11}^k = c_{11}^k h_k$ ,  $A_{16}^k = c_{16}^k h_k$ ,  $A_{66}^k = c_{66}^k h_k$ ,  $D_{11}^k = A_{11}^k h_k^2 / 12$ .

В отличие от случая изотропных жестких слоев [4], первые два слагаемых первых двух уравнений (1.1) здесь получены так

$$\begin{aligned} N_{11,1}^k &= (A_{11}^k \epsilon_{11}^k + 2A_{16}^k \epsilon_{12}^k)_{,1} \\ N_{12,1}^k &= (A_{16}^k \epsilon_{11}^k + 2A_{66}^k \epsilon_{12}^k)_{,1} \\ \epsilon_{11}^k &= u_{1,1}^k, \quad \epsilon_{12}^k = \frac{1}{2} u_{2,1}^k \end{aligned}$$

С учетом симметрии решения относительно  $Ox_2x_3$  будем рассматривать область  $x_1 \geq 0$ . Тогда граничные условия при  $x_1 = 0$  будут

$$\begin{aligned} N_{11}^0 &= A_{11}^0 u_{1,1}^0 = 0, & N_{12}^0 &= A_{66}^0 u_{2,1}^0 = 0 \\ M_{11}^0 &= D_{11}^0 u_{3,2}^0 = 0, & u_1^k &= u_2^k = u_{3,1}^k = 0 \quad (k \neq 0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$Q_1^k = D_{11}^k u_{3,3}^k - Br_k [u_1^{k+1} - u_1^{k-1} + r_{k+1} u_{3,1}^{k+1} + 2r_k u_{3,1}^k + r_{k-1} u_{3,1}^{k-1}] = 0 \quad (-\infty < k < \infty)$$

Здесь левая часть последнего условия имеет смысл обобщенной поперечной силы [4] в жестком слое.

При  $x_1 \rightarrow \infty$  решение должно удовлетворять условиям совместной работы композита ( $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_k$ ):

$$\bar{\sigma}_k^\infty = C_k \bar{\varepsilon}^\infty, \quad \bar{\varepsilon}^\infty = C^{-1} \bar{\sigma}^\infty, \quad C = \sum_{k=0}^{m-1} C_k h_k \left( \sum_{j=0}^{m-1} h_j + ms \right)^{-1}$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{vmatrix}, \quad \bar{\sigma}_k^\infty = \|\sigma_{11,k}^\infty, \sigma_{22,k}^\infty, \sigma_{12,k}^\infty\|^T$$

$$\bar{\varepsilon}^\infty = \|\varepsilon_{11}^\infty, \varepsilon_{22}^\infty, 2\varepsilon_{12}^\infty\|^T$$

Здесь элементы матрицы жесткостей слоя  $c_{in}^k$  вычисляются по упругим константам слоя: модулям упругости и сдвига  $E_j^k$ ,  $G_{12}^k$  коэффициентам Пуассона и взаимного влияния  $\nu_{12}^k$ ,  $\eta_{j6}^k$ .

Переформулируем краевую задачу (1.1), (1.2) так: на поверхности трещины  $x_1 = 0$  в слое  $k = 0$  введем неизвестные дисторсии – разрывы обобщенных перемещений  $u_1^0(0) = \dot{u}_1^*$ ,  $u_2^0(0) = \dot{u}_2^*$  и  $u_{3,1}^0(0) = \dot{u}_{3,1}^*$ . Тогда вместо (1.2) условия при  $x_1 = 0$  будут иметь единый вид для всех  $k$ :

$$u_1^k = \delta_{0k} \dot{u}_1^*, \quad u_2^k = \delta_{0k} \dot{u}_2^*, \quad u_{3,1}^k = \delta_{0k} \dot{u}_{3,1}^* \quad (1.3)$$

$$Q_1^k = 0 \quad (-\infty < k < \infty)$$

Здесь  $Q_1^k$  – левая часть последнего условия (1.2),  $\delta_{0k}$  – символ Кронеккера.

Теперь задача (1.1), (1.3) должна быть дополнена условиями ограниченности решения при  $x_1 \rightarrow \infty$ . Решение же исходной задачи о действии на бесконечности макронапряжений  $\bar{\sigma}^\infty$  представим, как это обычно делается в механике трещин, наложение двух. Первое о деформации среды без трещины вектором  $\bar{\sigma}^\infty$ , второе – решение (1.1), (1.3), где граничные значения  $\dot{u}_1^*$ ,  $\dot{u}_2^*$ ,  $\dot{u}_{3,1}^*$ , таковы, что полное решение удовлетворяет первым трем условиям (1.2).

Решение задачи (1.1), (1.3), затухающее при  $x_1 \rightarrow \infty$ , будем искать при помощи преобразования Фурье – Стильбеса [7].

Для слоистой среды периодической структуры введем изображения по Фурье – Стильбесу для функций перемещений каждого типа слоев в периоде  $m$  – всего  $3m$

изображений

$$U_j^p(x_1, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_j^{mn+p} \exp[i\psi(mn+p)] \quad (1.4)$$

$$u_j^{mn+p}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_j^p \exp[-i\psi(mn+p)] d\psi \quad (j = \overline{1, 3}; \quad p = \overline{0, m-1})$$

Умножая каждое уравнение (1.1) и (1.3) на  $\exp[i\psi(mk+p)]$  и складывая по слоям, одинаковым в периодах, получаем систему дифференциальных уравнений относительно  $3m$  изображений и соответствующие условия при  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} A_{11}^p U_{1,2}^p + A_{16}^p U_{2,2}^p + B[U_1^{p+1}(-)^{-1} - 2U_1^p + U_1^{p-1}(+) + r_{p+1} U_{3,1}^{p+1}(-)^{-1} - r_{p-1} U_{3,1}^{p-1}(+)] &= 0 \\ A_{16}^p U_{1,2}^p + A_{66}^p U_{2,2}^p + B[U_2^{p+1}(-)^{-1} - 2U_2^p + U_2^{p-1}(+)] &= 0 \\ D_{11}^p U_{3,4}^p - C[U_3^{p+1}(-)^{-1} - 2U_3^p + U_3^{p-1}(+)] - Br_p[U_1^{p+1}(-)^{-1} - & \\ - U_1^{p-1}(+) + r_{p+1} U_{3,2}^{p+1}(-)^{-1} + 2U_{3,2}^p r_p + r_{p-1} U_{3,2}^{p-1}(+)] &= 0 \quad (p = \overline{0, m-1}) \\ U_1^p = \delta_{0p} u_1^*, \quad U_2^p = \delta_{0p} u_2^*, \quad U_{3,1}^p = \delta_{0p} u_{3,1}^*, \quad q^p = 0 \quad (p = \overline{0, m-1}; \quad x_1 = 0) & \quad (1.5) \end{aligned}$$

Здесь обозначено  $(\pm) = \exp(i\psi(m \pm n))$ . В уравнениях для крайних слоев периода  $p = 0$  и  $p = m - 1$  учтем, что  $U_j^{-1} = U_j^{m-1}$ ,  $U_j^m = U_j^0$ . Общий порядок системы (1.5) равен  $8m$ .

Решение системы (1.5), будем искать в виде  $U_j^p = \dot{V}_j^p \exp(\kappa x_1)$ . Подставляя это решение в (1.5), стандартным методом получим характеристическое уравнение

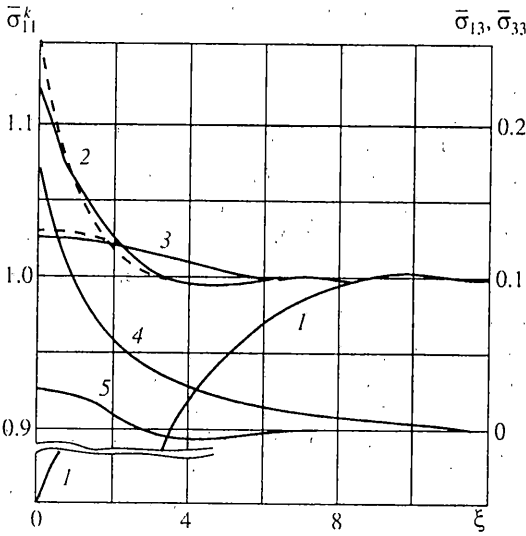
$$\begin{vmatrix} A_{11}^0 \kappa^2 - 2B & A_{16}^0 \kappa^2 & 0 & B e^{i\psi m} & \dots & \dots \\ A_{16}^0 \kappa^2 & A_{66}^0 \kappa^2 - 2B & 0 & B e^{-i\psi m} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & D_{11}^0 \kappa^4 - 2Br_0^2 + 2C & -Br_0 \kappa & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & D_{11}^{m-1} \kappa^4 - 2Br_{m-1}^2 \kappa^2 + 2C \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

Теперь затухающее при  $x_1 \rightarrow \infty$  решение системы уравнений (1.5) можно представить в виде

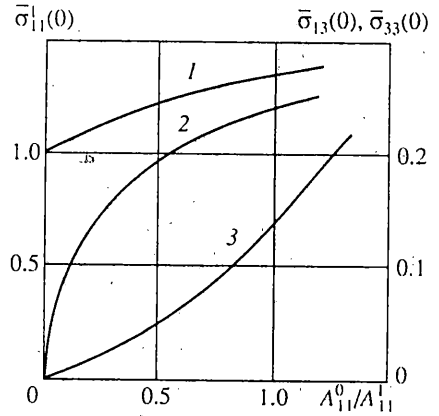
$$U_j^p = \sum_{l=1}^{4m} \alpha_{jl}^p C_l \exp(\kappa_l x_1) \quad (1.7)$$

где  $\kappa_l(\psi)$  – корни (1.6) ( $\text{Re } \kappa_j < 0$ ),  $C_l$  – константы интегрирования,  $\alpha_{jl}^p$  – коэффициенты распределения – миноры порядка  $3m - 1$  последнего столбца матрицы определителя (1.6) при  $\kappa = \kappa_l$ .

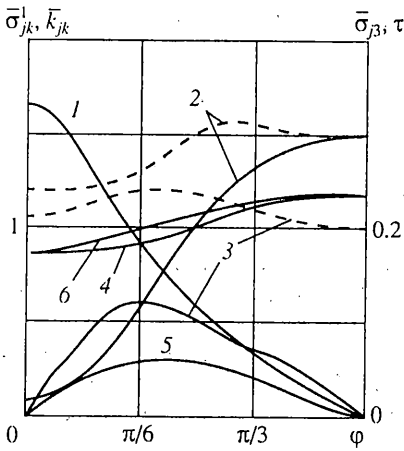
Константы  $C_l$  вычисляем из условий (1.5) в виде линейной комбинации дисторсий  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ ,  $u_{3,1}^*$ . После этого решение задачи (1.5) определено формулами обратного преобразования Фурье – Стилтеса (1.4).



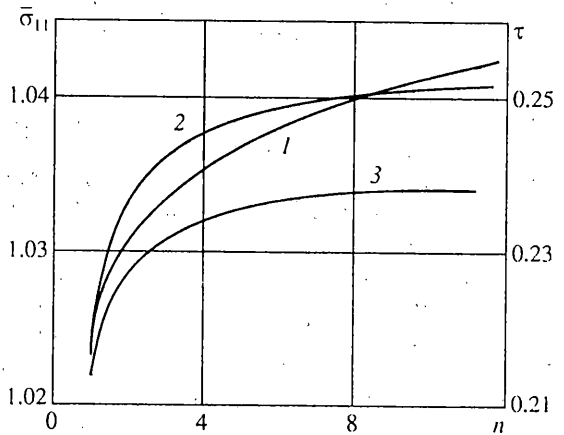
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Исходная задача о нагружении слоистой среды напряжениями  $\bar{\sigma}^\infty = \|\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty\|^T$  представляется наложением (1.7) и однородной задачи без трещин. Т.е., константы  $u_1^*, u_2^*, u_{3,1}^*$  определяются из первых трех условий (1.2).

Полученное в итоге решение представляет собой тензор Грина для дисторсий (разрывов обобщенных в смысле Кирхгофа перемещений) в слоистой среде.

2. Исследуем концентрацию напряжений около единичной трещины в ортогонально армированном композите периодической структуры с периодом  $m = 2$  (в упрощенном варианте с предположением  $D_{11}^k = 0$  и  $\bar{\sigma}^\infty = \|\sigma_{11}^\infty, 0, 0\|^T$  решение получено в [5]). В этом случае задача о нагружении среды полем  $\bar{\sigma}^\infty$  распадается на плоскую и антиплоскую.

Результаты, полученные при значениях упругих констант, характерных для ортогонально армированного стеклопластика [1], приведены на фиг. 2, 3. На фиг. 2 показано изменение напряжений в разорванном слое  $k = 0$  (кривая 1) и соседних  $k = 1, 2$

(кривые 2, 3), при одноосном растяжении по  $x_1$ . Сплошные кривые соответствуют мембранным, штриховые – сумме мембранных и изгибных ( $\bar{\sigma}_{11}^k = \sigma_{11}^k / \sigma_{11}^k(\infty)$ ).

Кривые 4 и 5 показывают изменение касательных  $\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13} / \sigma_{11}^\infty$  и нормальных  $\bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33} / \sigma_{11}^\infty$  в мягком слое у слоя с трещиной ( $\xi = x_1 / d$ ,  $d = \frac{1}{2}(A_{11}^0 / B)^{1/2}$ ). Из сравнения с результатами для случая одинаковых жестких слоев [6] видно, что концентрация всех напряжений здесь существенно ниже. Кроме того, вклад изгибных напряжений в жестких слоях невелик и  $\sigma_{33} \ll \sigma_{13}$ . Кривые на фиг. 3 иллюстрируют зависимость максимумов напряжений (при  $x_1 = 0$ ) от  $A_{11}^0 / A_{11}^1$ , которое определяется  $h_0/h_1$  и  $E_1^0 / E_1^1$ ; кривая 1 –  $\bar{\sigma}_{11}^1(0)$ , 2 –  $\bar{\sigma}_{13}^1(0)$ , 3 –  $\bar{\sigma}_{33}^1(0)$ .

Отметим, что в ортогонально армированном композите вероятность расслоения вблизи поперечной трещины существенно ниже, чем в однонаправленном.

На фиг. 4 приведены результаты по концентрации напряжений в композите периодической структуры  $[90^\circ/\pm\phi]$  с трещиной в слое  $90^\circ$  при растяжении. Здесь  $m = 3$ , задача не распадается на плоскую и антиплоскую. Кривые показывают зависимость напряжений в жестких и мягких слоях при  $x_1 = 0$  от  $\phi$ . Напряжения в жестком слое  $\bar{\sigma}_{11}^1$  (кривая 1),  $\bar{\sigma}_{22}^1$  (2) и  $\bar{\sigma}_{12}^1$  (3) вычислены в локальных координатах (индекс 1 соответствует направлению волокон). Штриховые кривые соответствуют коэффициентам концентрации  $k_{jk} = \sigma_{jk}^1 / \sigma_{jk}^1(\infty)$  в локальных координатах. Напряжения в мягком слое  $\bar{\sigma}_{13}^1(0)$  и  $\bar{\sigma}_{23}^1(0)$  даются кривыми 4 и 5, кривая 6 показывает максимальное полное сдвиговое напряжение  $\tau = (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)^{1/2}$  в мягком слое у трещины.

На фиг. 5 представлены результаты решения задачи о концентрации напряжений в композите  $[90^\circ/\pm\phi]$  в случае нескольких трещин в слоях  $90^\circ$  в сечении  $x_1 = 0$ . Решение получено наложением решений для одиночной трещины. Здесь  $n$  – число трещин, кривая 1 соответствует  $\bar{\sigma}_{11}^1(0)$  в слое  $90^\circ$ , ближнем к разрушенным, 2 и 3 –  $\max \tau$  у средней трещины (вблизи оси  $x_1$ ) и у крайней трещины соответственно.

Общий вывод из приведенных результатов – коэффициенты концентрации всех напряжений невелики. Появления трещины вдоль волокон в слоях вблизи трещины можно ожидать только в том случае, если направления их армирования близки. Во всех других случаях наиболее вероятным является рассеянное накопление трещин в слоях какой-либо одной ориентации. Расслоения в среде  $[90^\circ/\pm\phi]$  у разрывов слоев  $90^\circ$  гораздо менее вероятны, чем в однонаправленном композите.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-01-00423).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
2. Упругие свойства композиционных материалов / Под ред. Ю.М. Тарнопольского. М.: Мир, 1975. 295 с.
3. Garg A.C. Delamination – a damage mode in composite structures // Eng. Fract. Mech. 1988. V. 29. № 5. P. 557–584.
4. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1965. Вып. 11. С. 31–63.
5. Парцевский В.В. Растрескивание слоистого композита, армированного в двух направлениях // Проблемы прочности. 1978. № 10. С. 76–77.
6. Парцевский В.В. Распределение напряжений в дискретной модели слоистой среды вблизи разреза // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 103–108.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1961. 436 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.01.1999