МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. И.Л. ГУЗЕЙ, Б.Е. ПОБЕДРЯ

МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ И МИКРОКОНЦЕНТРАЦИИ В КОМПОЗИТАХ

Взаимодействие компонентов композита имеет различную физическую природу. Одним из видов такого взаимодействия является термодиффузионный механизм. Ниже строится математическая модель, учитывающая этот механизм. Дается обобщение "основной" гипотезы (предполагающей, что все термодинамические параметры модели являются операторами от тензора деформаций такого же типа, что и определяющие соотношения среды [1]) на случай учета термодиффузии.

Для этого же случая обобщается и гипотеза Дюгамеля – Неймана [1], что позволяет феноменологически учесть известный в диффузии эффект Киркендалла. В качестве примера рассматривается упругий слоистый композит, для которого строятся в явном виде тензоры концентрации, позволяющие находить градиент напряжений, деформаций, температуры и массовых концентраций компонентов в каждой точке композита по заданным таким величинам на бесконечности.

1. Механика деформируемого твердого тела многокомпонентных сред. Определяющие соотношения механики деформируемого твердого тела для многокомпонентной среды могут быть записаны в виде [1]:

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}, T, c^{(\alpha)}) \tag{1.1}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $\check{F}_{ij}$ – тензора-оператора своих аргументов, $\underset{\sim}{\varepsilon}$ – тензор деформации, T – температура, $c^{(\alpha)}$ – концентрации компонентов [2].

Введем обобщение гипотезы Дюгамеля – Неймана [1] для многокомпонентной среды. Пусть для каждого компонента

$$\varepsilon_{ij}^{c(\alpha)} = \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} - \alpha_{ij}^{(\alpha)}\vartheta - \gamma_{ij}^{(\alpha)} \tag{1.2}$$

где $\underset{\sim}{\alpha}^{(\alpha)}$ – тензор теплового расширения α-го компонента, ϑ – перепад температур $(T - T_0)$, а $\underset{\sim}{\gamma}^{(\alpha)}$ – симметричный тензор, который описывает обобщенный эффект Киркендалла: даже при нулевом перепаде температур и нулевой механической деформации возникает деформация Дюгамеля – Неймана ε_{ij}^c, отличная от нуля. Если тензор $\underset{\sim}{\gamma}$ – шаровой, то указанная деформация описывает только усадку.

Из кинематических соотношений, рассмотренных в [2], следует

$$\varepsilon_{ij}^c = \sum_\alpha c^{(\alpha)}\varepsilon_{ij}^{c(\alpha)} \tag{1.3}$$

Положим также

$$\alpha_{ij} = \sum_\alpha c^{(\alpha)}\alpha_{ij}^{(\alpha)}, \quad \gamma_{ij} = \sum_\alpha c^{(\alpha)}\gamma_{ij}^{(\alpha)} \tag{1.4}$$

Тогда, умножая каждое выражение (1.2) на $c^{(\alpha)}$ и суммируя по α, получим

$$\varepsilon_{ij}^{c} = \varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}\vartheta - \gamma_{ij} \tag{1.5}$$

Определяющие соотношения (1.1) в силу принятой обобщенной гипотезы Дюгамеля – Неймана могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}) \tag{1.6}$$

Применим теперь "основную" гипотезу [1, 3] для данной ситуации. Будем считать, что термодинамические параметры $\underset{\sim q}{\nu}$ $(q = 1, 2,\ldots)$ являются операторами от тензора $\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}$ того же типа, что и определяющие соотношения (1.6), т.е.

$$\underset{\sim(q)}{\nu} = \underset{\sim(q)}{\check{N}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}) \tag{1.7}$$

Полную вариацию $\delta\underset{\sim(q)}{\check{N}}$ представим в виде суммы двух вариаций: изохронной $\underset{\sim(q)}{\nu^{\varepsilon}}\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}$, когда при фиксированном времени t варьируется вид функции $\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ и вариации $\underset{\sim(q)}{\nu^{t}}\,dt$, обусловленной варьированием независимого аргумента

$$\delta\underset{\sim(q)}{\nu} = \underset{\sim(q)}{\nu^{\varepsilon}}\,d\underset{\sim}{\varepsilon}^{c} + \underset{\sim(q)}{\mu^{t}}\,dt \tag{1.8}$$

Представляя свободную энергию Гельмгольца в виде

$$f = f_0(T) + f_{00}(c^{(\alpha)}) + \tilde{f}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}) \tag{1.9}$$

получим из уравнений [2]

$$\rho\frac{df}{dt} = -\rho s\frac{dT}{dt} + \sigma_{ij}\nu_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{m}\mathbf{F}^{(\alpha)}\cdot\mathbf{j}^{(\alpha)} - w^{*}$$

следующее соотношение:

$$\rho\frac{\partial f_0}{\partial T}dT + \sum_{\alpha}\rho\frac{\partial f_{00}}{\partial c_\alpha}dc_\alpha + \sum_{\alpha}\rho\mu^{(\alpha)}dc^{(\alpha)} + \rho\frac{\partial f}{\partial\underset{\sim(q)}{\nu}}\underset{\sim(q)}{\nu^{\varepsilon}}\,d\underset{\sim}{\varepsilon}^{c} + \rho\frac{\partial f}{\partial\underset{\sim(q)}{\nu}}\nu_{(q)}^{t}dt + \rho s dT + \tag{1.10}$$

$$+w^{*}dt = \underset{\sim}{\breve{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{c})d\underset{\sim}{\varepsilon} + \sum_{\alpha}\mathbf{F}_\alpha\cdot\mathbf{j}_\alpha + \sum\rho\mu^{(\alpha)}dc^{(\alpha)}$$

где $\mu^{(\alpha)}$ – химические потенциалы [2].

Приравнивая в (1.10) выражения при независимых вариациях $d\underset{\sim}{\varepsilon}$, dT, dc_α, dt, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} - \frac{\partial f}{\partial\underset{\sim(q)}{\nu}}\underset{\sim(q)}{\nu^{\varepsilon}}\,\underset{\sim}{\alpha} = -s \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial c^{(\alpha)}} - \frac{\partial f}{\partial\underset{\sim(q)}{\nu}}\underset{\sim(q)}{\nu^{\varepsilon}}\,\underset{\sim}{\gamma}^{(\alpha)} = \mu^{(\alpha)} \tag{1.12}$$

$$\rho\frac{\partial f}{\partial\underset{\sim(q)}{\nu}}\underset{\sim(q)}{\nu^{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha}\vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.13}$$

$$\rho \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(q)}} \nu^{t}_{(q)} = -w^{*} + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{j}_{\alpha} + M \tag{1.14}$$

$$M = \sum_{\alpha} \rho \mu^{(\alpha)} \frac{dc^{(\alpha)}}{dt} = \sum_{\alpha} \mu^{(\alpha)} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(\alpha)} - \sum_{\alpha} \mu^{(\alpha)} \sum_{I} \varphi_{\alpha I} J_{I} \tag{1.15}$$

Из (1.11) и (1.13) следует

$$\rho s = -\rho \frac{\partial f_0}{\partial T} + \underset{\sim}{\alpha} \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha} \vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.16}$$

а из (1.12) и (1.13):

$$\rho \mu^{(\alpha)} = \rho \frac{\partial f_{00}}{\partial T} - \underset{\sim}{\gamma}^{(\alpha)} \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha} \vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.17}$$

При этом [3]:

$$-\frac{\partial f_0}{\partial T} = \int_{T_0}^{T} \frac{c_p}{T} dt \tag{1.18}$$

По закону Дюлонга-Пти у твердых веществ для температуры выше некоторой, называемой температурой Дебая, $c_p = \text{const}$. В этом случае

$$c_p \ln \frac{T}{T_0} = c_p \ln\left(1 + \frac{\vartheta}{T_0}\right) \tag{1.19}$$

Если ϑ мало по сравнению с T_0, то

$$c_p \ln \frac{T}{T_0} \approx c_p \frac{\vartheta}{T_0} \tag{1.20}$$

Сравнивая (1.18)–(1.20) и (1.16) получим, что функция энтропии s полностью определена законом связи между напряжениями и деформациями

$$\rho s = \rho c_p \ln \frac{T}{T_0} - \underset{\sim}{\alpha} \cdot \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha} \vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.21}$$

Из (1.17) согласно закона Рауля [4] имеем

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial c^{(\alpha)}} = \int_{c_{\alpha}^{0}}^{c_{\alpha}} \frac{RT}{c^{(\alpha)}} dc^{(\alpha)} = \mu_0^{(\alpha)} + RT \ln c^{(\alpha)} \tag{1.22}$$

где $\mu_0^{(\alpha)}$ – химический потенциал чистого компонента. Тогда из (1.17) находим химический потенциал с учетом эффекта Киркендалла

$$\rho \mu^{(\alpha)} = \rho \mu_0^{(\alpha)} + \rho RT \ln c^{(\alpha)} - \underset{\sim}{\gamma}^{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\check{F}}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha} \vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.23}$$

Если положить в интеграле в (1.22) $T \approx T_0$, то получим

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial c^{(\alpha)}} = \mu_0^{(\alpha)} + RT_0 \ln \frac{c^{(\alpha)}}{c_0^{(\alpha)}} = \mu_0^{(\alpha)} + RT_0 \ln\left(\frac{c^{(\alpha)} - c_0^{(\alpha)}}{c_0^{(\alpha)}}\right) = RT_0(c^{(\alpha)} - c_0^{(\alpha)}) + \mu_0^{(\alpha)} \tag{1.24}$$

Если, кроме того, положить $\mu_0^{(\alpha)} = RT_0 c_0^{(\alpha)}$, то из (1.23) найдем

$$\rho \mu^{(\alpha)} = \rho RT_0 c^{(\alpha)} - \gamma_{ij}^{(\alpha)} \cdot \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha} \vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.25}$$

Отсюда при пренебрежении эффектом Киркендалла, имеем

$$d^{(\alpha)(\beta)} = \rho R T_0 \tag{1.26}$$

Чтобы перекрестные коэффициенты в $d^{(\alpha)(\beta)}$ $(\alpha \neq \beta)$ были отличными от нуля, необходимо обобщить закон Рауля. В случае линейного приближения (1.24), будем иметь обобщение (1.25) в виде

$$\rho\mu^{(\alpha)} = b_\alpha T_0 + \sum_{\beta=1}^{m} d^{(\alpha)(\beta)} c^{(\beta)} - \gamma_{ij}^{(\alpha)} \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\alpha}\vartheta - \underset{\sim}{\gamma}) \tag{1.27}$$

Зная теперь выражение химического потенциала (1.27), можно найти согласно определяющим соотношениям, рассмотренным в [2]:

$$q_i = -\Lambda_{ij} T_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{m} B_{ij}^{(\alpha)} c_{,j}^{(\alpha)} - \sum_{\alpha=1}^{m} q_{ijkl}^{(\alpha)} \check{F}_{kl,j} \tag{1.28}$$

$$j_i^{(\alpha)} = -A_{ij}^{(\alpha)} T_{,j} - \sum_{\beta=1}^{m} D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} c_{,j}^{(\beta)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)} \check{F}_{kl,j} \tag{1.29}$$

$$B_{ij}^{(\alpha)} \equiv A_{ij}^{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^{m} d^{(\alpha)(\beta)} \tag{1.30}$$

$$q_{ijkl}^{(\alpha)} \equiv A_{ij}^{(\alpha)} \gamma_{kl}^{(\beta)} \tag{1.31}$$

$$D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} \equiv \sum_{\gamma=1}^{m} D_{ij}^{(a)(\gamma)} d^{(\gamma)(\beta)} \tag{1.32}$$

$$Q_{ijkl}^{(\alpha)} \equiv \sum_{\beta=1}^{m} D_{ij}^{(\alpha)(\beta)} \gamma_{kl}^{(\beta)} \tag{1.33}$$

где $\check{F}_{kl,j}$ – частная производная по j определяющих соотношений (1.6).

Используя выражения (1.21) и (1.28), можно записать уравнение притока тепла [3] в виде

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -T \frac{t}{dt}[\alpha_{ij} \check{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^c)] + (\Lambda_{ij} T_{,j})_{,i} + \sum_{\alpha} (B_{ij}^{(\alpha)} c_{,j}^{(\alpha)})_{,i} + \sum_{\alpha=1}^{m} [Q_{ijkl}^{(\alpha)} \check{F}_{kl,j}(\underset{\sim}{\varepsilon}^c)]_{,i} + w^* + \rho q \tag{1.34}$$

где функция рассеивания w^* находится в соответствии с формулой (1.14).

Используя выражение (1.29), можно более конкретно записать и уравнения [2]

$$\rho \frac{dc^{(\alpha)}}{dt} = (A_{ij}^{(\alpha)} T_{,j})_{,i} + \sum_{\beta=1}^{m} (D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} c_{,j}^{(\beta)})_{,i} + [Q_{ijkl}^{(\alpha)} \check{F}_{kl,j}(\underset{\sim}{\varepsilon}^c)]_{,i} + R_\alpha \tag{1.35}$$

2. Упругая среда. Рассмотрим частный случай определяющих соотношений (1.6), когда они описываются линейной тензорной функцией

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^c = c_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\vartheta - \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_{kl}^{(\alpha)} c^{(\alpha)}\right) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\vartheta - \sum_{\alpha=1}^{n} \Gamma_{ij}^{(\alpha)} c^{(\alpha)} \tag{2.1}$$

$$\beta_{ij} \equiv c_{ijkl} d_{kl}, \quad \Gamma_{ij}^{(\alpha)} \equiv c_{ijkl} \gamma_{kl}^{(\alpha)} \tag{2.2}$$

К определяющим соотношениям (2.1) можно прийти, задавая свободную энергию (1.9) в виде

$$f = f_0(T) + f_{00}(c^{(\alpha)}) + c_{ijkl}\varepsilon_{ij}^c \varepsilon_{kl}^c / 2 \tag{2.3}$$

Из (3) видно, что упругий изотермический потенциал W имеет вид

$$W = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}^c\varepsilon_{kl}^c / 2 \tag{2.4}$$

Отсюда имеем обобщенный закон Гука (2.1):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\vartheta - \sum_{\alpha=1}^{n} \Gamma_{ij}^{(\alpha)} c^{(\alpha)} \tag{2.5}$$

Будем считать деформации малыми, т.е. тензор деформаций выражается через вектор перемещений $\mathbf{u}$ по соотношениям Коши [5]:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{2.6}$$

Тогда уравнения равновесия [3] могут быть записаны в виде

$$(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} - (\beta_{ij}\vartheta)_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{n} (\Gamma_{ij}^{(\alpha)} c^{(\alpha)})_{,j} + \rho F_i = 0 \tag{2.7}$$

Упругая среда является обратимой. Поэтому в уравнении притока тепла (1.34) следует положить

$$w^* = 0 \tag{2.8}$$

кроме того, ввиду малости безразмерных величин $T\alpha_{ij}$ первым слагаемым в (1.34) можно пренебречь. Тогда уравнение притока тепла можно записать для упругой среды в виде

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = (\Lambda_{ij}T_{,j})_{,i} + \sum_{\alpha} (B_{ij}^{(\alpha)} c_{,j}^{(\alpha)})_{,i} + \sum_{\alpha=1}^{m} [Q_{ijkl}^{(\alpha)}]_{,i} + \rho q \tag{2.9}$$

Заметим, что диффузионный поток имеет незначительное влияние на тепловыделение. Поэтому вторым слагаемым в правой части (2.9) можно также пренебречь. Напряженное состояние в упругой среде оказывает слабое влияние на тепловыделение за исключением очень редких случаев [3]. Поэтому третьим слагаемым в правой части (2.9) также можно пренебречь. Таким образом получаем уравнение притока тепла, не связанное с механическими и диффузионными процессами

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = (\Lambda_{ij}T_{,j})_{,i} + \rho q \tag{2.10}$$

Диффузионные уравнения (1.37) для упругой среды имеют вид

$$\rho \frac{dc^{(\alpha)}}{dt} = (A_{ij}^{(\alpha)}T_{,j})_{,i} + \sum_{\beta=1}^{m} (D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} c_{,j}^{(\beta)})_{,i} + [Q_{ijkl}^{(\alpha)}\sigma_{kl,j}]_{,i} + R_\alpha \tag{2.11}$$

где напряжения σ_{ij} связаны с перемещением $\mathbf{u}$, температурой T и концентрациями компонентов определяющими соотношениями (2.5)

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l} - \beta_{ij}\vartheta - \sum_{\alpha=1}^{n} \Gamma_{ij}^{(\alpha)} c^{(\alpha)} \tag{2.12}$$

Заметим также, что в силу того, что из m концентраций можно исключить одну [5] следовало бы во всех введенных здесь соотношениях вести суммирование от 1 до $m - 1$. Для этого надо выполнить преобразования, рассмотренные в [5]. Однако для последующих выкладок удобнее сохранить введенные обозначения.

Итак, если позволяют соответствующие граничные условия и начальные данные, то уравнение притока тепла (2.10) можно выделить из общей системы и решить отдельно.

Зная распределение температурного поля, находим $m + 3$ неизвестных: u_i, $c^{(\alpha)}$ ($i = 1$, 2, 3; $\alpha = 1, 2,\dots, m$) из трех уравнений равновесия (2.7) и уравнений диффузии (2.11). Разумеется, сюда следует добавить необходимые граничные условия, например,

$$\sigma_{ij}n_j\,|_\Sigma = S_i^0, \quad \sum_{\beta=1}^{m} D_{ij}^{(\alpha)(\beta)}\mu_{,j}^{(\beta)}n_i\,|_\Sigma = \sum_{\beta=1}^{n}\gamma_\alpha(\mu^{(\beta)} - \mu_c^{(\beta)}) \tag{2.13}$$

и начальные данные

$$T = T^0, \quad c^{(\alpha)} = c_0^{(\alpha)} \quad \text{при} \ \ t = 0 \tag{2.14}$$

Поставленная задача, хотя и является линейной, сложна для конкретной реализации. Сами по себе трехмерные задачи теории упругости в основном реализуются только численными методами (главным образом методом конечных элементов) [6].

Трудность усугубляется тем, что в многокомпонентной среде тензоры модулей упругости являются разрывными функциями координат. Эти сложности хорошо известны [7] и для их преодоления рассмотрим метод осреднения [8].

3. Методика осреднения для задачи теплопроводности. Хотя в настоящее время разработана методика осреднения для решения задач механики композитов с нерегулярной структурой [5], здесь мы рассмотрим более простой случай: будем считать, что структура композита является периодической. Тогда все материальные функции являются периодическими функциями координат и можно ввести малый геометрический параметр α, представляющий собой отношение диаметра l ячейки периодической структуры к диаметру L всего рассматриваемого тела

$$\alpha = l/L \tag{3.1}$$

Тогда наряду с глобальными координатами $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ можно ввести локальные [8] $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\alpha \tag{3.2}$$

Будем считать, что уравнение притока тепла (2.10) выделено из общей системы уравнений. Тогда для регулярной структуры это уравнение можно записать в виде

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \Lambda_{mn}T_{,mn} + \frac{1}{\alpha}\Lambda_{mn|n}T_{,m} + \rho q \tag{3.3}$$

где запятой обозначается частная производная по глобальной координате, а вертикальной чертой по локальной.

Пусть граничные условия соответствуют закону Ньютона теплоотдачи

$$\Lambda_{ij}T_{,j}n_i\,|_\Sigma = \eta(T\,|_\Sigma - T_c) \tag{3.4}$$

а начальные данные при $t = 0$:

$$T = T^0 \tag{3.5}$$

где η – коэффициент теплоотдачи, T_c – температура окружающей среды.

Ищем решение задачи (3.3)–(3.5) в виде асимптотического разложения

$$T = \theta(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^{\infty}\alpha^q\sum_{\beta} R_{i_1\dots i_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^\beta}{t^\beta}\vartheta_{,i_1\dots i_{q-2\beta}}(\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

где суммирование по β происходит от $\beta = 0$ так, чтобы верхние индексы были положительными. Оператор дифференцирования по времени отрицательного порядка тождественно равен нулю, а нулевого порядка – единичному оператору.

Вычислим производные от функции T (3.6): $T_{,m}$, $T_{,mn}$ и $\partial T/\partial t$ и подставим разложение этих производных в уравнение теплопроводности (3.3). Приравнивая некоторым постоянным величинам выражения, стоящие при одинаковых степенях α и производных от ϑ одинакового строения, получим рекуррентную последовательность уравнений для определения локальных функций $R^{(\alpha)(\beta)}$ [8]:

$$(\Lambda_{mn}\mathcal{R}^{(q+2)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta|m}})_{|n}+(\Lambda_{i_{q+2-2\beta n}}\mathcal{R}^{(q+1)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+1-2\beta}})_{|n}+\Lambda_{i_{q+2-2\beta n}}\mathcal{R}^{(q+1)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta|n}}+$$

$$+\Lambda_{i_{q+2-2\beta}i_{q+1-2\beta}}\mathcal{R}^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q-2\beta}}-\rho c_p\mathcal{R}^{(q)(\beta-1)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}=\lambda^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q-2\beta}} \tag{3.7}$$

$$\left(q=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \beta=0,\ 1,\ldots\left[\frac{q}{2}\right]_a\right)$$

причем все локальные функции и тензоры – константы $\underset{\sim}{\lambda}^{(q)(\beta)}$ хотя бы с одним отрицательным индексом равны нулю

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^{(q)(\beta)}=0,\quad \underset{\sim}{\lambda}^{(q)(\beta)}=0 \quad \text{для}\quad q<0\quad\text{или}$$

$$\beta<0,\quad \mathcal{R}^{(0)(0)}\equiv 1 \tag{3.8}$$

Для нахождения постоянных величин $\underset{\sim}{\lambda}^{(q)(\beta)}$ имеем

$$\lambda^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}=\langle\Lambda_{i_{q+2-2\beta j}}\mathcal{R}^{(q+1)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta|j}}+\Lambda_{i_{q+2-2\beta}i_{q+1-2\beta}}\mathcal{R}^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q-2\beta}}-\rho c_p\mathcal{R}^{(q)(\beta-1)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}\rangle \tag{3.9}$$

$$(q=0,1,\ldots,\beta=0,1,\ldots)$$

где угловые скобки означают интегрирование по ячейке периодичности.

Из (3.9) при $q=0$, $\beta=0$ следует выражение для эффективного тензора теплопроводности $\underset{\sim}{\lambda}$:

$$\lambda_{ij}\equiv\lambda^{(0)(0)}_{ij}=\langle\Lambda_{ik}\mathcal{R}^{(1)(0)}_{j|k}+\Lambda_{ij}\rangle \tag{3.10}$$

причем локальные функции $\mathcal{R}^{(1)(0)}$ определяются из (3.7) при $q=-1$, $\beta=0$:

$$(\Lambda_{mn}\mathcal{R}^{(1)(0)}_{j|m}+\Lambda_{jn})_{|n}=0 \tag{3.11}$$

Если в (3.9) положим $q=0$, $\beta=1$, то получим выражение для эффективной теплоемкости

$$(\rho c_p)^*\equiv-\lambda^{(1)(0)}=\langle\rho c_p\rangle \tag{3.12}$$

Таким образом, уравнение теплопроводности (3.3) после введения условий (3.9) можно записать в виде

$$\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^{(q)}\sum_{\beta}\lambda^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\vartheta_{,i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}+\rho q=0 \tag{3.13}$$

а граничные условия (3.4) и начальные данные (3.5) представим в форме

$$\sum_{q=0}^{m}\alpha^{(q)}\sum_{\beta}\lambda^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\vartheta_{,i_1\ldots i_{q+2-2\beta}}n_{i_{q+2-2\beta}}\,|_\Sigma=$$

$$=\eta\left(\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^{(q)}\sum_{\beta}\mathcal{R}^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q-2\beta}}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\vartheta_{,i_1\ldots i_{q+1-2\beta}}\,|_\Sigma-T_c\right) \tag{3.14}$$

$$T=\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^{(q)}\sum_{\beta}\mathcal{R}^{(q)(\beta)}_{i_1\ldots i_{q-2\beta}}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\vartheta_{,i_1\ldots i_{q-2\beta}}\,|_{t=0}\quad \text{при}\quad t=0 \tag{3.15}$$

Задачу (3.13)–(3.15) можно решить обычным методом малого параметра в виде разложения

$$\vartheta=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\theta^{\{p\}} \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.13)–(3.15) и приравнивая выражения при одинаковых степенях α, получим рекуррентную последовательность задач теплопроводности для однородной среды

$$\lambda_{ij}^{(0)(0)}\theta_{,ij}^{\{p\}}+Q^{\{p\}}=\langle\rho c_p\rangle\frac{\partial\theta^{\{p\}}}{\partial t}\quad(p=0,1,\ldots) \tag{3.17}$$

$$(\lambda_{ij}^{(0)(0)}\theta_{,ij}^{\{p\}}n_j-\eta\theta^{\{p\}})|_\Sigma=R^{(p)}|_\Sigma \tag{3.18}$$

$$\theta^{\{p\}}=T^{\{p\}}\quad\text{при}\quad t=0 \tag{3.19}$$

где выходные данные задачи (3.17)–(3.19) при фиксированном p определяются из решения этой задачи при $r=1,\ldots,p-1$:

$$Q^{\{p\}}=\sum_{r=1}^{p}\sum_{\beta}\lambda_{i_1\ldots i_{r+2-2\beta}}^{(r)(\beta)}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\theta_{,i_1\ldots i_{r+2-2\beta}}^{\{p-r\}}\qquad\text{при}\quad p>0 \tag{3.20}$$

$$Q^{\{0\}}\equiv\rho q \tag{3.21}$$

$$R^{\{p\}}=\sum_{r=1}^{p}\sum_{\beta}\eta\mathcal{R}_{i_1\ldots i_{r-2\beta}}^{(r)(\beta)}\frac{\partial^{1+\beta}}{\partial t^{1+\beta}}\theta_{,i_1\ldots i_{r-2\beta}}^{\{p-r\}}-\sum_{r=1}^{p}\sum_{\beta}\lambda_{ji_1\ldots i_{r+1-2\beta}}^{(r)(\beta)}\frac{\partial^{1+\beta}}{\partial t^{1+\beta}}\theta_{,i_1\ldots i_{r+1-2\beta}}^{\{p-r\}}n_j\ \text{при}\ p>0 \tag{3.22}$$

$$R^{\{0\}}\equiv-\eta T_c$$

$$T^{\{p\}}=-\sum_{r=1}^{p}\sum_{\beta}\mathcal{R}_{i_1\ldots i_{r-2\beta}}^{(r)(\beta)}\frac{\partial^{1+\beta}}{\partial t^{1+\beta}}\theta_{,i_1\ldots i_{r-2\beta}}^{\{p-r\}}|_{t=0}\qquad\text{при}\quad p>0$$

$$T^{\{0\}}\equiv T^0$$

Итак, решение задачи механики композитов (3.3)–(3.5) свелось к решению двух рекуррентных последовательностей задач. В первой из них (3.7) определяются локальные функции $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^{(q)(\beta)}$, которые являются периодическими функциями координат. После их нахождения по формулам (3.9) определяются эффективные характеристики $\underset{\sim}{\lambda}^{(q)(\beta)}$.

Вторая рекуррентная последовательность состоит из краевых задач (3.11)–(3.19). Эти задачи сформулированы для однородной среды с уже найденными эффективными характеристиками. Точность решения исходной задачи (3.3)–(3.5) связана с выбором числа членов в разложениях (3.6), (3.16), т.е. с числом задач каждой из рекуррентных последовательностей. Так как во всех практических случаях параметр α чрезвычайно мал, часто бывает достаточно ограничиться рассмотренной в [8] теорией нулевого приближения.

Она заключается в следующем. В разложении (3.6) сохраняются только локальные функции первого уровня

$$T=\vartheta(\mathbf{x})+\alpha[\mathfrak{R}_i(\xi)\vartheta_{,i}(\mathbf{x})+\theta(\mathbf{x})] \tag{3.23}$$

где эта локальная функция удовлетворяет уравнениям (3.11)

$$(\Lambda_{mn}\mathcal{R}_{j|m}+\Lambda_{jn})_{|n}=0 \tag{3.24}$$

После решения этих уравнений (3.24) находится эффективный тензор теплопроводности $\underset{\sim}{\lambda}$ (3.10):

$$\Lambda_{ij} = \langle \Lambda_{ik} \mathcal{R}_{j|k} + \Lambda_{ij} \rangle \tag{3.25}$$

и по теории эффективного модуля [8] определяется $\vartheta(\mathbf{x})$:

$$\langle \rho c_p \rangle \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda_{ij} \vartheta_{,ij} + \rho q \tag{3.26}$$

$$\lambda_{ij} \vartheta_{,j} n_i |_{\Sigma} = \eta_0 (\vartheta |_{\Sigma} - T_c) \tag{3.27}$$

$$\vartheta = T^0 \quad \text{при } t = 0 \tag{3.28}$$

Заметим, что решение по теории нулевого приближения (3.23) отличается от решения эффективного модуля (3.26)–(3.28), так как оно в отличие от последнего учитывает реальную структуру композита.

Для слоистого композита (слои расположены перпендикулярно оси x_3) уравнения (3.24) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(\Lambda_{33} \mathcal{R}'_j + \Lambda_{j3})' = 0 \tag{3.29}$$

где штрихом обозначена производная по $\xi = \xi_3$. Решение уравнений (3.29) с учетом условий периодичности

$$\langle \mathcal{R}_j \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{R}'_j \rangle = 0 \tag{3.30}$$

имеет вид

$$\mathcal{R}_i(\xi) = \int_0^{\xi} Q_i(\eta) d\eta + \langle \xi Q_i \rangle \tag{3.31}$$

$$Q_i(\xi) \equiv \mathcal{R}'_i(\xi) = \frac{1}{\Lambda_{33}} \left[\left\langle \frac{\Lambda_{j3}}{\Lambda_{33}} \right\rangle \Big/ \left\langle \frac{1}{\Lambda_{33}} - \Lambda_{j3} \right\rangle \right] \tag{3.32}$$

Чтобы найти вектор теплового потока по теории нулевого приближения нужно найти тензор теплопроводности нулевого приближения $\underset{\sim}{\lambda}^{(0)}$:

$$\Lambda^{(0)}_{ij}(\xi) \equiv \Lambda_{i3} \mathcal{R}'_j + \Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(\xi) + \Lambda_{i3}(\xi) Q_j(\xi) \tag{3.33}$$

Эффективный тензор теплопроводности находится осреднением этого выражения

$$\Lambda_{ij} = \langle \Lambda^{(0)}_{ij} \rangle = \langle \Lambda_{ij} \rangle + \left\langle \frac{\Lambda_{i3}}{\Lambda_{33}} \right\rangle \left\langle \frac{\Lambda_{j3}}{\Lambda_{33}} \right\rangle \Big/ \left\langle \frac{1}{\Lambda_{33}} \right\rangle - \left\langle \frac{\Lambda_{i3} \Lambda_{j3}}{\Lambda_{33}} \right\rangle \tag{3.34}$$

Если каждый компонент слоистого композита – изотропен

$$\Lambda_{ij} = \Lambda \delta_{ij} \tag{3.35}$$

то эффективный тензор теплопроводности имеет две различные компоненты (трансверсально изотропная эффективная среда)

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \langle \Lambda \rangle, \quad \Lambda_{33} = 1 / \langle 1 / \Lambda \rangle \tag{3.36}$$

4. Методика осреднения упругодиффузионной задачи. Применим теперь методику, описанную в предыдущем параграфе, к диффузионно-упругой задаче

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma} = S^0_i, \quad \sum_{\beta=1}^{m} D^{(\alpha)(\beta)}_{ij} \mu^{(\beta)}_{,j} n_i \Big|_{\Sigma} = \sum_{\beta=1}^{n} \gamma_{\alpha} (\mu^{(\beta)} - \mu^{(\beta)}_c)$$

$$T = T^0, \quad c^{(\alpha)} = c^{(\alpha)}_0 \quad \text{при } t = 0$$

Используя введение малого геометрического параметра α (3.1) и локальных координат ξ (3.2), запишем уравнения равновесия (2.7) в виде

$$c_{ijkl}u_{k,lj}+\frac{1}{\alpha}c_{ijkl|j}u_{k,l}-\beta_{ij}T_{,j}-\frac{1}{\alpha}\beta_{ij|j}T-\sum_{\alpha=1}^{m}\Gamma_{ij}^{(\alpha)}c_{,j}^{(\alpha)}+\rho F_i=0 \tag{4.1}$$

Диффузионные уравнения (2.11) после подстановки в них определяющих соотношений (2.12) примут вид

$$\rho\frac{dc^{(\alpha)}}{dt}=R_{ijmn}^{(\alpha)}u_{m,nji}+\frac{1}{\alpha}R_{ijmn|i}^{(\alpha)}u_{m,nj}+\frac{1}{\alpha}R_{ijmn|j}^{(\alpha)}u_{m,ni}+\frac{1}{\alpha^2}R_{ijmn|ij}^{(\alpha)}u_{m,n}+$$
$$+B_{ij}^{(\alpha)}T_{,ij}+\frac{1}{\alpha}B_{ij|i}^{(\alpha)}T_{,j}+\frac{1}{\alpha}B_{ij|j}^{(\alpha)}T_{,i}+\frac{1}{\alpha^2}B_{ij|ij}^{(\alpha)}T+\sum_{\beta=1}^{m}$$
$$\left[\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)(\beta)}c_{,ij}^{(\beta)}+\frac{1}{\alpha}\tilde{D}_{ij|i}^{(\alpha)(\beta)}c_{,j}^{(\beta)}+\frac{1}{\alpha}\tilde{D}_{ij|j}^{(\alpha)(\beta)}c_{,i}^{(\beta)}+\frac{1}{\alpha^2}\tilde{D}_{ij|ij}^{(\alpha)(\beta)}c^{(\beta)}\right]+R_\alpha \tag{4.2}$$

$$R_{ijmn}^{(\alpha)}\equiv Q_{ijkl}^{(\alpha)}c_{klmn} \tag{4.3}$$

$$B_{ij}^{(\alpha)}\equiv A_{ij}^{(\alpha)}-Q_{ijkl}^{(\alpha)}\beta_{kl} \tag{4.4}$$

$$\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)(\beta)}\equiv D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)}-Q_{ijkl}^{(\alpha)}\beta_{kl} \tag{4.5}$$

При этом считаем, что величины $A_{ij}^{(\alpha)}, D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)}, Q_{ijkl}^{(\alpha)}$ не зависят от быстрых координат ξ.

Для решения системы уравнений (4.1) и (4.2) дадим асимптотическое разложение искомых величин

$$u_i=\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^q N_{ijk_1\ldots k_q}^{(q)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_q}(\mathbf{x}) \tag{4.6}$$

$$c^{(\alpha)}=a^{(\alpha)}(\mathbf{x})+\sum_{q=1}^{\infty}\alpha^q\sum_{\beta}S_{i_1\ldots i_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)(\alpha)}(\xi)\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\alpha_{,i_1\ldots i_{q-2\beta}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \tag{4.7}$$

а также (3.6). Все правила суммирования описаны в предыдущем пункте.

Вычислим все производные величины (4.6), (4.7), (3.6), входящие в уравнения (4.1) и (4.2). Например,

$$u_{m,l}=\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^q[N_{mjk_1\ldots k_{q+1}|l}^{(q+1)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_{q+1}}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_q}^{(q)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_{q-l}}(\mathbf{x})] \tag{4.8}$$

$$u_{m,ln}=\sum_{q=-1}^{\infty}\alpha^q[N_{mjk_1\ldots k_{q+2}|ln}^{(q+2)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_{q+2}}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_{q+1}|l}^{(q+1)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_{q+1}n}(\mathbf{x})+$$
$$+N_{mjk_1\ldots k_{q+1}|n}^{(q+1)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_{q+1}l}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_q}^{(q)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_q ln}(\mathbf{x})] \tag{4.9}$$

$$u_{m,lni}=\sum_{q=-2}^{\infty}\alpha^q[N_{mjk_1\ldots k_{q+3}|lni}^{(q+3)}(\xi)v_{j,k_1\ldots k_{q+3}}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_{q+2}|ln}^{(q+2)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_{q+2}i}(\mathbf{x})$$
$$+N_{mjk_1\ldots k_{q+2}|li}^{(q+2)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_{q+2}}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_{q+2}|ni}^{(q+2)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_{q+2}l}(\mathbf{x})+$$
$$+N_{mjk_1\ldots k_{q+1}|l}^{(q+1)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_{q+1}ni}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_{q+1}|n}^{(q+1)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_{q+1}li}(\mathbf{x})+$$
$$+N_{mjk_1\ldots k_{q+1}|i}^{(q+1)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_{q+1}ln}(\mathbf{x})+N_{mjk_1\ldots k_q}^{(q)}(\xi)\boldsymbol{v}_{j,k_1\ldots k_q lni}(\mathbf{x})] \tag{4.10}$$

Температурное поле представляется в виде асимптотического разложения (3.6). Аналогично (4.8)–(4.10) находятся производные $T_{,m}$, $T_{,ml}$.

Асимптотическое разложение концентраций можно принять в виде

$$c^{(\alpha)} = a^{(\alpha)}(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \sum_{\beta} M^{(q)(\beta)(\alpha)}_{i_1 \dots i_{q-2\beta}}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} a^{(\alpha)}_{,i_1 \dots i_{q-2\beta}}(\mathbf{x}) \tag{4.11}$$

где $a^{(\alpha)}$ – "средние" значения концентраций $c^{(\alpha)}$.

Необходимо выразить производные выражений (4.11): $c^{(\alpha)}_{,m}; c^{(\alpha)}_{,ml}$. Полученные представления производных подставляем в систему уравнений (4.1), (4.2) и проводим процедуру осреднения, описанную подробно в предыдущем параграфе.

В результате получим эффективные упруго-диффузионные характеристики, а также формулировки двух рекуррентных последовательностей задач для нахождения искомых величин с любой наперед заданной точностью.

5. Решение задачи по теории нулевого приближения. Из соотношений (4.3)–(4.5) видно, что неоднородность упругодиффузионных характеристик обусловлена неоднородностью модулей упругости и тензора теплового расширения (все величины, снабженные верхними индексами (α), (β), не зависят от координат). Поэтому решить задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, можно и по-другому. Достаточно рассмотреть термоупругую задачу без учета влияния диффузии, получить все эффективные характеристики, соответствующие такому случаю и использовать их в упругодиффузионной задаче. Так как термоупругая задача для механики композитов решена [8], то этот путь представляется более простым.

Далее не будем реализовывать его в полной мере, а остановимся только на теории нулевого приближения, о которой шла речь в п. 3. Будем считать, что по теории нулевого приближения удается найти температурное поле (3.23).

Если в (4.1) не учитывать процессы термодиффузии, то уравнения равновесия примут вид

$$c_{ijkl} u_{k,lj} + c_{ijkl|j} u_{k,l} / 2 + \rho F_i = 0 \tag{5.1}$$

К ним следует добавить некоторые граничные условия, например

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad c_{ijkl} u_{k,l} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \tag{5.2}$$

Теория нулевого приближения для этой задачи дает решение в виде

$$u_i = \nu_i(\mathbf{x}) + \alpha[N_{ijk}(\boldsymbol{\xi}) \nu_{j,k}(\mathbf{x}) + \omega_i] \tag{5.3}$$

где $\mathbf{v}$ – решение задачи по теории эффективного модуля

$$h_{ijkl} \nu_{k,lj} + \rho F_i = 0 \tag{5.4}$$

$$\nu_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad h_{ijkl} \nu_{k,l} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \tag{5.5}$$

Вектор $\mathbf{w}$ удовлетворяет однородным уравнениям равновесия (5.4) и граничным условиям

$$\omega_i\big|_{\Sigma_1} = -N_{ijk}(\boldsymbol{\xi}) \nu_{j,k}(\mathbf{x})\big|_{\Sigma_1} \tag{5.6}$$

Локальные функции первого уровня $N_{ijk}(\xi)$ определяются из решения задачи [8]:

$$[c_{ijml}(\boldsymbol{\xi}) N_{mnk|l} + c_{ijkn}(\boldsymbol{\xi})]_{|j} = 0 \tag{5.7}$$

причем выполняются условия на ячейке периодичности

$$\langle N_{mnk} \rangle = 0 \tag{5.8}$$

и условия отсутствия разрывов локальных функций при переходе из одной ячейки периодичности в другую [8]:

$$[[N_{mnk}]] = 0 \tag{5.9}$$

Тензор эффективных модулей упругости по найденным локальным функциям получается простым осреднением

$$h_{ijkl} = \langle c_{ijml}(\xi) N_{mnk|l} + c_{ijnk}(\xi) \rangle \tag{5.10}$$

Тогда тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}^{э}$ по теории эффективного модуля вычисляется по формуле

$$\sigma_{ij}^{э} = h_{ijkl} v_{k,l} \tag{5.11}$$

а по теории нулевого приближения по формуле

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^{(0)}(\xi) v_{k,l} \tag{5.12}$$

где $\underset{\sim}{c}^{(0)}(\xi)$ – тензор модулей упругости нулевого приближения [8]

$$c_{ijkl}^{(0)}(\xi) = c_{ijpq}(\xi) N_{pkl|q}(\xi) + c_{ijkl}(\xi) \tag{5.13}$$

при этом

$$\langle c_{ijkl}^{(0)} \rangle = h_{ijkl} \tag{5.14}$$

Предположим, что проделаны описанные выше процедуры для исследуемого композита. Вернемся к задаче (4.1), (4.2). Ее решение по теории нулевого приближения может быть представлено в виде (5.3) и, как следует из (4.11), в виде

$$c^{(\alpha)} = \alpha^{\alpha}(\mathbf{x}) + \alpha[M_i(\xi)\alpha_{,i}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x})] \tag{5.15}$$

Тогда теория нулевого приближения для задачи (4.1), (4.2) будет выглядеть так

$$h_{ijkl} v_{k,lj} - \beta_{ij}^{*} T_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{m} \Gamma_{ij}^{(\alpha)} c_{,j}^{(\alpha)} + \rho F_i = 0 \tag{5.16}$$

$$\rho \frac{\partial c^{(\alpha)}}{\partial t} = R_{ijmn}^{*(\alpha)} v_{m,nji} + B_{ij}^{*(\alpha)} T_{,ij} + \sum_{\beta=1}^{m} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)(\beta)} c_{,ij} + R_{\alpha} \tag{5.17}$$

где $\beta_{ij}^{*}, R_{ijmn}^{*(\alpha)}, B_{ij}^{*(\alpha)}, \tilde{D}_{ij}^{*(\alpha)(\beta)}$ – эффективные характеристики, соответствующие величинам $\beta_{ij}, R_{ijmn}^{(\alpha)}, B_{ij}^{(\alpha)}, \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)(\beta)}$.

Теплофизический тензор нулевого приближения $\beta^{(0)}$ находится следующим образом [8]:

$$\beta_{ij}^{(0)}(\xi) = \beta_{ij}(\xi) - c_{ijkl}(\xi) N_{k|l} \tag{5.18}$$

где локальная вектор-функция $\mathbf{N}(\xi)$ определяется из решения уравнений

$$[c_{ijmn} N_{m|n} - \beta_{ij}]_{|j} = 0 \tag{5.19}$$

После чего находим

$$\beta_{ij}^{*} = \langle \beta_{ij}^{(0)} \rangle \tag{5.20}$$

Тензоры нулевого приближения $R_{ijmn}^{(0)(\alpha)}, \beta_{ij}^{(0)(\alpha)}, \tilde{D}_{ij}^{(0)(\alpha)(\beta)}$ находятся по формулам (4.3)–(4.5):

$$R_{ijmn}^{(0)(\alpha)} = Q_{ijkl}^{(\alpha)} c_{klmn}^{(0)}(\xi) \tag{5.21}$$

$$B_{ij}^{(0)(\alpha)} = A_{ij}^{(\alpha)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)}\beta_{kl}^{(0)}(\xi) \tag{5.22}$$

$$\tilde{D}_{ij}^{(0)(\alpha)(\beta)} = D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)}\beta_{kl}^{(0)}(\xi) \tag{5.23}$$

Тогда эффективные характеристики, входящие в уравнения (5.17), определяются следующим образом:

$$R_{ijmn}^{*(\alpha)} = Q_{ijkl}^{(\alpha)}\langle c_{klmn}^{(0)}\rangle = Q_{ijkl}^{(\alpha)}h_{klmn} \tag{5.24}$$

$$B_{ij}^{*(\alpha)} = A_{ij}^{(\alpha)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)}\langle\beta_{kl}^{(0)}\rangle = A_{ij}^{(\alpha)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)}\beta_{kl}^{*} \tag{5.25}$$

$$\tilde{D}_{ij}^{*(\alpha)(\beta)} = D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)}\langle\beta_{kl}^{(0)}\rangle = D_{ij}'^{(\alpha)(\beta)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)}\beta_{kl}^{*} \tag{5.26}$$

Зная все полученные характеристики, можно найти решение поставленной упругодиффузионной задачи в нулевом приближении, т.е. с учетом неоднородности структуры.

6. Тензоры концентрации напряжений и массовых концентраций диффундирующих компонентов. Если рассмотреть слоистые композиты, то быстрой координатой будет только одна, например $\xi_3 = \xi$, направленная перпендикулярно слоям. Для таких композитов рекуррентная последовательность задач, связанных с ячейкой периодичности, становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены аналитически.

Для задачи теплопроводности этот случай рассмотрен в п. 3. Уравнения "равновесия" (5.7) для слоистого композита принимают вид

$$[c_{i3m3}(\xi)N_{mnk}'(\xi)]' + c_{i3nk}'(\xi) = 0 \tag{6.1}$$

где штрихом обозначена производная по ξ.

Решение уравнений (6.1) с учетом дополнительных условий (5.8), (5.9) имеет вид:

$$N_{mnk}(\xi) = L_{mnk}(\xi) - \langle L_{mnk}\rangle \tag{6.2}$$

$$L_{mnk}(\xi) = \int_0^{\zeta} c_{m3i3}^{-1}(\eta)[\langle c_{m3p3}^{-1}\rangle^{-1}\langle c_{p3q3}^{-1}c_{q3nk}\rangle - c_{i3nk}(\eta)]d\eta \tag{6.3}$$

Здесь под c_{m3i3}^{-1} понимается элемент матрицы 3×3, обратной к матрице $\|c_{i3m3}\|$.

Тензор модулей упругости нулевого приближения (5.13) примет вид

$$c_{ijnk}^{(0)}(\xi) = c_{ijnk}(\xi) + c_{ijm3}(\xi)[c_{m3l3}^{-1}(\xi)\times\langle c_{l3p3}^{-1}\rangle^{-1}\langle c_{p3q3}^{-1}c_{q3nk}\rangle - c_{m3l3}^{-1}(\xi)c_{l3nk}(\xi)] \tag{6.4}$$

Поэтому эффективный тензор модулей упругости (5.14) выражается следующим образом

$$h_{ijnk} \equiv \langle c_{ijnk}^{(0)}\rangle = \langle c_{ijnk}\rangle + \langle c_{ijm3}c_{m3l3}^{-1}\rangle\langle c_{l3p3}^{-1}\rangle^{-1}\langle c_{p3q3}^{-1}c_{q3nk}\rangle -$$

$$-\langle c_{ijm3}c_{m3l3}^{-1}c_{l3nk}\rangle \tag{6.5}$$

Если каждый компонент слоистого композита является изотропным

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{6.6}$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, то из 18 независимых локальных функций N_{mnk} (6.2) отличными от нуля будут только три независимые компоненты, причем из (6.3) следует

$$L_{333} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \xi$$

$$L_{113} = L_{223} = \int_0^\xi \left[\frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right] d\xi \tag{6.7}$$

$$L_{131} = L_{232} = L_{311} = L_{33\Sigma} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\mu\langle 1/\mu\rangle} - \xi$$

Компонентами тензора модулей упругости нулевого приближения, отличными от нуля, в этом случае являются

$$c^{(0)}_{1111} = c^{(0)}_{2222} = \lambda + 2\mu + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\langle \nu/(1-\nu)\rangle}{\Theta}$$

$$c^{(0)}_{3333} = \frac{1}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} = \frac{1}{\Theta}$$

$$c^{(0)}_{1122} = \lambda + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\langle \nu/(1-\nu)\rangle}{\Theta}$$

$$c^{(0)}_{1133} = c^{(0)}_{2233} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\Theta}$$

$$c^{(0)}_{3311} = c^{(0)}_{3322} = \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} = \frac{\langle \nu/(1-\nu)\rangle}{\Theta}$$

$$c^{(0)}_{1212} = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$c^{(0)}_{1313} = c^{(0)}_{2323} = \frac{1}{\langle 1/\mu\rangle} = \frac{1}{2\langle (1+\nu)/E\rangle} \tag{6.8}$$

$$\Theta = \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle$$

Из 21 независимой компоненты эффективного тензора модулей упругости отличными от нуля являются только 5 независимых компонент (как для трансверсально изотропного материала)

$$h_{1111} = h_{2222} = \langle \lambda+2\mu\rangle + \left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{-1}\left\langle \frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle^{2} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right\rangle = \left\langle \frac{E}{1-\nu^2}\right\rangle + \frac{\langle \nu(1-\nu)\rangle^2}{\Theta}$$

$$h_{3333} = \frac{1}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} = \frac{1}{\Theta}$$

$$h_{1133} = h_{2233} = \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} = \frac{\langle \nu/(1-\nu)\rangle}{\Theta}$$

$$h_{1212} = \frac{1}{2}(h_{1111} - h_{1122}) = \langle \mu\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \frac{E}{(1+\nu)}\right\rangle$$

$$h_{1313} = h_{2323} = \frac{1}{\langle 1/\mu\rangle} = \frac{1}{2\langle (1+\nu)/E\rangle} \tag{6.9}$$

Из формул (5.21)–(5.23) для слоистого композита определяются тензоры нулевого приближения $R^{(0)(\alpha)}_{ijmn}, \beta^{0(\alpha)}_{ij}, \tilde{D}^{(0)(\alpha)(\beta)}_{ij}$, а из формул (5.24)–(5.26) – эффективные характеристики $\beta^*_{ij}, R^{*(\alpha)}_{ijmn}, B^{*(\alpha)}_{ij}, \tilde{D}^{*(\alpha)(\beta)}_{ij}$.

Если теперь рассмотреть постановку задачи теории упругости в напряжениях, то повторяя выкладки, проведенные в [8], можно на основании тензора упругой податливости $\underset{\sim}{J}$, который является взаимообратным с тензором модулей упругости $\underset{\sim}{c}$:

$$c_{ijkl}J_{klmn} = J_{ijkl}c_{kmn} = \Delta_{ijmn} \equiv 1/2(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \tag{6.10}$$

получить тензор упругой податливости нулевого приближения $J^{(0)}_{ijkl}(\xi)$.

Тогда напряжения по теории нулевого приближения $\sigma^{(0)}_{ij}$ можно выразить через напряжения по теории эффективного модуля $\sigma^{э}_{ij} \equiv \tau_{ij}$ по формуле

$$\sigma^{(0)}_{ij}(\xi) = c_{ijkl}(\xi)J^{(0)}_{klmn}(\xi)\tau_{mn} \equiv A_{ijmn}(\xi)\tau_{mn} \tag{6.11}$$

где $A_{ijmn}(\xi)$ – тензор концентрации напряжений. Если для неограниченной среды на бесконечности задано однородное напряженное состояние, то этот тензор позволяет вычислить концентрацию напряжений, возникающую за счет неоднородности структуры композита.

Аналогично деформации по теории нулевого приближения $\varepsilon^{(0)}_{ij}$ выражаются через деформации по теории эффективного модуля $\varepsilon^{э}_{ij} \equiv v_{(i,j)}$ по формуле

$$\varepsilon^{(0)}_{ij}(\xi) = J_{ijkl}(\xi)c^{(0)}_{klmn}v_{(m,n)} \equiv B_{ijmn}(\xi)v_{(m,n)} \tag{6.12}$$

где $B_{ijmn}(\xi)$ – так называемый тензор концентрации деформаций. Тензоры $A_{ijmn}(\xi)$ и $B_{ijmn}(\xi)$ взаимообратными не являются, а связаны между собой зависимостями

$$\begin{gathered} B_{ijmn}(\xi) = J_{ijkl}(\xi)A_{klqp}(\xi)h_{pqmn} \\ A_{ijmn}(\xi) = C_{ijkl}(\xi)B_{klqp}(\xi)H_{pqmn} \end{gathered} \tag{6.13}$$

$$H_{ijpq} = \langle J_{ijnl}S_{klpq} + J_{ijpq}\rangle \tag{6.14}$$

где H_{pqmn} – эффективный тензор упругих податливостей, а $S_{klpq}(\xi)$ – локальные функции, которые определяются из решения системы уравнений

$$\epsilon_{mir}\epsilon_{njs}(J_{ijkl}S_{klpq} + J_{ijpq})_{|rs} = 0 \tag{6.15}$$

При решении задачи в напряжениях приходится решать уравнения совместности и уравнения равновесия (в постановке [6] уравнения равновесия сносятся на границу). В таком случае задача решается уже не относительно основных величин (перемещений, температуры, концентраций компонентов), а относительно их потоков (напряжений, векторов теплового и диффузионных потоков) [3].

Для этого определяющие соотношения

$$q_i = -\Lambda_{ij}T_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{m} A^{(\alpha)}_{ij}\mu^{(\alpha)}_{,j}, \qquad j^{(\alpha)}_i = -A^{(\alpha)}_{ij}T_{,j} - \sum_{\beta=1}^{m} D^{(\alpha)(\beta)}_{ij}\mu^{(\beta)}_{,j}$$

нужно "обратить" в виде

$$T_{,i} = -X_{ij}q_j - \sum_{\alpha=1}^{m} \alpha^{(\alpha)}_{ij}j^{(\alpha)}_j \tag{6.16}$$

$$\mu_{,i} = -a^{(\alpha)}_{ij}q_j - \sum_{\beta=1}^{m} G^{(\alpha)(\beta)}_{ij}j^{(\beta)}_j \tag{6.17}$$

Выражения химических потенциалов (1.28) можно записать так

$$c^{(\alpha)} = e_\alpha T_0 + \sum_\beta g^{(\alpha)(\beta)} \mu^{(\beta)} + \tilde{\gamma}_{ij}^{(\alpha)} \sigma_{ij} \tag{6.18}$$

Тогда соотношения (1.29) примут вид (6.16), а соотношения (6.31)

$$c_{,i}^{(\alpha)} = -u_{ij}^{(\alpha)} q_j - \sum_{\beta=1}^{m} G_{ij}^{(\alpha)(\beta)} j_j^{(\beta)} + \tilde{\gamma}_{il}^{(\alpha)} \sigma_{kl,i} \tag{6.19}$$

Обозначения, введенные в (6.16)–(6.19) очевидны.

Продифференцируем по координате уравнения диффузии

$$\rho / dc_{,i}^{(\alpha)} / dt = -j_{k,ki}^{(\alpha)} + R_{\alpha,i} \tag{6.20}$$

Подставив в уравнения (6.20) выражения (6.19), получим систему уравнений диффузии, сформулированную в диффузионных потоках

$$\rho \left[\sum_{\beta=1}^{m} G_{ij}^{\prime(\alpha)(\beta)} \frac{\partial j_j^{(\beta)}}{\partial t} + u_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial q_j}{\partial t} - \tilde{\gamma}_{kl}^{(\alpha)} \frac{\partial \sigma_{kl,i}}{\partial t} \right] = j_{k,ki}^{(\alpha)} - R_{\alpha,i} \tag{6.21}$$

Очевидно, что с уравнением притока тепла можно проделать ту же процедуру. Далее рассмотрим стационарный случай. Тогда из уравнения $\rho T ds/dt = \rho q - q_{i,i} + w^*$ для упругой среды будем иметь

$$q_{i,i} = \rho q \tag{6.22}$$

К уравнениям (6.21) и (6.22) следует добавить уравнения совместности

$$\epsilon_{kij} j_{j,i}^{(\alpha)} = 0 \tag{6.23}$$

$$\epsilon_{kij} q_{j,i} = 0 \tag{6.24}$$

Задача теплопроводности (6.22), (6.24) может быть решена отдельно. Зная тепловые потоки можно решить и задачу диффузионной упругости, сформулированную в напряжениях и диффузионных потоках.

Пусть концентрации компонентов по теории эффективного модуля

$$c_э^{(\alpha)} = d^{(\alpha)} \tag{6.25}$$

Тогда диффузионные потоки по теории нулевого приближения согласно формулам (1.30) будут иметь вид

$$j_i^{(0)(\alpha)} = -A_{ij}^{(\alpha)} \theta_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{m} D_{ij}^{\prime(\alpha)(\beta)} d_{,j}^{(\beta)} - Q_{ijkl}^{(\alpha)} \tau_{kl,j} \tag{6.26}$$

где θ – температура, а $\tau_{ij} = \sigma_{ij}^{э}$ – напряжения по теории эффективного модуля. Тепловые потоки по теории нулевого приближения согласно (1.28) выглядят так

$$q_i^{(0)} = -\Lambda_{ij} \theta_{,j} - \sum_{\alpha=1}^{m} B_{ij}^{(\alpha)} d_{,j}^{(\alpha)} - \sum_{\alpha=1}^{m} q_{ijkl}^{(\alpha)} \tau_{kl,j} \tag{6.27}$$

Тогда для градиентов концентраций компонентов по теории нулевого приближения, используя формулы (6.19), (6.26) получим

$$c_{,i}^{(0)(\alpha)} = U_{ij}^{(\alpha)} \theta_{,j} + \sum_{\beta=1}^{m} V_{ij}^{(\alpha)(\beta)} d_{,j}^{(\beta)} + W_{ijkl}^{(\alpha)} \tau_{kl,j} \tag{6.28}$$

$$U_{ij}^{(\alpha)} \equiv u_{ik}^{(\alpha)} \Lambda_{kj} + \sum_{\beta=1}^{m} G_{ik}^{\prime(\alpha)(\beta)} A_{kj}^{(\beta)} \tag{6.29}$$

$$V_{ij}^{(\alpha)(\beta)} \equiv u_{ik}^{(\alpha)} B_{kj}^{(\beta)} + \sum_{\gamma=1}^{m} G_{ik}^{\prime(\alpha)(\beta)} D_{kj}^{\prime(\alpha)(\beta)} \tag{6.30}$$

$$W_{ijkl}^{(\alpha)} \equiv u_{in}^{(\alpha)} q_{njkl} + \sum_{\beta=1}^{m} G_{in}^{\prime(\alpha)(\beta)} Q_{njkl}^{(\beta)} \tag{6.31}$$

Следовательно, если на бесконечности (для неограниченной среды) задано однородное "градиентное" напряженное состояние $\tau_{kl,j}$ = const, постоянные градиенты температуры $\theta_{,j}$ = const и концентраций $d_{,j}$ = const, то градиенты концентраций компонентов, возникающие за счет неоднородности структуры деформаций, выражаются по формулам (6.28) с учетом соответствующих тензоров концентраций (6.29)–(6.31).

Можно, разумеется, дать соответствующие выражения и для градиента температуры

$$T_{,i}^{(0)} = Y_{ij}\theta_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{m} Z_{ij}^{(\alpha)} d_{,j}^{(\alpha)} + \Phi_{ijkl}\tau_{kl,j} \tag{6.32}$$

$$Y_{ij} \equiv X_{ik} B_{kj}^{(\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{m} a_{ik}^{(\alpha)} A_{kj}^{(\alpha)} \tag{6.33}$$

$$Z_{ij}^{(\alpha)} \equiv X_{ik} B_{kj}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^{m} a_{ik}^{(\beta)} D_{kj}^{\prime(\beta)(\gamma)} \tag{6.34}$$

$$\Phi_{ijkl} \equiv \sum_{\alpha=1}^{m} (X_{im} q_{mjkl}^{(\alpha)} + a_{im}^{(\alpha)} Q_{mjkl}^{(\alpha)}) \tag{6.35}$$

Если на бесконечности градиенты соответствующих величин отсутствуют, нужно исключить отвечающие им тензоры концентраций в формулах (6.28) и (6.32).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00125).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Модели механики сплошной среды // Фундамент и прикл. математика. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 93–127.
2. *Победря Б.Е., Гузей И.Л.* Моделирование процессов обработки композиционных материалов // Механика композит. материалов. 1997. Т. 33. № 1. С. 13–22.
3. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 368 с.
4. *Соколовская Е.М., Гудзей Л.С.* Металлохимия. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
6. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: Фан, 1988. 198 с.
7. *Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 300 с.
8. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.07.1998