

УДК 539.3

© 2000 г. В.С. ДАВЫДОВ, Е.Н. ЧУМАЧЕНКО

**МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МКЭ ПРИ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ О ФОРМОИЗМЕНЕНИИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Рассмотрена методика реализации контактного взаимодействия деформируемого материала с жестким инструментом при решении задач о формоизменении сплошной среды с применением метода конечных элементов. В качестве закона трения выбрана формула Леванова–Колмогорова, позволяющая учесть шероховатость поверхности инструмента, адгезионные свойства пары деформируемый металл – инструмент, наличие окисных пленок, наличие, характер и толщину смазки и т.п. Установлены критерии для зон скольжения и прилипания. Приведен алгоритм расчета протяженности этих зон. Методика реализации контактного взаимодействия позволяет внести граничные условия в матрицу жесткости без нарушения ее симметрии и способа хранения в памяти компьютера. Рассмотрены двумерный и трехмерный случаи, показана реализация методики на простом примере. Алгоритмы использованы в вычислительной системе SPLEN и прошли успешное промышленное опробование.

Краевые задачи, описывающие процессы ОМД (газостатическая формовка, объемная изотермическая штамповка, штамповка в условиях сверхпластичности, прокатка и т.п.), относятся к задачам с изменяющимися во времени границами. До решения задачи известны только лишь начальные условия на границе деформируемого тела. Граничные условия в момент времени $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ определяются напряженно-деформированным состоянием заготовки в момент времени t_i и могут быть найдены из решения задачи при $t = t_i$.

Разобьем полную границу тела S на три участка, характеризуемые различным типом граничных условий: на части поверхности S_σ действуют поверхностные силы Q , на другой части поверхности S_u задан вектор скоростей перемещений u , на участке $S_{\sigma u}$ заданы смешанные граничные условия контактного типа и $S = S_\sigma + S_u = S_{\sigma u}$.

Граничные условия в напряжениях на интервале изменения времени $[t, t + \Delta t]$ задаются на конфигурации границы $S|_t$, определенной решением задачи на интервале $[t - \Delta t, t]$, исходя из заданного закона нагружения $Q(t)$:

$$\sigma = Q(t) \text{ на } S_\sigma \quad (1)$$

где σ – вектор напряжений, $Q(t)$ – вектор распределенных поверхностных сил. Аналогично задаются граничные условия в скоростях

$$u = \omega(t) \text{ на } S_u \quad (2)$$

На контактной поверхности $S_{\sigma u}$ существуют зоны прилипания и скольжения, от соотношения которых зависят деформации во всем объеме деформируемого тела. Для определения этих зон введем критерии начала скольжения точки по поверхности инструмента и ее остановки. Для каждой контактной точки граничные условия на $S_{\sigma u}$ будут кинематические при прилипании и смешанные при скольжении. Поскольку величина возникающих напряжений трения связана с напряженно-деформированным

состоянием материала в приконтактном слое и заранее неизвестна, примем, что граничные условия на интервале Δt определяются по решению задачи на предыдущем интервале $[t-\Delta t, t]$.

Скольжение начнется при условии, когда касательные напряжения превысят напряжение трения покоя, остановка контактных точек осуществится по условию обращения в нуль касательных напряжений или скоростей контактных скольжений [1, 2]. В качестве закона трения выбрана формула Леванова, описывающая нелинейную зависимость касательных напряжений τ^L от напряженно-деформированного состояния в приконтактном слое [3]:

$$\tau^L = k_f 0,58 \sigma_u [1 - \exp(-1,25 |P| \sigma_u)] \quad (3)$$

где σ_u – интенсивность напряжений в приконтактном слое, P – нормальное давление.

Обобщенная характеристика контактной поверхности k_f по данным работы [3], учитывает следующие факторы процесса трения: шероховатость поверхности инструмента и заготовки, адгезионные свойства пары деформируемый металл-инструмент, наличие окисных пленок, наличие, характер и толщину смазки, наличие и свойства покрытий, температуру на контакте и т.п.

На $S_{\sigma u}$ для зоны прилипания:

$$\mathbf{u}|_{t+\Delta t} = \mathbf{v}|_{t+\Delta t} \quad (4)$$

Условие (4) выполняется в случае, если справедливо хотя бы одно из соотношений (5) или (6)

$$u^k|_t = 0, \quad |\tau|_t \leq \tau^L|_t \quad (5)$$

$$u^k|_t \neq 0, \quad \exists t^* \in [t - \Delta t, t]: |\tau|_{t^*} = 0 \quad (6)$$

Для зоны скольжения:

$$(\mathbf{u}|_{t+\Delta t} - \mathbf{v}|_{t+\Delta t}) \mathbf{n} = 0, \quad \tau|_{t+\Delta t} = -\tau^L|_t \mathbf{E} \quad (7)$$

Условия (7) выполняются в случае, если справедливо хотя бы одно из соотношений (8) или (9):

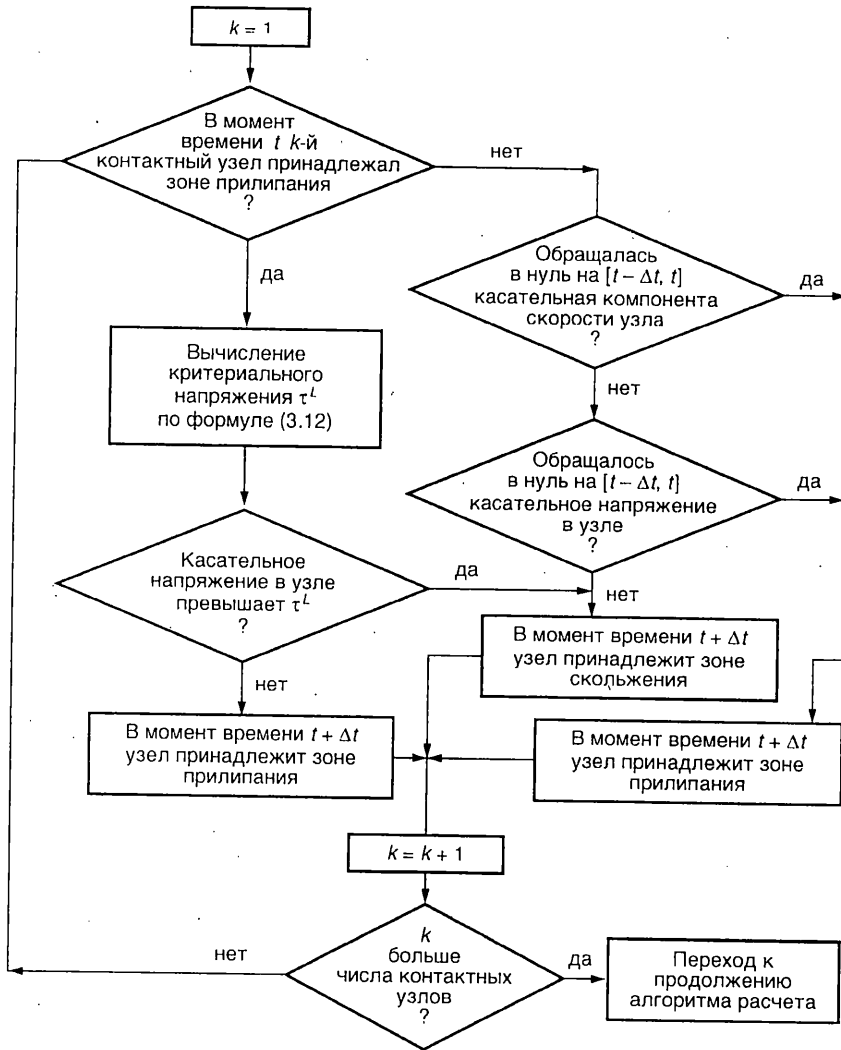
$$u^k|_t = 0, \quad |\tau|_t > \tau^L|_t \quad (8)$$

$$u^k|_t \neq 0, \quad \forall t^* \in [t - \Delta t, t]: |\tau|_{t^*} \neq 0 \quad (9)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности, \mathbf{v} – скорость движения штампа, $\mathbf{E} = [(\mathbf{u}-\mathbf{v})/|\mathbf{u}-\mathbf{v}|]_t$, u^k – касательная компонента скорости контактной точки.

На первом малом шаге деформирования на всей контактной поверхности принимаются условия прилипания, на втором – производится оценка напряженного состояния в приконтактном слое материала и определяются участки контактной поверхности, на которых реализуются зоны прилипания и скольжения. На последующих шагах по времени для зон прилипания проводится проверка на превышение модуля касательного напряжения – τ^L , для зон скольжения оценивается условие падения до нуля скоростей контактных точек и касательных напряжений. При выполнении указанных условий на участках поверхности меняется тип граничного условия: в первом случае – с (4) на (7), для второго случая – с (7) на (4). Алгоритм определения зон прилипания и скольжения представлен на блок-схеме фиг. 1.

Внесение кинематических граничных условий, когда определены одна или обе компоненты вектора узловых скорости, в разрешающую систему линейных алгебраических уравнений МКЭ может быть осуществлено различными способами [4, 5] и не представляет затруднений. Естественно, большинством исследователей избирается



Фиг. 1

способ, позволяющий сохранить симметрию матрицы жесткости и не ленточную структуру. Внесение кинематического условия непроницаемости инструмента, выражающего закон связи между компонентами узловой скорости, приводит, вообще говоря, к нарушению симметрии матрицы жесткости [6, 7], причем восстановление симметрии возможно лишь при задании контактных граничных условий в напряжениях в виде $|\Delta \tau| = 0$ [18].

В связи с этим ниже предлагается способ реализации контактных граничных условий при расчетах методом конечных элементов без нарушения симметрии матрицы жесткости.

Двумерный случай. Пусть дана система алгебраических уравнений МКЭ

$$A \cdot u = P$$

(10)

$$A = \| a_{ij} \| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где A – симметричная матрица, $a_{ij} = a_{ji}$, n – порядок системы уравнений, в которой неизвестные u_k и u_{k+1} представляют собой составляющие по осям OX , OY (некоторой постоянной системы координат) вектора скорости \mathfrak{D} точки среды Γ , контактирующей с инструментом (фиг. 2,а), а правые части k -го и $k+1$ -го уравнений P_k и P_{k+1} – соответственно компоненты внешней нагрузки, приложенной в точке Γ , по направлениям OX , OY .

Пусть в точке Γ требуется задать граничное условие типа условия непроницаемости инструмента:

$$(\mathfrak{D} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (11)$$

где $\mathfrak{D} = \{u_k, u_{k+1}\}$ – вектор скорости точки среды, \mathbf{V} – вектор заданной скорости инструмента, \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности инструмента в точке Γ . Вводя обозначения ϑ_n и V_n для нормальных к поверхности инструмента составляющих векторов \mathfrak{D} и \mathbf{V} , условие (11) запишем в виде:

$$\vartheta_n = V_n \quad (12)$$

Для того, чтобы внесение граничного условия непроницаемости (12) не приводило к нарушению симметрии матрицы системы алгебраических уравнений МКЭ, удобно вместо переменных u_k и u_{k+1} и соответствующих им узловых нагрузок P_k и P_{k+1} ввести новые переменные u'_k и u'_{k+1} и соответствующие им узловые нагрузки P'_k и P'_{k+1} по формулам:

$$\begin{cases} u'_k \\ u'_{k+1} \end{cases} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{cases} u_k \\ u_{k+1} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} P'_k \\ P'_{k+1} \end{cases} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{cases} P_k \\ P_{k+1} \end{cases}$$

где α – угол между касательной к поверхности инструмента в точке Γ и осью OX , или, что то же, угол между нормалью \mathbf{n} и осью OY (фиг. 2,б).

При этом остальные неизвестные u_i (при $i \neq k, k+1$) и узловые нагрузки P_i (при $i \neq k, k+1$) остаются без изменения. Преобразование глобальных векторов $\mathbf{u} = \{u_i\}$ и $\mathbf{P} = \{P_i\}$ при этом выражается формулами

$$\mathbf{u}' = Q \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{P}' = Q \cdot \mathbf{P}$$

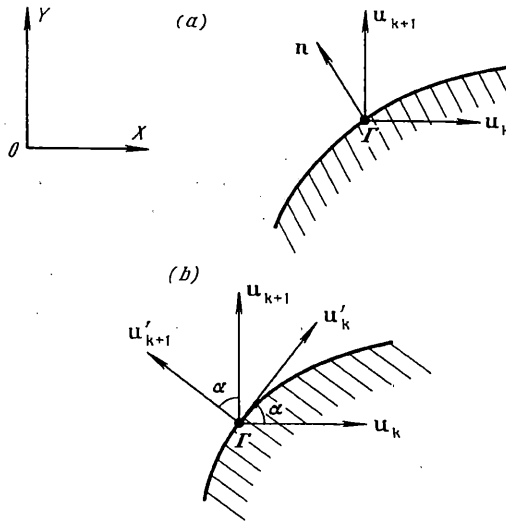
где матрица преобразований Q имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} 1 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 \dots 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 \dots 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \dots 0 \\ \hline 0 \dots 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

В матрице выделены k -я, $(k+1)$ -я строки и k -й, $(k+1)$ -й столбцы. Таким образом, преобразованная система алгебраических уравнений МКЭ примет вид

$$A' \mathbf{u}' = \mathbf{P}' \quad (15)$$

$$A' = Q A Q^T \quad (16)$$



Фиг. 2

Действительно, так как матрица Q ортогональна, то $Q^{-1} = Q^T$ и, следовательно

$$\mathbf{u} = Q^{-1}\mathbf{u}' = Q^T\mathbf{u}', \quad \mathbf{P} = Q^T\mathbf{P}' \quad (17)$$

Подставляя полученные выражения в (10), найдем

$$AQ^T\mathbf{u}' = Q^T\mathbf{P}', \quad QAQ^T\mathbf{u}' = \mathbf{P}'$$

Внесение условия непроницаемости (12), принимающего в новых переменных вид

$$u'_{n+1} = v_n \quad (18)$$

в систему (11) не нарушает симметрию матрицы A' .

После решения задачи МКЭ возврат к старым переменным u_k, u_{k+1} или нагрузкам P_k, P_{k+1} производится по формулам:

$$\begin{cases} u_k \\ u_{k+1} \end{cases} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{cases} u'_k \\ u'_{k+1} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} P_k \\ P_{k+1} \end{cases} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{cases} P'_k \\ P'_{k+1} \end{cases}$$

Замечание 1. В силу порядка введения очевидна эквивалентность $P'_k \equiv P_\tau$ – касательной нагрузке, а $P'_{k+1} \equiv P_n$ – нормальной нагрузке в точке Γ .

Замечание 2. Так как собственные значения матриц A и $A' = Q \cdot A \cdot Q^T$, где Q – ортогональная матрица, совпадают, то преобразование (16) не изменяет число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

Замечание 3. Разумеется, на практике нерентабельно получать преобразованную матрицу системы A' путем умножения матриц по формуле (16). Действительно, представим матрицу (17) в виде блочной матрицы:

$$Q = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad (20)$$

где E_1 – единичная матрица размера $(k-1) \times (k-1)$; E_2 – единичная матрица размера $(n-k-1) \times (n-k-1)$; C – ортогональная матрица поворота размера 2×2 .

Аналогично разобьем на соответствующие клетки

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} \end{vmatrix} \quad (21)$$

где A_{11}, A_{22}, A_{33} – симметричные квадратные матрицы, а размеры полученных блоков есть: $\dim(A_{11}) = (k-1) \times (k-1)$, $\dim(A_{12}) = (k-1) \times 2$, $\dim(A_{13}) = (k-1) \times (n-k-1)$, $\dim(A_{22}) = 2 \times 2$, $\dim(A_{23}) = 2 \times (n-k-1)$, $\dim(A_{33}) = (n-k-1) \times (n-k-1)$.

Тогда, используя правила умножения клеточных матриц, получим

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^T = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & C^T & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12}C^T & A_{13} \\ CA_{12}^T & CA_{22}C^T & CA_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T C^T & A_{33} \end{vmatrix}$$

В силу симметрии матриц A и A' рассмотрим только верхний треугольник каждой из этих матриц. Из (22) видно, изменились лишь блоки A_{12}, A_{22}, A_{23} , то есть преобразование (16) затрагивает только элементы k -го и $k+1$ -го столбцов, а также k -й и $k+1$ -й строк. Новые блоки $A'_{12}, A'_{22}, A'_{23}$ находятся по формулам

$$A'_{12} = A_{12}C^T, \quad A'_{22} = CA_{22}C^T, \quad A'_{23} = CA_{23} \quad (23)$$

Развернув матричные формулы (23), можно найти

$$a'_{ik} = a_{ik} \cos \alpha + a_{ik+1} \sin \alpha \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \quad (24)$$

$$a'_{ik+1} = -a_{ik} \sin \alpha + a_{ik+1} \cos \alpha$$

$$a'_{kj} = a_{kj} \cos \alpha + a_{k+1j} \sin \alpha \quad (j=k+2, \dots, n)$$

$$a'_{k+1j} = -a_{kj} \sin \alpha + a_{k+1j} \cos \alpha \quad (25)$$

$$a'_{kk} = a_{kk} \cos^2 \alpha + 2a_{kk} \sin \alpha \cos \alpha + a_{k+1k+1} \sin^2 \alpha$$

$$a'_{kk+1} = (a_{k+1k+1} - a_{kk}) \sin \alpha \cos \alpha + a_{kk+1} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$a'_{k+1k+1} = a_{kk} \sin^2 \alpha + 2a_{kk+1} \sin \alpha \cos \alpha + a_{k+1k+1} \cos^2 \alpha \quad (26)$$

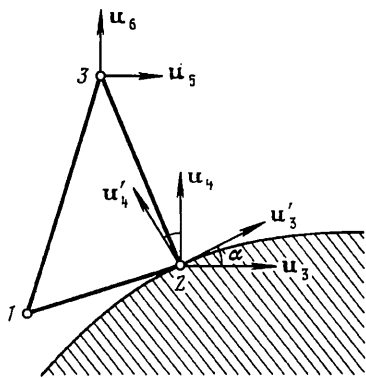
Как видно из формул (24)–(26), преобразованную матрицу A' легко получить из исходной матрицы A , не изменяя способа хранения симметричной матрицы.

Замечание 4. Если имеется несколько контактных точек, в которых задано условие непроницаемости, то следует провести несколько последовательных преобразований матрицы системы A и вектора правых частей P .

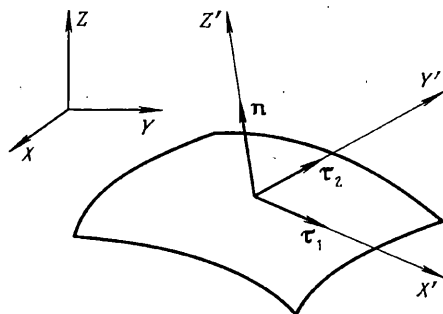
Замечание 5. Если в контактной точке Γ примыкают один или несколько конечных элементов, то можно действовать двумя способами:

1) сформировать полную матрицу системы A , а затем получить преобразованную матрицу A' так, как это было описано выше;

2) получить преобразованные локальные матрицы A' для каждого элемента, а затем из них сформировать полную преобразованную матрицу системы A' . При этом угол α определяется только поверхностью инструмента в точке Γ , а следовательно, является одним и тем же для всех конечных элементов, примыкающих к точке Γ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Замечание 6. Все выше приведенные формулы остаются справедливыми для осесимметричной задачи.

Замечание 7. Для ленточной матрицы в результате преобразования (16) ширина полуленты h может увеличиться на единицу, причем, если имеется несколько граничных узлов и, следовательно, преобразование (16) проводится несколько раз, то возможное увеличение ширины полуленты равно единице независимо от количества контактных узлов.

Пример. Рассмотрим частный случай системы, состоящей из одного треугольного конечного элемента, имеющего по две степени свободы в каждом узле (фиг. 3).

Пусть в узле 2 задана нормальная к поверхности инструмента составляющая скорости u_3 . В данном случае номер неизвестного k , относящегося к граничному узлу, равен 3 и матрица Q принимает вид

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где α — угол наклона касательной к поверхности инструмента в узле 2 к оси OX .

Формулы (13) примут вид

$$\begin{Bmatrix} u'_3 \\ u'_4 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P'_3 \\ P'_4 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

Разбиваем матрицу A на соответствующие клетки (21):

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

и для клеток

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix}$$

выполним соответствующие преобразования (23) с помощью матрицы поворота

$$C = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Получим

$$A'_{12} = A_{12} C^T = \begin{vmatrix} a_{13} \cos \alpha + a_{14} \sin \alpha & -a_{13} \sin \alpha + a_{14} \cos \alpha \\ a_{23} \cos \alpha + a_{24} \sin \alpha & -a_{23} \sin \alpha + a_{24} \cos \alpha \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{23} & a'_{24} \end{vmatrix}$$

$$A'_{23} = CA_{23} = \begin{vmatrix} a_{35} \cos \alpha + a_{45} \sin \alpha & a_{36} \cos \alpha + a_{46} \sin \alpha \\ a_{35} \sin \alpha + a_{45} \cos \alpha & -a_{36} \sin \alpha + a_{46} \cos \alpha \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a'_{35} & a'_{36} \\ a'_{45} & a'_{46} \end{vmatrix}$$

$$A'_{22} = CA_{22} C^T = \begin{vmatrix} a_{33} \cos^2 \alpha + 2a_{34} \cos \alpha + (a_{44} - a_{33}) \sin \alpha \cos \alpha + \\ + a_{44} \sin^2 \alpha & (a_{44} - a_{33}) \sin \alpha \cos \alpha + \\ + a_{34} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) & a_{33} \sin^2 \alpha + 2a_{34} \sin \alpha \cos \alpha + \\ + a_{34} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) & + a_{44} \cos^2 \alpha \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{34} & a'_{44} \end{vmatrix}$$

Преобразованная матрица системы (верхний треугольник) примет вид

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} & a'_{36} \\ & & & a'_{44} & a'_{45} & a'_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{vmatrix}$$

В новых перемещениях

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

условие непроницаемости (12) примет вид $u'_4 = v_n$ и его внесение в систему (15) не приведет к появлению несимметричной матрицы. После решения системы (15) со всеми имеющимися граничными условиями возврат к старым переменным осуществляется по формулам (19).

Трехмерный случай. В этом случае возможен подход, аналогичный рассмотренному выше.

Пусть неизвестные u_k, u_{k+1}, u_{k+2} в системе (10) есть составляющие вектора скорости $\mathfrak{D} = \{u_k, u_{k+1}, u_{k+2}\}$ точки среды Γ , в которой задано условие непроницаемости

Сохраняются в силе также и формулы (22), (23), но последние в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$a_{ik-1+j}^1 = \sum_{p=1}^3 a_{ik-1+p} c_{jp} \quad (i = 1, \dots, k-1; j = 1, 2, 3) \quad (31)$$

$$a_{k-1+j}^1 = \sum_{p=1}^3 a_{k-1+p} c_{ip} \quad (i = 1, 2, 3; j = k+3, \dots, n) \quad (32)$$

$$a_{k-1+ik-1+j}^1 = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_{k-1+p} a_{k-1+q} c_{ip} c_{jq} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) \quad (33)$$

Условие непроницаемости в новых координатах принимает вид

$$u'_{k+2} = v_n \quad (34)$$

и его внесение в систему (15) не нарушает симметрию матрицы системы. В силу ортогональности матрицы перехода (27) возврат к старым переменным производится по формулам:

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_k \\ u'_{k+1} \\ u'_{k+2} \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

$$\begin{Bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P_{k+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_k \\ P'_{k+1} \\ P'_{k+2} \end{Bmatrix},$$

Замечание 8. В трехмерном случае возможное увеличение числа, характеризующего ширину полуленты h , не превосходит 2, независимо от числа контактных узлов.

Вывод. Предложенная методика учета контактного взаимодействия материала с инструментом в сочетании со способом замены узловых переменных и преобразования глобальной матрицы жесткости в расчетах методом конечных элементов позволяет решать задачи деформирования тел при объемной штамповке и формовке практически без увеличения необходимого объема машинной памяти и времени на решение системы линейных алгебраических уравнений, что делает эффективным ее применение при решении задач об управлении формоизменением нелинейно-вязких сплошных сред [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов А.Б., Романюк С.Н., Чумаченко Е.Н. Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 82–98.
2. Чумаченко Е.Н. Математическое моделирование пластического формоизменения материалов при обработке давлением. М.: МГИЭМ, 1998. 157 с.
3. Леванов А.Н., Колмогоров А.Л., Буркин С.П. и др. Контактное трение в процессах ОМД. М.: Металлургия, 1976. 416 с.

4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
5. Норри Д., Де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
6. Al-Khattat Ibrahim M. Finite element upsetting analysis of a ring: an incremental solution to the contact problem / Eng. Software III. Proc. 3rd Intern. Conf. London; Berlin; 1983. P. 952–964.
7. Bathe K.J., Chaudhary A. On finite element analysis of large deformation frictional contact problem // Unific. Finite Element Method. Amsterdam; North–Holland; 1984. P. 123–147.
8. Калмыков В.В., Чумаченко Е.Н., Ананьев И.Н. Способ задания граничных условий при решении задач обработки металлов давлением // Изв. вузов. Машиностроение. 1985. № 12. С. 122–125.
9. Романюк С.Н., Чумаченко Е.Н. Математическое моделирование оптимальных режимов управления изотермическим формоизменением нелинейно-вязкой сплошной среды // Изв. РАН. Автоматика и телемеханика. 1993. № 6. С. 94–105.

Москва

Поступила в редакцию
8.06.98