

УДК 539.3

© 2000 г. И.А. СОЛДАТЕНКОВ

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ СО СЦЕПЛЕНИЕМ ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

В работах [1; 2] была рассмотрена контактная задача со сцеплением для клиновидного штампа, решение которой строилось с помощью обращения сингулярных интегральных уравнений для контактных напряжений и анализе дополнительных условий корректности подобного обращения. Ниже дается более общая формулировка задачи со сцеплением, объясняются некоторые положения описанного в [1, 2] подхода и предлагается алгоритм численного решения уравнений задачи.

При изложении материала используется понятие узла, а также классы функций H, H_0, H^*, h_0, h_2 , определения которым даны в [3].

1. Постановка задачи. Пусть абсолютно жесткий, гладкий и выпуклый штамп вдавливается со сцеплением в упругую полуплоскость (фиг. 1) под действием монотонно возрастающей нормальной нагрузки P_2 и касательной нагрузки P_1 , связанной с P_2 некоторой зависимостью [4]:

$$P_1 = N(P_2), \quad P_2 > 0 \quad (1.1)$$

Систему координат xu свяжем со штампом, совместив ее начало с точкой первоначального касания штампа с полуплоскостью (фиг. 1). Пусть $y = g(x)$ – уравнение формы штампа, причем на любом отрезке $[-s, s]$, $s > 0$ имеет место соотношение

$$g'(x) \in H \quad (1.2)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную функций по первому аргументу, тогда как точка – производную по второму аргументу.

Будем считать, что при вдавливании штампа размеры $a(t) > 0$, $b(t) > 0$ области контакта монотонно возрастают. Далее, величиной a будем характеризовать степень внедрения штампа, при этом, в частности, размер b и нагрузка P_2 будут представлять собой некоторые функции $b(a)$, $P_2(a)$, относительно которых предполагается, что

$$0 < b'(a) \in C(0, \infty), \quad P_2(a) > 0, \quad P_2'(a) > 0 \quad (1.3)$$

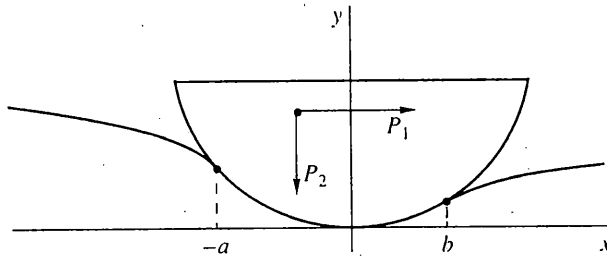
Первое и последнее неравенства (1.3) обеспечивают предполагаемое монотонное возрастание области контакта и нормальной нагрузки, тогда как второе неравенство (1.3) отражает требование положительности нормальной нагрузки P_2 на штамп.

Граничные условия, соответствующие рассматриваемой задаче имеют вид:

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad v(x, a) = g(x), \quad x \in [-a, b] \quad (1.4)$$

$$q_1(x, a) = q_2(x, a) = 0, \quad x \in [-a, b] \quad (1.5)$$

где u, v – касательное и нормальное перемещения границы полуплоскости в системе xu , $\varphi(x)$ – некоторая функция, подлежащая определению, $q_1 = \tau_{xy}|_{y=0}$, $q_2 = -\sigma_y|_{y=0}$ – контактные напряжения.



Фиг. 1

Второе граничное условие (1.4) является традиционным для постановок широкого класса контактных задач [5], тогда как первое условие (1.4) специфично для задачи со сцеплением – оно, совместно со вторым условием, отражает тот факт, что при внедрении штампа граничные точки полуплоскости, пришедшие в контакт со штампом больше не испытывают перемещений относительно него.

Считается, что внедрение штампа начинается из некоторого состояния, характеризуемого известными размерами a_0, b_0 области контакта и распределением $\varphi_0(x)$ касательных контактных перемещений

$$u(x, a_0) = \varphi_0(x), \quad x \in [-a_0, b_0], \quad a_0 > 0 \quad (1.6)$$

Связь граничных напряжений с перемещениями u и v в рамках линейной теории упругости задается двумя равенствами [5]:

$$m^* u'(x, a) = -\pi\chi q_2(x, a) + \int_{-a}^b \frac{q_1(\xi, a) d\xi}{\xi - x} \quad (1.7)$$

$$m^* v'(x, a) = -\pi\chi q_1(x, a) - \int_{-a}^b \frac{q_2(\xi, a) d\xi}{\xi - x}$$

$$\text{где } m^* = \pi E [2(1 - \nu^2)]^{-1}, \quad \chi = (1 - 2\nu) [2(1 - \nu)]^{-1}$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\nu \in [0, 1/2)$.

Имеет место также условие равновесия штампа

$$P_k(a) = \int_{-a}^b q_k(x, a) dx \quad (k = 1, 2) \quad (1.8)$$

Граничные условия (1.4) соответствуют плоскопараллельному вдавливанию штампа. Это, в свою очередь, предполагает наличие некоторого внешнего момента, приложенного к штампу и обеспечивающего подобный характер внедрения. Таким образом, условие равенства моментов [5] автоматически выполняется и необходимость в его рассмотрении отсутствует.

Определим некоторые свойства рассмотренных выше функций, предполагая функции $u(x, a), v(x, a)$ дифференцируемыми по x всюду, кроме быть может точек $-a, b$, и используя следующие обозначения для пределов функции слева и справа: $f_{\pm}(c) = \lim_{x \rightarrow \pm c} f(x)$.

То обстоятельство, что точки полуплоскости, пришедшие в контакт со штампом, не испытывают больше перемещений в системе xu , обуславливает появление скачков определенной величины у функций $u'(x, t)$ и $v'(x, t)$ в точках $-a$ и b . Получим соответствующие соотношения.

Возьмем две произвольные точки x_1 и $x_2 = x_1 + \Delta x, \Delta x > 0$ границы полуплоскости и предположим, что в момент времени t точка x_1 совпадает с концом $b(t)$ области

контакта, тогда как вторая точка приходит в контакт со штампом в момент времени $t + \Delta t > t$ и поэтому $x_2 = b(t + \Delta t)$.

Рассмотрим функциональную зависимость от времени касательного перемещения $u(x, t)$. Учитывая, что это перемещение в сцепленной со штампом точке x_1 за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ не изменяется и, в целях универсальности выкладок, обозначая $f(x, t) = u(x, t)$, запишем следующее равенство

$$\frac{1}{\Delta x} [f(x_2, t + \Delta t) - f(x_1, t + \Delta t)] = \frac{1}{\Delta x} [f(x_2, t) - f(x_1, t)] + \frac{\Delta t}{\Delta x} I_{\Delta} \quad (1.9)$$

$$I_{\Delta} \equiv \frac{f(x_2, t + \Delta t) - f(x_2, t)}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{b(t + \Delta t) - b(t)}{\Delta t}$$

Осуществим теперь предельный переход $x_2 \rightarrow x_1 = b(t)$, при котором $\Delta t \rightarrow 0$. Соответствующие пределы левой части (1.9) и первого слагаемого в правой части (1.9) равны, соответственно, $f'_-(b, t)$ и $f'_+(b, t)$, тогда как пределы величины I_{Δ} и отношения $\Delta x/\Delta t$ равны $f'_+(b, t)$ и $b'(t)$. Таким образом, при $x_2 \rightarrow x_1$ из (1.9) имеем

$$f'_-(b, t) - f'_+(b, t) = \frac{1}{b'(t)} f'_+(b, t), \quad b = b(t) \quad (1.10)$$

Проводя аналогичные выкладки для окрестности конца $-a$ области контакта, можно получить

$$f'_-(-a, t) - f'_+(-a, t) = \frac{1}{a'(t)} f'_-(-a, t), \quad a = a(t) \quad (1.11)$$

При выводе соотношений (1.10) и (1.11) использовалось единственное свойство функции $f(x, t) = u(x, t)$ оставаться неизменной во времени при $x \in [-a(t), b(t)]$. Таким же свойством обладает функциональная зависимость от времени нормального перемещения $v(x, t)$, и поэтому соотношения (1.10), (1.11) справедливы и при $f(x, t) = v(x, t)$. Учитывая также, что $u'_-(b, t) = \varphi'(b)$, $v'_-(b, t) = g'(b)$, $u'_+(-a, t) = \varphi'(-a)$, $v'_+(-a, t) = g'(-a)$ и используя в качестве параметра внедрения величину a вместо t , получим окончательно из (1.10) и (1.11):

$$u'_-(-a, a) - \varphi'(-a) = \dot{u}_-(-a, a), \quad \varphi'(b) - u'_+(b, a) = \frac{1}{b'(a)} \dot{u}_+(b, a) \quad (1.12)$$

$$v'_-(-a, a) - g'(-a) = \dot{v}_-(-a, a), \quad g'(b) - v'_+(b, a) = \frac{1}{b'(a)} \dot{v}_+(b, a)$$

В дополнение к соотношениям (1.12) должны выполняться еще два неравенства:

$$v'_-(-a, a) \geq g'(-a), \quad v'_+(b, a) \leq g'(b) \quad (1.13)$$

т.к. при фиксированном a граница полуплоскости отходит от гладкого штампа при смещении вдоль оси x влево от точки $-a$ и вправо от точки b .

Значения функции $\varphi(x)$ совпадают с касательным перемещением точки $x \in [-a, b]$ области контакта, поэтому, если $x_1 < x_2$, то при деформации полуплоскости точка ее границы с координатой x_1 всегда располагается левее точки x_2 . Последнее означает, что сумма $x + \varphi(x)$ должна представлять собой строго возрастающую функцию x , что обеспечивается неравенством

$$1 + \varphi'(x) > 0 \quad (1.14)$$

Задача состоит в нахождении функций $q_k(x, a)$ ($k = 1, 2$), $\varphi(x)$, $b(a)$ удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.3)–(1.8), (1.12)–(1.14).

2. Обращение уравнений для граничных напряжений. Основные соотношения.

Ограничим область поиска функций $\varphi(x)$ и $q_k(x, a)$ ($k = 1, 2$). А именно, будем искать $\varphi(x)$ в классе дифференцируемых функций с производными, удовлетворяющими условию Гельдера на любом отрезке $[-s, s]$, $s > 0$. Относительно функций $q_1(x, a)$ и $q_2(x, a)$ будем предполагать, что при каждом a они принадлежат классу H^* на отрезке $[-a, b]$ и ограничены на концах этого отрезка. Таким образом, рассматривая точки $-a, b$ как узлы и пользуясь обозначениями [3], запишем

$$\varphi'(x) \in H, \quad q_k(x, a) \in h_2 \quad (k = 1, 2), \quad a \geq a_0 \quad (2.1)$$

Проведем обращение уравнений (1.7) используя метод [3]. Для этого положим в равенствах (1.7) $x \in [-a, b]$ и заменим в них функции $u(x, a)$, $v(x, a)$ правыми частями соответствующих граничных условий (1.4). После этого умножим первое равенство (1.7) на мнимую единицу и сложим его со вторым. В результате получим уравнение

$$-\pi\chi q(x, a) + i \int_{-a}^b \frac{q(\xi, a)d\xi}{\xi - x} = f(x) \quad (2.2)$$

$$q(x, a) = q_1(x, a) + iq_2(x, a), \quad f(x) = m^*(g'(x) + i\varphi'(x)) \in H \quad (2.3)$$

Соответствующая уравнению (2.2) задача сопряжения имеет вид [3]:

$$\pi(1 + \chi)\Phi^+(x, a) = -\pi(1 - \chi)\Phi^-(x, a) - f(x), \quad x \in (-a, b) \quad (2.4)$$

$$\Phi(z, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{q(\xi, a)d\xi}{\xi - z} \quad (2.5)$$

Нетрудно установить, что индекс κ класса h_2 задачи (2.4) равен -1 , при этом узлы $-a$ и b являются неособенными. В этом случае, согласно [3], решение $\Phi(z, a) \in h_2$ задачи сопряжения (2.4), а следовательно и решение $q(x, a) \in h_2$ уравнения (2.2) при заданных a, b и $f(x) \in H$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-a}^b \frac{f(x)dx}{Z(x, a)} = 0 \quad (2.6)$$

$$Z(x, a) = D\sqrt{(a+x)(b-x)}e^{-i\alpha(x, a)} = D(a+x)^{\frac{\tau}{2}}(b-x)^{\frac{\gamma}{2}} \quad (2.7)$$

$$D = -i\pi\sqrt{1 - \chi^2}, \quad \alpha(x, a) = \frac{\tau}{2} \ln \left| \frac{a+x}{b-x} \right|$$

$$\tau = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+\chi}{1-\chi}, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1+i\tau)$$

С учетом выражений (2.3) и (2.7) для $f(x)$ и $Z(x, a)$ равенство (2.6) можно записать еще так

$$\int_{-a}^b \frac{\varphi'(x)e^{-i\alpha(x, a)}}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} dx = -i \int_{-a}^b \frac{g'(x)e^{-i\alpha(x, a)}}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} dx \equiv -\omega(a, b) \quad (2.8)$$

При выполнении условия (2.6) задача сопряжения (2.4) имеет единственное решение $\Phi(z, a)$, которое с помощью формул Сохоцкого – Племеля определяет решение $q(x, a)$ уравнения (2.2) [3]:

$$q(x, a) = A^* f(x) - \frac{B^*}{\pi i} Z(x, a) \int_{-a}^b \frac{f(\xi)d\xi}{Z(\xi, a)(\xi - x)} \equiv K(x, a; f), \quad x \in [-a, b] \quad (2.9)$$

$$A^* = \chi[\pi(1 - \chi^2)]^{-1}, \quad B^* = [\pi(1 - \chi^2)]^{-1}$$

где K – оператор.

Кроме того, полученное решение $\Phi(z, a)$ задачи (2.4) определяет и перемещения границы полуплоскости за пределами области контакта. Действительно, согласно (1.7) и (2.5):

$$v'(x, a) + iu'(x, a) = -\frac{2\pi}{m^*} \Phi(x, a), \quad x \in [-a, b] \quad (2.10)$$

$$\Phi(x, a) = \frac{X(x, a)}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{f(\xi) d\xi}{Z(\xi, a)(\xi - x)}, \quad X(x, a) = (a+x) \left| \frac{b-x}{a+x} \right|^{1/2} e^{-i\alpha(x, a)} \quad (2.11)$$

Перейдем теперь к преобразованию условия равновесия (1.8) с учетом полученных равенств (2.8) и (2.9).

Подставим в (1.8) выражение (2.9) для $q(x, a)$ и учтем определение (2.3) функции $f(x)$. В результате получим

$$P \equiv P_1 + iP_2 = P_0(a) + iA^* m^* \int_{-a}^b \varphi'(x) dx - \frac{B^* m^*}{\pi} \int_{-a}^b Z(x, a) \left[\int_{-a}^b \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{Z(\xi, a)(\xi - x)} \right] dx \quad (2.12)$$

$$P_0(a) \equiv \int_{-a}^b K(x, a; m^* g') dx$$

где $P_0(a)$ – известная функция.

Если взять произвольное $\xi_0 \in (-a, b)$ и обозначить $r(\xi, x) = Z(x, a)\varphi'(\xi)(\xi - \xi_0)/Z(\xi, a)$, то последнее слагаемое в (2.12) можно представить так:

$$-\frac{B^* m^*}{\pi} \int_{-a}^b \left[\int_{-a}^b \frac{r(\xi, x) d\xi}{(\xi - \xi_0)(\xi - x)} \right] dx \equiv I \quad (2.13)$$

Принимая во внимание выражение (2.7) можно установить, что $Z(x, a)$ как функция x принадлежит классу H на $[-a, b]$ и поэтому

$$r(\xi, x) = \frac{r_0(\xi, x)}{|a + \xi|^{v_1} |b - \xi|^{v_2}}, \quad r_0(\xi, x) \in H, \quad v_k \in (0, 1).$$

Последние соотношения позволяют воспользоваться формулой Пуанкаре – Бельтрана [3] и поменять в (2.13) порядок интегрирования. В результате последнее слагаемое в (2.12) примет вид

$$I = -\frac{B^* m^*}{\pi} \int_{-a}^b \frac{T(x, a)}{Z(x, a)} \varphi'(x) dx$$

$$T(x, a) \equiv \int_{-a}^b \frac{Z(\xi, a)}{x - \xi} d\xi = i\pi\chi Z(x, a) + 2\delta_0 D[(a+x) - l(1+i\tau)]$$

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2} ch^{-1} \frac{\pi\tau}{2}, \quad l = (a+b)/2$$

а само равенство (2.12) с учетом (2.8) можно свести к следующему

$$P(a) = h(a) - \frac{2}{\pi} \delta_0 B^* m^* \int_{-a}^b \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} e^{i\alpha(x, a)} \varphi'(x) dx \quad (2.14)$$

$$h(a) = P_0(a) - \frac{2}{\pi} \delta_0 B^* m^* l(1+i\tau) \overline{\omega}(a, b)$$

Отметим некоторые свойства функции $q(x, a)$ вида (2.9), а также функций $u(x, a)$ и $v(x, a)$, связанных с $q(x, a)$ равенствами (1.7) при произвольном фиксированном $a > 0$.

1). По построению $q(x, a)$ является ограниченной в неособенных узлах $-a$ и b , вследствие чего эта функция принадлежит классу H_0 вблизи этих узлов [3]. С другой стороны, непосредственно из (2.9) следует, что $q(x, a) \in H$ на любом отрезке $L_1 \subset (-a, b)$. Действительно, в силу (2.3) и (2.7), плотность $f(x)/Z(x, a)$ интеграла типа Коши в (2.9) принадлежит H на любом отрезке $L_2 \subset (-a, b)$, поэтому, на основании известного свойства интеграла типа Коши [3], сам интеграл в (2.9), а следовательно и вся правая часть этого равенства принадлежит H на любом отрезке $L_1 \subset L_2 \subset (-a, b)$.

Из сказанного вытекает, что

$$q(x, a) \in H \text{ на } [-a, b] \quad (2.15)$$

2). Как указывалось выше, функция $q(x, a)$ вида (2.9) является ограниченной в точках $-a$ и b . Более того, покажем, что

$$q(-a, a) \equiv \lim_{x \rightarrow -a+0} q(x, a) = 0, \quad q(b, a) \equiv \lim_{x \rightarrow b-0} q(x, a) = 0 \quad (2.16)$$

Возьмем для определенности точку b . Учитывая (2.7), перепишем (2.9) в виде

$$q(x, a) = A^* f(x) - 2B^* Z(x, a) F(x) \quad (2.17)$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{f_0(\xi) d\xi}{(b-\xi)^\gamma (\xi-x)}$$

где $f_0(x) = f(x)/(a+x)^\gamma \in H$ в окрестности точки b . После этого воспользуемся для $F(x)$ известным представлением интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования [3]:

$$F(x) = \frac{-1}{2i} \operatorname{ctg} \gamma \pi f_0(b) (b-x)^{-\gamma} + F_1(x) \quad (2.18)$$

$$F_1(x) = F_2(x) |b-x|^{-\alpha_0}, \quad \alpha_0 < \operatorname{Re} \gamma = 1/2$$

где $F_2(x) \in H$ в окрестности точки b .

Если теперь в (2.18) положить $f_0(b) = f(b)/(a+b)^\gamma$, учесть, что $\operatorname{ctg} \pi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (1+i\tau) = -i \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \tau = -i\chi$, и затем подставить полученное выражение для $F(x)$ в (2.17), то без труда можно получить второе равенство (2.16). Аналогичным образом устанавливается и первое равенство (2.16).

3). Согласно граничному условию (1.5), вне отрезка $[-a, b]$ функция $q(x, a)$ равна нулю. Это обстоятельство совместно с соотношениями (2.15) и (2.16) позволяет записать еще одно свойство функции $q(x, a)$, касающееся ее непрерывности по x :

$$q(x, a) \in C(-\infty, \infty) \quad (2.19)$$

4). Функции $u(x, a)$ и $v(x, a)$ обладают следующими свойствами:

$$u'(x, a) \in C(-\infty, \infty), \quad v'(x, a) \in C(-\infty, \infty) \quad (2.20)$$

для проверки которых докажем следующее

Утверждение. Пусть

$$\psi(x) = \int_L \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi-x}, \quad L = [-a, b] \quad (2.21)$$

$$\sigma(x) \in H \text{ на } [-a, b], \quad \sigma(-a) = \sigma(b) = 0 \quad (2.22)$$

Тогда $\psi(x) \in C(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Доопределим функцию $\sigma(x)$ вне отрезка $[-a, b]$, положив ее там равной нулю. В силу условий (2.22), определенная таким образом функция $\sigma(x)$ является непрерывной в точках $-a, b$ и при произвольном $s > 0$: $\sigma(x) \in H$ на $[-s, s]$ [3]. Учитывая последнее соотношение и полагая в (2.21): $L = [-s, s]$, $s > \max\{a, b\}$, получим на основе известного свойства интеграла типа Коши [3]: $\psi(x) \in H$ на $[-s_1, s_1]$, для любого $s_1 < s$. Ввиду того, что величина s может быть выбрана произвольно большой, последнее соотношение, очевидно, обеспечивает непрерывность функции $\psi(x)$ в произвольной точке $x \in (-\infty, \infty)$. Утверждение доказано.

Фигурирующие в выражениях (1.7) для $u'(x, a)$ и $v'(x, a)$ интегралы являются непрерывными функциями $x \in (-\infty, \infty)$, что непосредственно вытекает из (2.15), (2.16) и доказанного утверждения. Кроме того, в силу (2.19), непрерывными в правых частях равенств (1.7) являются и функции $q_1(x, a)$, $q_2(x, a)$ и поэтому, имеют место соотношения (2.20).

Частным следствием соотношений (2.20) являются равенства $\varphi'(-a) = u'_-(-a, a)$, $\varphi'(b) = u'_+(b, a)$, $g'(-a) = v'_-(-a, a)$, $g'(b) = v'_+(b, a)$, которые обеспечивают выполнение условий (1.13), а условия (1.12) приводят к более простому виду

$$\dot{u}_-(-a, a) = \dot{v}_-(-a, a) = 0, \quad \dot{u}_+(b, a) = \dot{v}_+(b, a) = 0 \quad (2.23)$$

В заключении данного пункта сделаем замечание, касающееся необходимости использования равенства (2.6) при решении задачи со сцеплением.

Замечание 1. Как указывалось выше, равенство (2.6) является необходимым и достаточным условием существования ограниченного на концах отрезка $[-a, b]$ решения (2.9) уравнения (2.2), которое обладает свойствами (2.15), (2.16), (2.19) и обеспечивает выполнение условий (1.13). В противном, если исключить требование ограниченности $q(x, a)$ на концах отрезка $[-a, b]$, т.е. искать решение уравнения (2.2) в более общем классе h_0 , то соответствующий индекс κ задачи будет равен 1. В этом случае, согласно [3], какое-либо дополнительное условие типа (2.6) отсутствует, а само решение $q(x, a)$ является, вообще говоря, отличным от нуля в точках $-a$ и b , что, в свою очередь, может привести к нарушению условий (1.13). Например, если $q(b, a) = \text{const} > 0$, то с помощью известного представления интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования [3] и равенств (1.7) нетрудно установить соотношение: $v'(x, a) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b + 0$, которое противоречит (1.13).

Таким образом, можно утверждать, что равенство (2.6) обеспечивает выполнение условий (1.13).

Замечание 2. Фигурирующее в начальном условии (1.6) распределение $\varphi_0(x)$ должно удовлетворять условиям (1.14) и (1.3), причем проверка последних неравенств осуществляется с помощью выражения (2.14) для P_2 при $a = a_0$.

Подведем итог вышеизложенному. В результате обращения системы уравнений (1.7) получено выражение (2.9) для искомого контактного давления $q(x, a)$, которое обладает свойствами (2.15), (2.16), (2.19), обеспечивает выполнение условий (2.20), (1.13) и сводит условия (1.12) к равенствам (2.23). Выражение (2.9) содержит две неизвестные функции — $\varphi(x)$ и $b(a)$. Эти функции также содержатся в равенствах (2.8) и (2.14), первое из которых обеспечивает справедливость выражения (2.9), а второе является результатом подстановки (2.9) в условия равновесия (1.8). В дальнейшем равенства (2.8) и (2.14) будут использоваться для нахождения функций $\varphi(x)$, $b(a)$.

3. Параболический штамп. Рассмотрим решение сформулированной в равенствах (1.1)–(1.8), (1.12)–(1.14) задачи для параболического штампа:

$$g(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad k > 0 \quad (3.1)$$

3.1. *Линейное решение.* Начнем с класса решений, соответствующих линейной зависимости (1.1):

$$P_1 = nP_2, \quad n = \text{const} \quad (3.2)$$

и распределению $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \varphi^- x^2, & x < 0 \\ \varphi^+ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

где φ^\pm – неизвестные постоянные.

В отличие от общей постановки задачи здесь задается явное выражение для $\varphi(x)$, справедливое при любом $a > 0$, и тем самым исключается из рассмотрения начальное условие (1.6). Следует только отметить, что в силу выбора системы координат xu и условия сцепления контактирующих тел имеет место равенство $\varphi(0) = 0$, которому удовлетворяет $\varphi(x)$ вида (3.3).

В дальнейшем решение удовлетворяющее (3.2) и (3.3) будем называть линейным. Подобные решения для клиновидного штампа были получены ранее в [1, 2]. Ниже класс линейных решений находится для параболического штампа.

Нетрудно проверить, что выражения (3.1) и (3.3) для функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (1.2), и (2.1). Подставим (3.1) и (3.3) в (2.14). Тогда учитывая, что $P = P_1 + iP_2$, можно получить следующие выражения для функций $P_1(a)$, $P_2(a)$:

$$P_k(a) = m_0 l^2 (B_k^- \varphi^- + B_k^+ \varphi^+ + C_k) \quad (k=1, 2) \quad (3.4)$$

$$l = (a+b)/2 = (1+e^{2\rho})a/2, \quad m_0 = \frac{m^*}{\pi^2(1-\chi^2)}$$

$$C_1 = -2k\delta_0^2 r_1, \quad C_2 = 2k\delta_0^2 r_2$$

$$B_1^\pm = -\delta_0 [\mp r_1 (\gamma_0 - \Lambda_1) + r_2 (\delta_0 \pm \Lambda_2) \pm U_1^* / \delta_0]$$

$$B_2^\pm = -\delta_0 [r_1 (\delta_0 \pm \Lambda_2) \pm r_2 (\gamma_0 - \Lambda_1) \mp U_2^* / \delta_0]$$

$$U_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^* = \frac{\delta_0}{\text{ch } \rho} \left\{ (2 + \text{th } \rho) \begin{bmatrix} \cos \tau \rho \\ \sin \tau \rho \end{bmatrix} \pm \tau \begin{bmatrix} \sin \tau \rho \\ \cos \tau \rho \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \Lambda_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}(\rho) = \int_0^\rho \begin{bmatrix} \sin \tau s \\ \cos \tau s \end{bmatrix} \frac{ds}{\text{ch } s}, \quad \rho = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$$

$$\gamma_0 = \Lambda_1(\infty), \quad \delta_0 = \Lambda_2(\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ch}^{-1} \frac{\pi \tau}{2}$$

$$r_1 = 2\tau(1 + \text{th } \rho), \quad r_2 = 1 - \tau^2 + 2 \text{th } \rho$$

Подстановка выражений (3.1) и (3.3) для функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ в равенство (2.8), а также выражений (3.4) для $P_1(a)$ и $P_2(a)$ в зависимость (3.2) позволяет прийти к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \varphi^- + \alpha_{12} \varphi^+ = \beta_1 \\ \alpha_{21} \varphi^- + \alpha_{22} \varphi^+ = \beta_2 \\ \alpha_{31} \varphi^- + \alpha_{32} \varphi^+ = \beta_3 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\alpha_{11} = -(\gamma_0 - \Lambda_1) \text{th } \rho + (\delta_0 - \Lambda_2) \tau + \sin \tau \rho / \text{ch } \rho$$

$$\alpha_{12} = (\gamma_0 - \Lambda_1) \text{th } \rho + (\delta_0 + \Lambda_2) \tau - \sin \tau \rho / \text{ch } \rho$$

$$\alpha_{21} = (\delta_0 - \Lambda_2) \operatorname{th} \rho + (\gamma_0 - \Lambda_1) \tau - \cos \tau \rho / \operatorname{ch} \rho$$

$$\alpha_{22} = (\delta_0 + \Lambda_2) \operatorname{th} \rho - (\gamma_0 - \Lambda_1) \tau + \cos \tau \rho / \operatorname{ch} \rho$$

$$\alpha_{31} = B_1^- - nB_2^-, \quad \alpha_{32} = B_1^+ - nB_2^+$$

$$\beta_1 = 2k\delta_0 \operatorname{th} \rho, \quad \beta_2 = -2k\tau\delta_0, \quad \beta_3 = -(C_1 - nC_2)$$

Равенства (3.5) представляют собой линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных параметров φ^\pm функции $\varphi(x)$. Коэффициенты уравнений (3.5) определяются постоянными k, τ, n , а также неизвестной величиной ρ описывающей степень асимметрии области контакта. Учитывая данное обстоятельство, потребуем линейности функции $b(a)$, что обеспечит постоянство величины ρ при увеличении a , а следовательно (в силу уравнений (3.5)) и заложенное в (3.3) постоянство параметров φ^\pm . Таким образом, будем считать, что

$$b(a) = e^{2\rho} a, \quad \rho = \operatorname{const} \quad (3.6)$$

Обозначим через \tilde{A} расширенную матрицу 3×3 системы (3.5), которая образуется добавлением столбца свободных членов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ системы (3.5) к матрице коэффициентов ее левой части. Известно [6], что необходимым условием существования решения φ^-, φ^+ системы (3.5) при любом фиксированном ρ является равенство

$$\det \tilde{A} = 0 \quad (3.7)$$

Левая часть (3.7) содержит единственную неизвестную величину ρ и поэтому данное условие может рассматриваться как уравнение для ρ . Преобразуем это уравнение, для чего введем в рассмотрение величины d_0, d_1, d_2, S_1, S_2 :

$$d_0 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \quad (3.8)$$

$$d_1 = \alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2, \quad d_2 = \alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1$$

$$S_k(\rho) = C_k d_0 + B_k^- d_1 + B_k^+ d_2$$

Учитывая данные выше определения для $\alpha_{kj}, B_k^\pm, C_k, k = 1, 2; j = 1, 2$, можно получить, что

$$S_1(\rho) = T_0 \sin(\tau\rho - w(\rho)), \quad S_2(\rho) = T_0 \cos(\tau\rho - w(\rho)) \quad (3.9)$$

$$T_0 = 4k \left(\frac{\delta_0}{\operatorname{ch} \rho} \right)^3 \sqrt{\operatorname{th}^2 \rho + \tau^2}, \quad w(\rho) = \arcsin \frac{\operatorname{th} \rho}{\sqrt{\operatorname{th}^2 \rho + \tau^2}}$$

Используя теперь формулу разложения детерминанта в (3.7) по третьей строке матрицы \tilde{A} [6] и принимая во внимание равенства (3.8), (3.9), получим из (3.7) следующее уравнение для ρ :

$$S_1(\rho) - nS_2(\rho) = 0 \quad \text{или} \quad n = \operatorname{tg}(\tau\rho - w(\rho)) \quad (3.10)$$

Найденная из уравнения (3.10) величина ρ посредством равенства (3.6) определяет линейную зависимость $b(a)$. Кроме того, нетрудно показать, что для значений ρ удовлетворяющих (3.10) третье уравнение в (3.5) является следствием остальных. Поэтому для найденного ρ из первых двух уравнений (3.5) можно получить при $d_0 \neq 0$:

$$\varphi^- = d_1/d_0, \quad \varphi^+ = d_2/d_0 \quad (3.11)$$

Подстановка (3.11) в (3.4) с учетом определения (3.8) величин S_k , дает следующее выражение для нагрузок

$$P_k(a) = m_0 l^2 S_k / d_0, \quad \text{при} \quad d_0 \neq 0 \quad (3.12)$$

После нахождения величин ρ и φ^\pm напряжения $q_k(x, a)$, $k = 1, 2$ определяются простой подстановкой выражений (3.1), (3.3), (3.6) в (2.9):

$$\begin{aligned} & \pi(1 - \chi^2)q_1(x, a) = \\ & = \frac{m^*}{\pi} \left\{ \varphi^- \left[xW_2(t) + \sqrt{(a+x)(b-x)} \left((\gamma_0 - \Lambda_1) \sin \alpha - (\delta_0 - \Lambda_2) \cos \alpha \right) \right] - \right. \\ & - \varphi^+ \left[xW_2(t) + \sqrt{(a+x)(b-x)} \left((\gamma_0 - \Lambda_1) \sin \alpha + (\delta_0 + \Lambda_2) \cos \alpha \right) \right] + \\ & \left. + 2k\delta_0 \sqrt{(a+x)(b-x)} \sin \alpha \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \pi(1 - \chi^2)q_2(x, a) = \chi\psi(x) - \\ & - \frac{m^*}{\pi} \left\{ \varphi^- \left[xW_1(t) + \sqrt{(a+x)(b-x)} \left((\gamma_0 - \Lambda_1) \cos \alpha + (\delta_0 - \Lambda_2) \sin \alpha \right) \right] + \right. \\ & + \varphi^+ \left[-xW_1(t) + \sqrt{(a+x)(b-x)} \left((\gamma_0 - \Lambda_1) \cos \alpha - (\delta_0 + \Lambda_2) \sin \alpha \right) \right] - \\ & \left. - 2k\delta_0 \sqrt{(a+x)(b-x)} \cos \alpha \right\} \end{aligned}$$

$$W_{[2]}^{[1]}(t) = \int_t^\infty \left[\frac{\sin \tau s}{\cos \tau s} \right] \frac{ds}{\operatorname{sh} s}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x/a}{1-x/b}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} m^*(\varphi^- - \varphi^+)x, & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \alpha(x, a)$$

Рассмотрим теперь условия (1.3), (1.12), (1.14), которым должно удовлетворять решение задачи.

1). Выражение (3.3) для $\varphi(x)$, очевидно, удовлетворяет условию $\varphi(0) = 0$, тогда как условие (1.14) выполняется при

$$\varphi^- a < 1, \quad -\varphi^+ b = -\varphi^+ a e^{2\rho} < 1 \quad (3.14)$$

Нетрудно установить, что для достаточно малых значений a два последних неравенства справедливы всегда, причем размер a_m соответствующего интервала $(0, a_m)$ допустимых значений a очевидным образом зависит от найденных величин φ^\pm , $e^{2\rho}$ и в частном случае может быть бесконечным: $a \in (0, \infty)$.

В дальнейшем будем считать, что a лежит в вышеупомянутом интервале допустимых значений и поэтому условие (1.14) всегда выполняется.

2). Как указывалось в предыдущем разделе, решение вида (2.9), а следовательно и решение (3.13), обеспечивает выполнение условия (1.13), тогда как условия (1.12) приводятся к более простому виду (2.23). Возьмем два последних равенства (2.23) и воспользуемся для их проверки соотношениями (2.10) и (2.11).

Путем интегрирования по координате x соотношения (2.10) можно получить с учетом граничных условий (1.4):

$$v(x, a) + iu(x, a) = g(b) + i\varphi(b) - \frac{2\pi}{m^*} \int_{b(a)}^x \phi(\xi, a) d\xi, \quad b(a) < x \quad (3.15)$$

Нетрудно проверить, что выражение (2.11) для $\phi(x, a)$ при (3.1) и (3.3), а также свойство (1.3) функции $b(a)$, справедливое в силу (3.6), позволяют воспользоваться известной [7] формулой дифференцирования по параметру a интеграла в (3.15) и в

результате получить

$$\dot{v}(x, a) + i\ddot{u}(x, a) = -\frac{2\pi}{m} \int_{b(a)}^x \phi(\xi, a) d\xi, \quad b(a) < x$$

Фигурирующий в последнем равенстве несобственный интеграл является сходящимся и поэтому, выполняя в этом равенстве предельный переход $x \rightarrow b(a) + 0$ при фиксированном a , можно получить $\dot{v}_+(b, a) + i\ddot{u}_+(b, a) = 0$, т.е. два последних равенства (2.23). Аналогичным образом устанавливается справедливость первых двух равенств (2.23).

3) Первое соотношение в (1.3), как уже указывалось выполняется при (3.6). Два неравенства в (1.3), в силу (3.12), эквивалентны неравенству

$$S_2/d_0 > 0 \quad (3.16)$$

справедливость которого в отличие от рассмотренных выше условий нельзя установить в общем виде, а требуется его проверка для каждого конкретного значения параметра τ и корня ρ уравнения (3.10). Еще одним условием требующим проверку для конкретных τ и ρ является условие $d_0 \neq 0$.

Несложный анализ показывает, что уравнение (3.10) при заданном n имеет, вообще говоря, бесконечное множество корней ρ . Для каждого такого корня по формулам (3.11), (3.13) могут быть найдены параметры ϕ^\pm распределения $\phi(x)$ и напряжения $q_k(x, a)$ ($k = 1, 2$), а также осуществлена проверка условий (3.16) и $d_0 \neq 0$.

Замечание 3. В рамках рассматриваемой постановки задачи полученный выше класс линейных решений соответствует начальному условию (1.6) с распределением $\phi_0(x)$ вида (3.3) при любом a_0 и $b_0 = a_0 e^{2\rho}$, где ρ – корень уравнения (3.10).

3.2. Численное решение. В отличие от класса линейных решений, рассмотренных в предыдущем разделе, получить точное решение поставленной задачи для произвольной зависимости (1.1) и распределения $\phi_0(x)$ в (1.6) не представляется возможным. Ниже описывается алгоритм численного решения уравнений задачи (1.1), (2.8), (2.14) с начальным условием (1.6) и приводятся некоторые результаты расчетов.

В качестве начального распределения $\phi_0(x)$ используется

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \phi_0^- x^2, & x \in [-a_0, 0) \\ \phi_0^+ x^2, & x \in [0, b_0] \end{cases} \quad (3.17)$$

где $\phi_0^\pm, a_0 > 0, b_0 > 0$ – произвольные постоянные. Для рассматриваемого ниже алгоритма вид зависимости (1.1) не является существенным и будет конкретизирован ниже.

Произведем дискретизацию размера a области контакта, образовав некоторую возрастающую последовательность его значений $\{a_m\}$, $m = 0, 1, \dots, M$, где $M \geq 1$ – произвольное натуральное. Ввиду существования функциональной зависимости b от a , образованная выше последовательность порождает последовательность значений и размера b области контакта $\{b_m = b(a_m)\}$, $m = 0, 1, \dots, M$.

Введем обозначения для значений функции $\phi'(x)$ в точках $a_m, b_m, m = 0, 1, \dots, M$:

$$U_m = \phi'(-a_m), \quad V_m = \phi'(b_m) \quad (m = 0, 1, \dots, M)$$

и будем использовать кусочно-линейную аппроксимацию этой функции

$$\phi'(x) \approx U'_m x + C_{m-1}, \quad x \in [-a_m, -a_{m-1}] \quad (3.18)$$

$$\phi'(x) \approx V'_m x + D_{m-1}, \quad x \in [b_{m-1}, b_m]$$

$$U'_m = -\frac{U_m - U_{m-1}}{a_m - a_{m-1}}, \quad V'_m = \frac{V_m - V_{m-1}}{b_m - b_{m-1}} \quad (3.19)$$

$$C_{m-1} = U'_m a_{m-1} + U_{m-1}, \quad D_{m-1} = -V'_m b_{m-1} + V_{m-1}$$

Полагая $a = a_M$, $b = b_M$, подставим выражения (3.17) и (3.18) в равенство (2.8) и возьмем полученные в результате интегралы на отрезках $[-a_0, b_0]$, $[-a_m, -a_{m-1}]$, $[b_{m-1}, b_m]$ ($m = 0, 1, \dots, M$). После этого, продифференцируем полученное равенство по a , считая U'_M и V'_M постоянными и разделим действительную и мнимую части. В результате можно получить следующие равенство

$$X_{Mj}U'_M + Y_{Mj}V'_M = F_j \quad (j = 1, 2) \quad (3.20)$$

$$F_j = g'_j - \Phi_0^-(\varepsilon'H_{pj}^{(0)-} + l'H_{pj}^{(1)-}) - \Phi_0^+(\varepsilon'H_{pj}^{(0)+} + l'H_{pj}^{(1)+}) - S_j^*$$

$$H_{pj}^{(k)-} = \theta_j^{(k)}(-\rho) - \theta_j^{(k)}(-\alpha_0), \quad H_{pj}^{(k)+} = \theta_j^{(k)}(\beta_0) - \theta_j^{(k)}(-\rho)$$

$$g_1(a) = -2k\delta_0\tau l, \quad g_2(a) = 2k\delta_0\varepsilon$$

$$S_j^* = \begin{cases} 0, & M = 1 \\ \sum_{m=1}^{M-1} (X_{mj}U'_m + Y_{mj}V'_m), & M \geq 2 \end{cases}$$

$$X_{mj} = \varepsilon'H_{mj}^{(0)-} + l'H_{mj}^{(1)-}, \quad X_{mj} = \varepsilon'H_{mj}^{(0)+} + l'H_{mj}^{(1)+}$$

$$H_{mj}^{(k)-} = \theta_j^{(k)}(-\alpha_{m-1}) - \theta_j^{(k)}(-\alpha_m), \quad H_{mj}^{(k)+} = \theta_j^{(k)}(\beta_m) - \theta_j^{(k)}(\beta_{m-1})$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b + a_m}{a - a_m} \right), \quad \beta_m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a + b_m}{b - b_m} \right), \quad \alpha_M = \beta_M = \infty$$

$$\theta_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{(k)}(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{th}^k s}{\operatorname{ch} s} \begin{bmatrix} \cos \tau s \\ \sin \tau s \end{bmatrix} ds, \quad m = 0, 1, \dots, M$$

$$l' \equiv dl(a)/da = \frac{1}{2}(b'(a)+1), \quad \varepsilon' = d\varepsilon(a)/da = \frac{1}{2}(b'(a)-1)$$

Аналогичным образом подстановка (3.17) и (3.18) в (2.14) дает:

$$P_j(a) = h_j(a) - \frac{2}{\pi} B^* m^* \delta_0 \left\{ K_j^0 + \right. \quad (3.21)$$

$$+ \sum_{m=1}^M \left[l(U'_m \varepsilon + C_{m-1}) E_{mj}^{(0)-} + l^2 U'_m E_{mj}^{(1)-} + \right.$$

$$\left. + l(V'_m \varepsilon + D_{m-1}) E_{mj}^{(0)+} + l^2 V'_m + E_{mj}^{(1)+} \right\}$$

$$h_1(a) = \operatorname{Re} h(a), \quad h_2(a) = \operatorname{Im} h(a)$$

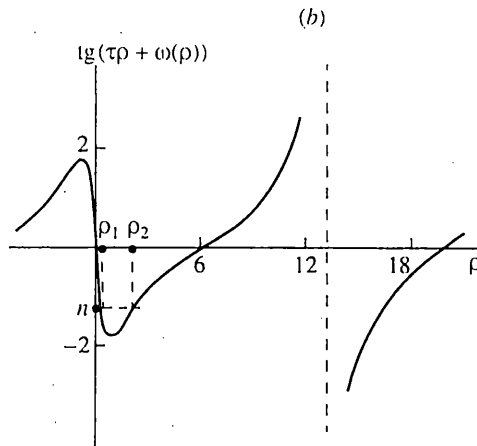
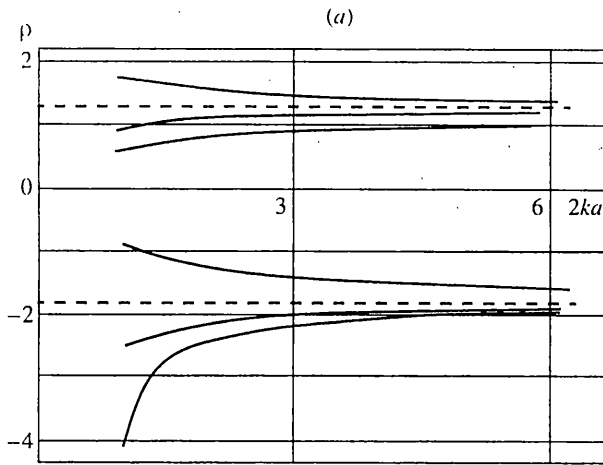
$$K_j^0 = \Phi_0^- l \left[\varepsilon(H_{pj}^{(0)-} + H_{pj}^{(1)-}) + l(H_{pj}^{(1)-} + H_{pj}^{(2)-}) \right] +$$

$$+ \Phi_0^+ l \left[\varepsilon(H_{pj}^{(0)+} + H_{pj}^{(1)+}) + l(H_{pj}^{(1)+} + H_{pj}^{(2)+}) \right]$$

$$E_{mj}^{(k)\pm} = H_{mj}^{(k)\pm} + H_{mj}^{(k+1)\pm}$$

Численные расчеты основывались на равенствах (3.20), (3.21) и проводились шагами по следующей рекуррентной схеме.

Пусть на шаге $M \geq 1$ имеем (при $M = 1$ – из начальных условий (1.6)) известные: a_m , b_m , U_m , V_m , U'_m , V'_m , $m = 0, 1, \dots, M-1$. Зададим новое значение $a_M = a_{M-1} + \Delta a$ и некоторое пока неизвестное значение $b_M = b_{M-1} + \Delta b$, после чего положим $b' = \Delta b / \Delta a$, $a = a_M$, $b = b_M$ и определим $l = (b + a)/2$, $\varepsilon = (b - a)/2$, $l' = (b' - 1)/1$, $\varepsilon' = (b' - 1)/2$, а также величины α_m , β_m , $H_{pj}^{(k)\pm}$, $H_{mj}^{(k)\pm}$, $E_{mj}^{(k)\pm}$, X_{mj} , Y_{mj} , F_j , $m = 0, 1, \dots, M$, $k = 0, 1, j = 1, 2$.



Фиг. 2

Два равенства (3.20), рассматриваемые как система линейных алгебраических уравнений относительно U'_M и V'_M позволяют выразить эти неизвестные через величины X_{Mj} , M_{Mj} , F_j , и пользуясь определениями (3.19), найти:

$$U_M = U_{M-1} - U'_M(a_M - a_{M-1}), \quad V_M = V_{M-1} + V'_M(b_M - b_{M-1})$$

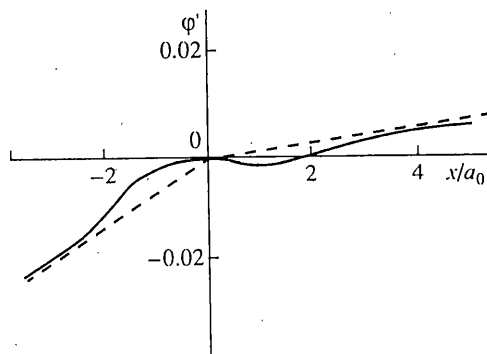
Полученные таким образом величины U_M и V_M оказываются зависимыми от единственного произвольно заданного неизвестного $b = b_M$. С другой стороны, как нетрудно установить, правая часть выражения (3.21) для нагрузок P_j , $j = 1, 2$ также определяется b . Поэтому подстановка (3.21) в зависимость (1.1) дает уравнение, из которого находится неизвестное b .

Таким образом оказываются найденными величины a_m , b_m , U_m , V_m , U'_m , V'_m при $m = 0, 1, \dots, M$ и описанная выше процедура повторяется для следующего $(M + 1)$ -го шага.

В качестве примера реализации описанного алгоритма были произведены расчеты с функцией $N(P_2)$ из соотношения (1.1) вида

$$N(P_2) = \begin{cases} P_{10}, & P_2 < P_{20} \\ n(P_2 - P_{20}) + P_{10}, & P_2 \geq P_{20} \end{cases} \quad (3.22)$$

где $P_{j0} = P_j(a_0)$, $j = 1, 2$. Значение параметра n бралось равным 0,646.



Фиг. 3

При расчетах контролировалось выполнение равенств (2.23).

На фиг. 2,а представлены расчетные зависимости параметра ρ от a при различных начальных условиях по a_0 , b_0 и φ_0^\pm из (3.17). Величины ρ_1 и ρ_2 , соответствующие линейным решениям задачи, показаны на фиг. 2в, где изображена зависимость $\operatorname{tg}(\operatorname{tr} + u(\rho))$ от ρ из (3.10).

Как и следовало ожидать, принимая во внимание линейную асимптотику функции (3.22) $N(s) = ns + O(1)$, $s \rightarrow \infty$, по мере внедрения штампа происходит приближение расчетных значений ρ к ближайшим линейным решениям ρ_1 или ρ_2 .

Это подтверждается и видом функции $\varphi'(x)$, изображенной на фиг. 3, где штрихованные линии соответствуют ближайшему линейному решению с $\rho = \rho_1$, при этом $a_0 = b_0$.

Выводы. 1). Получена система уравнений (1.1), (2.8), (2.14), описывающая внедрение гладкого штампа в упругую полуплоскость при начальных условиях (1.6).

2). Для линейной зависимости (1.1) касательной нагрузки P_1 от нормальной P_2 получен класс точных решений.

3). Описан алгоритм численного решения уравнений (2.8), (2.14), позволяющий рассчитывать процесс внедрения штампа при произвольной зависимости (1.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-00901).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солдатенков И.А. О вдавливании со сцеплением симметричного штампа в упругую полуплоскость // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 267–273.
2. Солдатенков И.А. О вдавливании со сцеплением штампа в упругую полуплоскость при наличии касательной нагрузки // ПММ. Т. 63. Вып. 1. С. 111–118.
3. Мухомелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 511 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1898. 509 с.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
6. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974. 320 с.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, Ч. 1. 1971. 599 с.; Ч. 2. 1973. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.05.1998