

УДК 531.8

© 2000 г. А.В. ВЛАХОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ВАГОНА КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Движение железнодорожного вагона конечной жесткости описывается системами дифференциальных уравнений четырнадцатого и более высоких порядков [1]. Численное моделирование задачи показывает, что разброс величин собственных чисел достигает трех порядков [1], что сильно осложняет ее исследование.

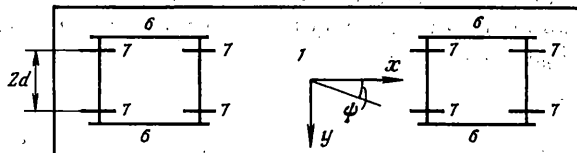
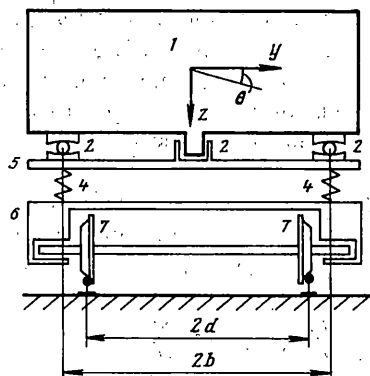
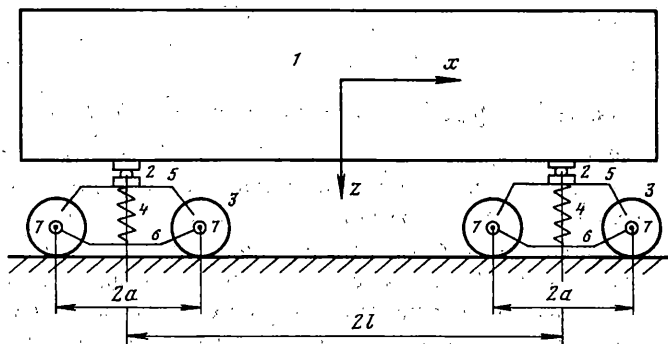
Задача может быть упрощена, так как движение вагона складывается из составляющих, сильно разнесенных по своим временным характеристикам. При этом появляется возможность разделения движений, т.е. построения приближенных математических моделей, описывающих указанные разночастотные составляющие порознь.

В работе строятся три вида вырожденных по А.Н. Тихонову [2, 3] систем уравнений движения грузового вагона: первые две учитывают высокочастотные составляющие движения, определяемые конечной жесткостью конструкции, а третья описывает самые низкочастотные составляющие движения – "кинематические влияния" [4]. Справедливость результатов, полученных при помощи асимптотических процедур, подтверждается численными расчетами.

Рассмотрим [1] четырехосный грузовой вагон, движущийся с постоянной продольной скоростью v по прямолинейному горизонтальному участку пути. Положим, что кузов вагона 1 через пятники 2 опирается на две двухосные тележки 3 одинарного центрального рессорного подвешивания типа ЦНИИ-ХЗ (фигура). В этом случае пружинные комплекты 4 устанавливаются в вертикальном направлении между наддрессорными балками 5, на которые жестко опирается кузов, и боковыми рамами 6 тележек, опирающимися на колесные пары 7. Обрессоренную часть вагона, т.е. кузов с наддрессорными балками тележек, будем считать твердым телом массы m . Предполагая, что колесные пары не имеют поступательных перемещений относительно боковин тележек, будем считать, что необрессоренная часть каждой из тележек ведет себя как твердое тело массы m_1 . Зададим неподвижную систему координат $Oxyz$; ось x направлена вдоль оси пути по направлению движения, ось y направлена вправо по ходу движения, ось z – вертикально вниз. Предположим, что вагон движется по идеально ровному пути; продольные перемещения кузова и тележек одинаковы; конические бандажи всех колес вагона обточены одинаково, так что в случае когда продольные плоскости симметрии пути и вагона совпадают, радиусы кругов катания равны r .

Будем рассматривать поперечные колебания грузового вагона. В линейном приближении они не связаны с колебаниями вагона в вертикальной плоскости xz [1]. Положение обрессоренной части вагона зададим координатой Y его центра масс и малыми углами поворота Θ , Ψ соответственно вокруг продольной и вертикальной центральных осей обрессоренной части вагона. Обозначим через Y_1 , Ψ_1 ; Y_2 , Ψ_2 соответственно боковые перемещения центров масс и углы поворотов первой и второй тележек.

Введем, дополнительно к расчетной схеме [1], параллельно каждому упругому эле-



менту демпферы вязкого трения. Поперечные колебания четырехосного грузового вагона описываются уравнениями, распадающимися для симметричного вагона в отсутствие внешних возмущений на две независимые подсистемы:

$$J_X \Theta'' + (4\beta b^2 + 4\beta_1 h_1^2) \Theta' - 4\beta_1 h_1 Y' + 4\beta_1 h_1 \Sigma_Y' + (4kb^2 + 4k_1 h_1^2) \Theta - 4k_1 h_1 Y + 4k_1 h_1 \Sigma_Y = 0$$

$$mY'' - 4\beta_1 h_1 \Theta' + 4\beta_1 Y' - 4\beta_1 \Sigma_Y' - 4k_1 h_1 \Theta + 4k_1 Y - 4k_1 \Sigma_Y = 0$$

$$2m_1 \Sigma_Y'' + 4\beta_1 h_1 \Theta' - 4\beta_1 Y' + 4\beta_1 \Sigma_Y' + 4k_1 h_1 \Theta - 4k_1 Y + 4k_1 \Sigma_Y - 8F \Sigma_\Psi + \frac{8F}{v} \Sigma_Y' = 0 \quad (1)$$

$$2J_Z^1 \Sigma_\Psi'' + \frac{8Fd\gamma}{r} \Sigma_Y + \frac{8F(a^2 + d^2)}{v} \Sigma_\Psi' = 0$$

$$J_Z \Psi'' + 4\beta_1 l^2 \Psi' + 4\beta_1 l \Delta_Y' + 4k_1 l^2 \Psi + 4k_1 l \Delta_Y = 0$$

$$2m_1 \Delta_Y'' + 4\beta_1 l \Psi' + 4\beta_1 \Delta_Y' + 4k_1 l \Psi + 4k_1 \Delta_Y - 8F \Delta_\Psi + \frac{8F}{v} \Delta_Y' = 0 \quad (2)$$

$$2J_2^1 \Delta_\Psi'' + \frac{8Fd\gamma}{r} \Delta_Y + \frac{8F}{v} (a^2 + d^2) \Delta_\Psi' = 0$$

$$\Sigma_Y = (Y_1 + Y_2)/2, \quad \Sigma_\Psi = (\Psi_1 + \Psi_2)/2, \quad \Delta_Y = (Y_2 - Y_1)/2$$

$$\Delta_\Psi = (\Psi_2 - \Psi_1)/2$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени T , J_X, J_Z – главные центральные моменты инерции обрессоренной части вагона, J_Z^1 – момент инерции необрессоренной части тележки относительно вертикальной главной центральной оси инерции, $2l$ – расстояние между центрами пружинных комплектов вдоль оси вагона, h_1 – высота подъема центра масс обрессоренной части вагона до плоскости, проходящей через оси колесных пар, k и k_1 – жесткости каждого из пружинных комплектов соответственно при вертикальных перемещениях кузова и вращении вокруг продольной оси, β и β_1 – соответствующие k и k_1 коэффициенты вязкого трения, $2b$ – расстояние между центрами пружинных комплектов в поперечном направлении, $2d$ – расстояние между кругами катания колес колесной пары, $2a$ – расстояние между осями тележки, F – коэффициент псевдоскольжения силы крипа [1, 4] контактного взаимодействия колеса с рельсом, γ – коничность поверхности катания колесной пары.

Разделение движений вагона определяется, главным образом, "большими" [5] значениями коэффициента F . Выделим в системе (1) и (2) следующие парциальные постоянные времени:

$T_1 = m\nu / 4F$ – "малая" постоянная времени "быстрых" составляющих движения под действием сил крипа (она получается из оценочных уравнений $2m_1\Sigma_Y'' + 8(F/\nu)\Sigma_Y' = 0, 2m_1\Delta_Y'' + 8(F/\nu)\Delta_Y' = 0$):

$$T_2 = \sqrt{\frac{J_X}{4kb^2 + 4k_1h_1^2}}, \quad T_3 = \sqrt{\frac{J_Z}{4k_1l^2}}, \quad T_4 = \sqrt{\frac{m}{4k_1}}$$

– "средние" парциальные постоянные времени упругих колебаний по соответствующим координатам (они получаются из оценочных уравнений вида $J_X\Theta'' + (4kb^2 + 4k_1h_1^2)\Theta = 0$):

$$T_5 = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{r(a^2 + d^2)}{d\gamma}}$$

– "большая" постоянная времени "кинематических влияний" [4];

$T_6 = 2F/k\nu$ – "большая" постоянная времени "медленных" составляющих движения под действием сил крипа (она оценивается из уравнений баланса сил $4k_1\Sigma_Y + 8(F/\nu)\Sigma_Y' = 0, 2k_1\Delta_Y + 8(F/\nu)\Delta_Y' = 0$).

Числовые значения этих постоянных времени для вагонов, загруженных до полной грузоподъемности так, что груз занимает половину объема кузова, получаются следующими [1]:

$$T_1 = \begin{cases} 0,0012c \\ 0,0017c \\ 0,0023c \end{cases}, \quad T_2 = 0,036c, \quad T_3 = 0,049c, \quad T_4 = 0,056c, \quad T_5 = \begin{cases} 0,2c \\ 0,136c \\ 0,102c \end{cases}, \quad T_6 = \begin{cases} 0,3c \\ 0,2c \\ 0,15c \end{cases}$$

где первая, вторая и третья строки в выражениях для T_1, T_5 и T_6 отвечают $\nu = 20, 30$ и 40 м/с.

Таким образом, устанавливается следующая иерархия постоянных времени задачи: $T_1 \ll T_2 < T_3 < T_4 \ll T_5 < T_6$.

Приведем систему (1), (2) к виду, допускающему применение тихоновской процедуры разделения [2, 3] движений. Для этого проделаем в ней замену от исходного набора фазовых переменных $\Theta, Y, \Sigma_Y, \Sigma_\Psi, \Theta', Y', \Sigma_Y', \Sigma_\Psi', \Psi, \Delta_Y, \Delta_\Psi, \Psi', \Delta_Y', \Delta_\Psi'$ к

набору $\Theta, Y, \Sigma_Y, \Sigma_\Psi, \Theta^*, Y^*, W_\Sigma, U_\Sigma, \Psi, \Delta_Y, \Delta_\Psi, \Psi^*, W_\Delta, U_\Delta$, содержащему "быстрые" переменные

$$W_\Sigma = \Sigma_Y^* - \nu \Sigma_\Psi, \quad U_\Sigma = \frac{(a^2 + d^2)}{\rho_1^2} \Sigma_\Psi^* + \frac{\nu d\gamma}{\rho_1^2 r} \Sigma_Y, \quad W_\Delta = \Delta_Y^* - \nu \Delta_\Psi$$

$$U_\Delta = \frac{(a^2 + d^2)}{\rho_1^2} \Delta_\Psi^* + \frac{\nu d\gamma}{\rho_1^2 r} \Delta_Y \left(\rho_1^2 = \frac{J_z^1}{m} \right)$$

по которым в (1), (2) реализуются силовые воздействия с "большим" [1, 5] коэффициентом $8F/\nu$. Система (1), (2) перейдет в

$$\Theta^* = \Omega_\Theta$$

$$T_2^2 \Omega_\Theta^* = -\Theta - 2\zeta_2 T_2 \Omega_\Theta + \frac{c}{h_1} Y + 2\zeta_4 T_4 \frac{c}{h_1} V_Y - \frac{c}{h_1} \Sigma_Y - 2\zeta_1 T_1 \frac{c}{h_1} \Sigma_\Psi - 2\zeta_1 T_1 \frac{c}{h_1} W_\Sigma$$

$$Y^* = V_Y$$

$$T_4^2 V_Y = h_1 \Theta - 2\zeta_2 T_2 \frac{p}{c} h_1 \Omega_\Theta - Y - 2\zeta_4 T_4 V_Y + \Sigma_Y + 2\zeta_1 T_1 \nu \Sigma_\Psi + 2\zeta_1 T_1 W_\Sigma$$

$$\Sigma_Y^* = \nu \Sigma_\Psi + W_\Sigma \quad (3)$$

$$\Sigma_\Psi^* = -\frac{\nu d\gamma}{r(a^2 + d^2)} \Sigma_Y + \lambda U_\Sigma$$

$$T_1 W_\Sigma^* = -\frac{h_1}{T_6} \Theta - 2\zeta_2 \frac{p T_2}{c T_6} h_1 \Omega_\Theta + \frac{1}{T_6} Y + 2\zeta_4 \frac{T_4}{T_6} V_Y - \left(\frac{1}{T_6} - \frac{T_1}{T_5^2} \right) \Sigma_Y -$$

$$- 2\zeta_1 \frac{T_1}{T_6} \nu \Sigma_\Psi - \left(2\zeta_1 \frac{T_1}{T_6} + 1 \right) W_\Sigma - \lambda T_1 \nu U_\Sigma$$

$$\lambda T_1 U_\Sigma^* = \frac{T_1}{T_5^2} \Sigma_\Psi + T_1 \frac{\nu d\gamma}{r(a^2 + d^2)} W_\Sigma - U_\Sigma$$

$$\Psi^* = \Omega_\Psi$$

$$T_3^2 \Omega_\Psi^* = -\Psi - 2\zeta_3 T_3 \Omega_\Psi - \frac{1}{l} \Delta_Y - 2\zeta_1 \frac{T_1}{l} \nu \Delta_\Psi - 2\zeta_1 \frac{T_1}{l} W_\Delta$$

$$\Delta_Y^* = \nu \Delta_\Psi + W_\Delta$$

$$\Delta_\Psi^* = -\frac{\nu d\gamma}{r(a^2 + d^2)} \Delta_Y + \lambda U_\Delta \quad (4)$$

$$T_1 W_\Delta^* = -\frac{1}{T_6} \Psi - 2\zeta_3 \frac{T_3}{T_6} \Omega_\Psi - \left(\frac{1}{T_6} - \frac{T_1}{T_5^2} \right) \Delta_Y - 2\zeta_1 \frac{T_1}{T_6} \nu \Delta_\Psi - \left(2\zeta_1 \frac{T_1}{T_6} + 1 \right) W_\Delta - T_1 \lambda \nu U_\Delta$$

$$\lambda T_1 W_\Delta^* = \frac{T_1}{T_5^2} \Delta_\Psi + T_1 \frac{\nu d\gamma}{r(a^2 + d^2)} W_\Delta - U_\Delta$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{(a^2 + d^2)}{\rho_1^2}, \quad 2\zeta_2 T_2 = \frac{(\beta b^2 + \beta_1 h_1^2)}{(k b^2 + k_1 h_1^2)}, \quad 2\zeta_1 T_1 = 2\zeta_3 T_3 = 2\zeta_4 T_4 = \frac{\beta_1}{k_1}$$

$$p = \frac{1}{(\beta b^2 / \beta_1 h_1^2 + 1)}, \quad c = \frac{k_1 h_1^2}{k b^2 + k_1 h_1^2}$$

Проведем нормализацию [5] системы (3), (4). Положим

$$\begin{aligned} t &= \frac{T}{T_*}, \quad \theta = \frac{\Theta}{\Theta_*}, \quad \omega_\Theta = \frac{\Omega_\Theta}{\Omega_{\Theta*}}, \quad y = \frac{Y}{Y_*}, \quad v_Y = \frac{V_Y}{V_{Y*}}, \quad \sigma_Y = \frac{\Sigma_Y}{\Sigma_{Y*}}, \quad \sigma_\Psi = \frac{\Sigma_\Psi}{\Sigma_{\Psi*}}, \\ w_\Sigma &= \frac{W_\Sigma}{W_{\Sigma*}}, \quad u_\Sigma = \frac{U_\Sigma}{U_{\Sigma*}}, \quad \psi = \frac{\Psi}{\Psi_*}, \quad \omega_\Psi = \frac{\Omega_\Psi}{\Omega_{\Psi*}}, \quad \delta_Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{Y*}}, \quad \delta_\Psi = \frac{\Delta_\Psi}{\Delta_{\Psi*}}, \\ w_\Delta &= \frac{W_\Delta}{W_{\Delta*}}, \quad u_\Delta = \frac{U_\Delta}{U_{\Delta*}}, \\ \Omega_{\Theta*} &= \frac{\Theta_*}{T_2}, \quad \Omega_{\Psi*} = \frac{\Psi_*}{T_3}, \quad V_{Y*} = \frac{Y_*}{T_4}, \quad Y_* = \Sigma_{Y*} = \Delta_{Y*} = \Pi_{Y*} = h_1 \Theta_*, \\ \Sigma_{Y*} / T_5 &= \nu \Sigma_{\Psi*} = W_{\Sigma*} = \lambda \nu T_5 U_{\Sigma*}, \quad \Delta_{Y*} / T_5 = \nu \Delta_{\Psi*} = W_{\Delta*} = \lambda \nu T_5 U_{\Delta*} \end{aligned}$$

Здесь $T_*, \dots, U_{\Delta*}$ – характерные для рассматриваемого класса движения типа "кинематических влияний" значения соответствующих величин, выбираемые так, чтобы их нормализованные аналоги $t, \dots, u_\Delta$, не превосходили значений порядка единицы.

Выделяя для исследования самые медленные составляющие движения вагона, развивающиеся на временах порядка $T \sim T_5 \sim T_6$, примем $T_* = T_6$. Системы (3), (4) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \mu_2 \theta' &= \omega_\Theta \\ \mu_2 \omega_\Theta' &= -\theta - 2\zeta_2 \omega_\Theta + cy + 2\zeta_4 cv_Y - c\sigma_Y - \mu_1 2\zeta_1 c\kappa\sigma_\Psi - \mu_1 2\zeta_1 c\kappa w_\Sigma \\ \mu_4 y' &= v_Y \\ \mu_4 v_Y' &= \theta + 2\zeta_2 \frac{p}{c} \omega_\Theta - y - 2\zeta_4 v_Y + \sigma_Y + \mu_1 2\zeta_1 \kappa\sigma_\Psi + \mu_1 2\zeta_1 \kappa w_\Sigma \\ \sigma_Y' &= \kappa\sigma_\Psi + \kappa w_\Sigma \\ \sigma_\Psi' &= -\kappa\sigma_Y + \lambda\kappa u_\Sigma \\ \mu_1 w_\Sigma' &= -\frac{1}{\kappa} \theta - \frac{2\zeta_2 p}{\kappa c} \omega_\Theta + \frac{1}{\kappa} y + \frac{2\zeta_4}{\kappa} v_Y - \left(\frac{1}{\kappa} - \mu_1 \kappa \right) \sigma_Y - \mu_1 2\zeta_1 \sigma_\Psi - (\mu_1 2\zeta_1 + 1) w_\Sigma - \mu_1 \kappa u_\Sigma \\ \lambda \mu_1 u_\Sigma' &= \mu_1 \kappa \lambda \sigma_\Psi + \mu_1 \kappa \lambda w_\Sigma - u_\Sigma \\ \mu_3 \psi' &= \omega_\Psi \\ \mu_3 \omega_\Psi' &= -\psi - 2\zeta_3 \omega_\Psi - \delta_Y - \mu_1 2\zeta_1 \kappa \delta_\Psi - \mu_1 2\zeta_1 \kappa w_\Delta \\ \delta_Y' &= \kappa \delta_\Psi + \kappa w_\Delta \\ \delta_\Psi' &= -\kappa \delta_Y + \lambda \kappa u_\Delta \\ \mu_1 w_\Delta' &= -\frac{1}{\kappa} \psi - \frac{2\zeta_3}{\kappa} \omega_\Psi - \left(\frac{1}{\kappa} - \mu_1 \kappa \right) \delta_Y - \mu_1 2\zeta_1 \delta_\Psi - (\mu_1 2\zeta_1 + 1) w_\Delta - \mu_1 \kappa u_\Delta \\ \lambda \mu_1 u_\Delta' &= \mu_1 \kappa \lambda \delta_\Psi + \mu_1 \kappa \lambda w_\Delta - u_\Delta \\ \mu_1 &= \frac{T_1}{T_6}, \quad \mu_2 = \frac{T_2}{T_6}, \quad \mu_3 = \frac{T_3}{T_6}, \quad \mu_4 = \frac{T_4}{T_6}, \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{T_5}{T_6}. \end{aligned} \tag{5}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени t . Для

выбранных ранее из [1] числовых значений параметров вагона имеем

$$\mu_1 = \begin{cases} 0,004 \\ 0,009, \\ 0,015 \end{cases}, \quad \mu_2 = \begin{cases} 0,12 \\ 0,18, \\ 0,24 \end{cases}, \quad \mu_3 = \begin{cases} 0,16 \\ 0,25, \\ 0,33 \end{cases}, \quad \mu_4 = \begin{cases} 0,19 \\ 0,28 \\ 0,37 \end{cases}$$

где первая, вторая и третья строки в выражениях для $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ отвечают $v = 20, 30$ и 40 м/с соответственно.

Будем рассматривать систему (5), (6) как сингулярно возмущенную [2, 3] по малым параметрам $\mu_1 \ll \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 \ll 1$.

В соответствии с [2, 3], проведем вырождение системы (5), (6) по всем малым параметрам, полагая $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$

$$\theta = 0, \quad y = \sigma_Y, \quad \sigma'_Y = \kappa \sigma_\Psi, \quad \sigma'_\Psi = -\kappa \sigma_Y \quad (7)$$

$$-\psi = \delta_Y, \quad \delta'_Y = \kappa \delta_\Psi, \quad \delta'_\Psi = -\kappa \delta_Y \quad (8)$$

Эта система описывает незатухающие колебания – "кинематические вливания" [4] тележки грузового вагона. Для числовых значений параметров из [1] частота "кинематических вливаний" принимает следующие значения: $\omega_3 = 4,9$ (1/с), $7,3$ (1/с), $9,8$ (1/с) при $v = 20, 30$ и 40 м/с соответственно. Заметим, что частота "кинематических вливаний" вагона совпадает с частотой "кинематических вливаний" отдельной двухосной тележки. Последняя, в свою очередь, будет такой же, как у двухосного вагона, рассмотренного в [6, 7], если положить расстояние между его осями равным $2a$.

В таблице 1 представлены значения собственных чисел системы уравнений (5), (6), посчитанные при $\kappa = 1,47, \lambda = 1,02, c = 0,716, p = 0,25, 2\zeta_1 = 0,69, 2\zeta_2 = 0,021, 2\zeta_3 = 0,017, 2\zeta_4 = 0,015$.

Обратим внимание на то, что собственные значения в таблице 1, соответствующие наименьшим частотам, имеют положительные вещественные части. Это объясняется структурной неустойчивостью решения системы (5), (6) в отсутствие трения [1], влекущей за собой неустойчивость при малых значениях коэффициентов вязкого трения β, β_1 .

Решения исходной (5), (6) и вырожденной по всем малым параметрам (7), (8) систем близки по значениям низших частот "кинематических вливаний", но имеют качественное отличие, так как система (7), (8) не описывает неустойчивость решения системы (5), (6). Поэтому близость решений исходной и вырожденной систем можно гарантировать лишь на конечных интервалах времени $t \sim 1$. Это означает, что на временах порядка $T \sim T_6$ колебания вагона достигают предельных значений, при которых дальнейшее возрастание размаха колебаний ограничивается ребордами колес. Учет ребора в модели абсолютно жесткого вагона произведен в работе [7].

Для доказательства допустимости перехода на временах порядка $T \sim T_6$ к вырожденной системе (7), (8) надо проверять выполнение условий теоремы Тихонова [2, 3] для последовательных вырождений системы (5), (6) по μ_1 , и, затем, по всем вместе μ_2, μ_3, μ_4 , так как μ_2, μ_3 и μ_4 являются величинами одного порядка.

Полагая в (5), (6) $\mu_1 = 0$, получим

$$\mu_2 \theta' = \omega_\Theta$$

$$\mu_2 \omega'_\Theta = -\theta - 2\zeta_2 \omega_\Theta + cy + 2\zeta_4 cv_Y - c\sigma_Y$$

$$\mu_4 y' = v_Y$$

$$\mu_4 v'_Y = \theta + 2\zeta_2 \frac{p}{c} \omega_\Theta - y - 2\zeta_4 v_Y + \sigma_Y$$

$$\sigma'_Y = -\theta - 2\zeta_2 \frac{p}{c} \omega_\Theta + y + 2\zeta_4 \nu_Y - \sigma_Y + \kappa \sigma_\Psi$$

$$\sigma'_\Psi = -\kappa \sigma_Y \quad (9)$$

$$\mu_3 \Psi' = \omega_\Psi, \quad \mu_3 \omega'_\Psi = -\Psi - 2\zeta_3 \omega_\Psi - \delta_Y$$

$$\delta'_Y = -\Psi - 2\zeta_3 \omega_\Psi - \delta_Y + \kappa \delta_\Psi, \quad \delta'_\Psi = -\kappa \delta_Y \quad (10)$$

Основным условием, обеспечивающим законность указанного вырождения, является асимптотическая устойчивость точки покоя "присоединенной" по А.Н. Тихонову [2, 3] к (5), (6) системы, описывающей движение по "быстрым" для (5), (6) переменным $w_\Sigma, u_\Sigma, w_\Delta, u_\Delta$ в "быстром" времени $\tau_1 = t/\mu_1$. В данном случае "присоединенная" система имеет вид

$$dw_\Sigma / d\tau_1 = -w_\Sigma + \dots; \quad du_\Sigma / d\tau_1 = -u_\Sigma + \dots \quad (11)$$

$$dw_\Delta / d\tau_1 = -w_\Delta + \dots; \quad du_\Delta / d\tau_1 = -u_\Delta + \dots \quad (12)$$

Здесь многоточиями обозначены не выписываемые для простоты слагаемые, зависящие от остальных "медленных" переменных системы (5), (6), которые считаются по [2, 3] постоянными. Проверка асимптотической устойчивости положений равновесия систем (11), (12) дает, очевидно, положительный ответ.

В соответствии с [2, 3], погрешность приближения вырожденной системой (9), (10) исходной системы (5), (6) по медленным составляющим движения дается асимптотической оценкой порядка μ_1 , справедливой при $\mu_1 \rightarrow 0$ на конечном временном интервале $0 < t \leq t_1 \sim 1$ вне пограничного слоя Δt_1 , оцениваемого величиной $\Delta t_1 \sim -\mu_1 \ln \mu_1$.

Для конечных значений малых параметров погрешности приближения следует контролировать численно. В табл. 2 представлены результаты вычисления собственных чисел для вырожденной по μ_1 системы уравнений движения грузового вагона, посчитанные при тех же, что и ранее значениях параметров:

Сравнение табл. 1 и 2 показывает, что модель (9), (10) приближает исходную систему (5), (6) по медленным составляющим движения с ожидаемой точностью порядка μ_1 .

Размерный аналог системы (9), (10) можно получить из исходной системы (1), (2), если положить в последней равными нулю момент инерции и массу тележки, а также коэффициенты вязкого трения, стоящие при Σ_Y^*, Δ_Y^* .

Проверка условий теоремы Тихонова [2, 3] для вырождения системы (9), (10) по μ_2, μ_3, μ_4 тривиальна и дает положительный ответ.

Попытка упростить модель (9), (10) так, чтобы упрощенная модель описывала указанную выше неустойчивость приводит к успеху, если положить в (9), (10) $\mu_2 = 0, \mu_3, \mu_4 \neq 0$:

$$\mu_4 y' = \nu_Y$$

$$\mu_4 \nu'_Y = -(1-c)y - (1-c)2\zeta_4 \nu_Y + (1-c)\sigma_Y$$

$$\sigma'_Y = (1-c)y + (1-c)2\zeta_4 \nu_Y - (1-c)\sigma_Y + \kappa \sigma_\Psi \quad (13)$$

$$\sigma'_\Psi = -\kappa \sigma_Y$$

$$\theta = cy + 2\zeta_4 c \nu_Y - c \sigma_Y$$

$$\mu_3 \Psi' = \omega_\Psi, \quad \mu_3 \omega'_\Psi = -\Psi - 2\zeta_3 \omega_\Psi - \delta_Y$$

$$\delta'_Y = -\Psi - 2\zeta_3 \omega_\Psi - \delta_Y + \kappa \delta_\Psi, \quad \delta'_\Psi = -\kappa \delta_Y \quad (14)$$

Таблица 1

λ_{ij}	$v = 20, \text{ м/с}$	$v = 30, \text{ м/с}$	$v = 30, \text{ м/с}$
$\lambda_{1,2}$	-830, -830	$-549 \pm 5,73i$	$-439 \pm 9,32i$
$\lambda_{3,4}$	-830, -830	$-549 \pm 5,73i$	$-439 \pm 9,32i$
$\lambda_{5,6}$	$-1,79 \pm 31,76i$	$-2,585 \pm 31,87i$	$-3,47 \pm 31,91i$
$\lambda_{7,8}$	$-1,94 \pm 20,78i$	$-3,047 \pm 19,965i$	$-4,37 \pm 20,38i$
$\lambda_{9,10}$	$-0,42 \pm 8,20i$	$-0,93 \pm 8,805i$	$-0,846 \pm 10,25i$
$\lambda_{11,12}$	$0,126 \pm 4,89i$	$0,472 \pm 7,272i$	$1,08 \pm 9,45i$
$\lambda_{13,14}$	$0,21 \pm 4,87i$	$0,746 \pm 6,832i$	$0,83 \pm 7,88i$

Таблица 2

λ_{ij}	$v = 20, \text{ м/с}$	$v = 30, \text{ м/с}$	$v = 40, \text{ м/с}$
$\lambda_{1,2}$	$-1,79 \pm 31,74i$	$-2,58 \pm 31,81i$	$-3,46 \pm 31,79i$
$\lambda_{3,4}$	$-1,94 \pm 20,76i$	$-3,048 \pm 19,9i$	$-4,41 \pm 20,33i$
$\lambda_{5,6}$	$-0,42 \pm 8,19i$	$-0,97 \pm 8,78i$	$-0,95 \pm 10,286i$
$\lambda_{7,8}$	$0,097 \pm 4,89i$	$0,38 \pm 7,29i$	$0,9 \pm 9,52i$
$\lambda_{9,10}$	$0,18 \pm 4,876i$	$0,69 \pm 6,87i$	$0,78 \pm 7,87i$

Таблица 3

λ_{ij}	$v = 20, \text{ м/с}$	$v = 30, \text{ м/с}$	$v = 40, \text{ м/с}$
$\lambda_{1,2}$	$-1,94 \pm 20,76i$	$-3,048 \pm 19,9i$	$-4,41 \pm 20,33i$
$\lambda_{3,4}$	$-0,686 \pm 9,36i$	$-1,44 \pm 9,86i$	$-2,07 \pm 11,13i$
$\lambda_{5,6}$	$0,097 \pm 4,89i$	$0,38 \pm 7,29i$	$0,9 \pm 9,52i$
$\lambda_{7,8}$	$0,175 \pm 4,88i$	$0,69 \pm 6,98i$	$1,09 \pm 8,23i$

Выполнение условий теоремы Тихонова обеспечивает близость порядка μ_2 решений систем (9), (10) и (13), (14) по медленным переменным при $\mu_2 \rightarrow 0$ на конечном временном интервале $0 < t \leq t_2 \sim 1$ вне пограничного слоя Δt_2 , оцениваемого величиной $\Delta t_2 \sim -\mu_2 \ln \mu_2$ [3].

Собственные числа системы (13), (14), посчитанные при тех же, что и ранее значениях параметров, представлены в табл. 3.

Как видно из сравнения таблиц 1 и 3, система (13), (14) с ожидаемой погрешностью порядка μ_2 может рассматриваться в качестве приближенной математической модели поперечного движения вагона. Размерный аналог системы (13), (14) можно получить из исходной системы (1), (2), если положить в последней равными нулю момент инерции и массу тележки, момент инерции кузова относительно оси x , а также коэффициенты вязкого трения, стоящие при Σ_y^* , Δ_y^* , Θ^* .

В случаях $\mu_3 = 0$, $\mu_2, \mu_4 \neq 0$; $\mu_4 = 0$, $\mu_2, \mu_3 \neq 0$ низкочастотные составляющие движения "теряют" свои положительные вещественные части и делаются незатухающими.

Заметим, что в работе [7] неустойчивость движения вагона объяснялась в рамках абсолютно жесткой модели. Для этого в [7] строились "уточненные" по μ_1 уравнения, описывающие движение с погрешностью порядка μ_1^2 . При этом значения положительных вещественных частей собственных значений, соответствующих "кинематическим влияниям", оказывались величинами порядка μ_1 . Как следует из сопостав-

ления систем (7), (8) и (13), (14), неустойчивость движения последней определяется, в решающей степени, конечной жесткостью конструкции вагона. Так, подсчет собственных значений системы (5), (6) в отсутствие трения [1] оставляет вещественные части корней $\lambda_{11,12}$, $\lambda_{13,14}$, из табл. 1 практически без изменения.

Таким образом, в работе построен следующий ряд приближенных математических моделей поперечного движения железнодорожного вагона:

модель (9), (10) десятого порядка, описывающая движение по упругим и кинематическим его составляющим с погрешностью порядка $\mu_1 \sim 10^{-3}$ по сравнению с исходной моделью (5), (6) четырнадцатого порядка;

модель (13), (14) восьмого порядка, с погрешностью порядка $\mu_2 \sim 0,1-0,25$ описывающая упругие и кинематические составляющие движения с их неустойчивостью;

модель (7), (8) четвертого порядка, с погрешностью порядка $\mu_4 \sim 0,2-0,4$ описывающая незатухающие кинематические движения.

Использование той или иной модели определяется классом задач и требованиями к точности их решения.

Автор выражает благодарность И.В. Новожилову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00961).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л. Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1972. 197 с.
2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 3. С. 575-586.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
4. Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
5. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
6. Новожилов И.В. Разделение движений рельсового экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 55-59.
7. Копылов И.А., Новожилов И.В. Модель переменной структуры для поперечного движения железнодорожного вагона // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 27-36.

Москва

Поступила в редакцию
30.03.1999