

УДК 531.55:521.1

© 2000 г. Л.В. ДОКУЧАЕВ

## **НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ИСЗ КОРНЕВЫМ МЕТОДОМ**

Динамика современных космических аппаратов (КА) во многом зависит от технических решений, полученных на основе принятой математической модели. При долговременном периоде существования КА на орбите обычно используется режим одноосной ориентации путем вращения его корпуса относительно направления на Солнце. Если КА имеет гибкие элементы на борту в виде длинных стержневых антенн, то в математической модели необходимо учитывать упругость таких элементов. Если осуществляется одноосная ориентация КА путем закрутки, то в математической модели должны учитываться нелинейные составляющие.

При запуске спутников "Прогноз М2" по проекту "Интербол" была обнаружена неустойчивость гироскопической стабилизации аврорального зонда. Как показано в статье, большие отклонения продольной оси КА от направления на Солнце объяснимы, если используется более полная нелинейная модель с учетом упругих низкочастотных колебаний девяти гибких антенн, установленных на борту аврорального зонда. В то же время у хвостового зонда, имеющего четыре антенны, такая неустойчивость не наблюдается.

В статье рассматривается нелинейная динамика ИСЗ с упругими элементами. Обсуждаются методы составления уравнений движения, и предлагается математическая модель, на основе которой возможно воспроизведение нелинейных эффектов, наблюдаемых в полете некоторых ИСЗ, и прогнозирование процессов ориентации на вновь проектируемых объектах. Показывается, при каких конструктивных параметрах вращение КА будет устойчивым или неустойчивым.

**1. Введение.** Проблема устойчивости одноосной ориентации космического аппарата (КА), имеющего гибкие элементы на борту, возникла уже на первом американском ИСЗ "Эксплорер-1", который быстро на первых же витках орбиты перешел в режим кувыркания. Он имел вытянутую форму, напоминающую карандаш, был снабжен четырьмя гибкими штыревыми антеннами, расположенными вдоль его поперечных осей. Антенны действовали как центробежные маятники, резонирующие на частоте, близкой к частоте прецессии спутника. Аналогичная картина наблюдалась при полете отечественного легкого спутника "Космос-142", запущенного в 1967 г. Пять антенн спутника, 4 из которых расположены крестообразно перпендикулярно к продольной оси, а пятая направлена вдоль нее, сделаны из предварительно напряженной ленты, намотанной на барабан и распускаемой на орбите. В результате образуются штыри большого удлинения с малой изгибной жесткостью.

Для конструкторов такие режимы оказались неожиданными, так как при проектных расчетах либо ИСЗ предполагались абсолютно жесткими, либо рассматривались только линейные уравнения движения упругого тела. Однако для получения достоверного прогноза в случае больших угловых поворотов требуется применение нелинейной теории.

В работе [1] изложен общий подход к составлению нелинейных уравнений движения деформируемого тела, когда на перемещения связанной системы координат

никаких ограничений не накладывается, упругие деформации учитываются с точностью до второго порядка малости, а в тензоре напряжений ограничиваются линейными членами. В недавней работе [2] учитываются немалые повороты объекта, тензор напряжений и упругие деформации с точностью до второго порядка малости. При этом используется традиционный для XIX и первой половины XX веков вывод уравнений на основе принципа возможных перемещений и обобщенных уравнений Эйлера – Лагранжа.

В настоящей работе предлагается более оптимальный и универсальный способ составления строгих нелинейных уравнений движения для неголономных механических систем с диссипацией энергии, так называемый метод Даламбера – Кейна, который использовался в работе [3], и суть которого будет изложена ниже.

В работе [4] автором был рассмотрен вопрос об устойчивости режима одноосной ориентации космического аппарата путем вращения его около продольной оси корпуса, направленной на Солнце. Если КА достаточно жесткий и его момент инерции относительно продольной оси существенно больше поперечного момента инерции, то такое вращение является устойчивым. Однако, если КА снабжен антеннами в виде штыревых упругих штанг, то в зависимости от их расположения на корпусе, вращение КА становится асимптотически неустойчивым. Как показывают результаты телеметрических измерений, на целом ряде таких КА наблюдались большие уходы продольной оси от заданного направления, что можно объяснить неустойчивостью прецессионного движения КА с упругими штангами.

В настоящее время в рамках проекта "Интербол" [5] запущен на орбиту спутник Авроральный зонд, на котором наблюдаются большие уходы продольной оси от направления на Солнце, хотя его продольный момент инерции почти в два раза превышает поперечный. Ниже решается задача об устойчивости вращения таких КА, выбираются специальные безразмерные конструктивные параметры, в плоскости которых устанавливается автомодельность рассмотренных случаев.

## **2. Нелинейные уравнения пространственного движения деформируемого тела.**

В линейной динамике упругого ЛА рассматривались такие возмущенные движения, при которых квадратами и произведениями угловых скоростей и обобщенных координат упругих колебаний конструкций можно было пренебречь. Вид получаемых уравнений не зависел от способа выбора связанной системы координат, а сами уравнения образовывали линейную систему с постоянными коэффициентами, для исследования решений которых имелся хорошо разработанный математический аппарат.

На участках одноосной ориентации путем вращения угловые скорости и углы поворота корпуса являются немалыми величинами. Механические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно кинематических параметров и уравнениями в частных производных относительно упругих, называются гибридными.

Непосредственное интегрирование уравнений движения гибридных систем практически невозможно из-за сложности математического аппарата и громоздкости вычислений. Поэтому общим подходом к проблеме составления математической модели являются различные методы дискретизации. Решению некоторых проблем нелинейной динамики КА с деформируемыми элементами посвящена работа [3].

Уравнения движения можно составлять несколькими путями. Довольно распространенным является метод Эйлера – Лагранжа. В случае голономных связей удобно применение уравнений Лагранжа 2-го рода, так как автоматически исключаются реакции связей. Для неголономных систем применяют принцип Даламбера, но при этом приходится учитывать реакции внутренних связей, действующих на отдельные деформируемые элементы. Попытка объединить физическую наглядность принципа Даламбера с аналитичностью метода Лагранжа была предпринята Кейном в работе [6]. Метод Даламбера – Кейна менее громоздок и обладает преимуществами в случае неголономных систем, так как не требуется введения неопределенных множителей Лагранжа, вычисления кинетической энергии и ее частных производных.

Рассмотрим КА как деформируемую механическую систему. Положение ее частицы в деформированном состоянии определяется соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{u} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{r}_0$  – вектор кинематических перемещений центра затвердевшей системы,  $\boldsymbol{\rho}$  – радиус-вектор частицы в недеформированном состоянии,  $\mathbf{u}$  – вектор смещения частицы в результате деформации, вызванной упругими перемещениями конструкции.

Вектор абсолютной скорости частицы выражается формулой

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{u}} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{V}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – поступательная и угловая скорости затвердевшей системы.

Вектор кажущегося ускорения центра масс ИСЗ определяется разностью между вектором его ускорения и вектором ускорения земного притяжения

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{V}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_0 - \mathbf{g} \quad (2.3)$$

Вектор кажущегося ускорения произвольной точки объекта, радиус-вектор которой  $\mathbf{r}$ , определяется формулой

$$\mathbf{a} - \mathbf{g} = \mathbf{j} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.4)$$

Здесь все векторные величины проектируются на оси связанной системы координат. Для частиц недеформированного корпуса ИСЗ производные от радиус-вектора по времени равны нулю.

Наиболее строгим методом дискретизации является модальный анализ, если известны решения краевых задач теории упругости. К сожалению, эти решения получены применительно к простым конструкциям. Поэтому зададимся совокупностью функций, которые могут описывать совместные формы свободных колебаний всей конструкции  $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$ , но могут являться и каким-либо приближением к упомянутым формам. Обязательным свойством такой бесконечной системы функций является ее полнота, и для обеспечения сходимости метода требуется удовлетворение геометрическим граничным условиям. Удобно в качестве таких функций использовать собственные формы не вращающейся конструкции, но можно и любые предполагаемые формы, используемые в методе дискретизации, объединенных общим названием метода Рейля–Ритца–Галеркина. Представим относительные перемещения частиц конструкции в виде разложения в ряд по обобщенным координатам

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, t) = \varphi_n(\boldsymbol{\rho})q_n(t) + \frac{1}{2}\Psi_{nm}(\boldsymbol{\rho})q_n(t)q_m(t) + \dots \quad (2.5)$$

где квадратичные и более высокого порядка члены зависят от вида геометрической нелинейности деформации, а симметричные относительно индексов  $n, m$  функции  $\Psi_{nm}$  выражаются через функции  $\varphi_n$ . Здесь и ниже используется тензорная запись суммирования по немым (повторяющимся) индексам.

В соответствии с методом Даламбера – Кейна положение деформируемой механической системы определяется квазикоординатами  $\pi_n$  и квазискоростями  $\dot{\pi}_n$ . Вектор, представляющий собой коэффициент при величине квазискорости в выражении (2.2) и называемый парциальной скоростью  $\mathbf{V}_{\pi_n}$ , квазикоординаты  $\pi_n$ , находится как частная производная от скорости  $\mathbf{V}$  по квазискорости  $\dot{\pi}_n$ . В частности парциальная скорость координаты  $q_n$  будет равна  $\mathbf{V}_{q_n} = \varphi_n(\boldsymbol{\rho}) + \Psi_{nm}(\boldsymbol{\rho})q_m(t) + \dots$

Согласно второму закону Ньютона имеем

$$\mathbf{a} dm = \mathbf{g} dm + \nabla \Theta dQ \quad (2.6)$$

где ускорение  $\mathbf{a}$  определяется формулой (2.4);  $\mathbf{g}$  – плотность элементарной массовой

силы, последний член в (2.6) характеризует внутренние силы в системе через тензор напряжения  $\Theta$ ;  $dm$ ,  $dQ$  – элементарные масса и ее объем.

Чтобы получить уравнение, определяющее квазискорость  $\dot{\pi}_n$ , умножим левую и правую части уравнения (2.6) на соответствующую парциальную скорость квазиординаты  $\pi_n$  и проинтегрируем обе части по всему объему  $Q$ . При этом суммируются только активные массовые и внешние поверхностные силы, а внутренние неработающие силы и силы реакции неголономных связей можно не учитывать.

Если проделать процедуру составления шести скалярных уравнений методом Даламбера – Кейна для квазиординат, соответствующих кинематическим параметрам поступательной и угловой скорости, то получим векторные уравнения сил и моментов.

Уравнение сил имеет вид

$$\int (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dm = \int (\nabla \Theta) dQ + \mathbf{P} \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{P}$  – главный вектор внешних поверхностных сил.

Уравнение моментов запишется в виде

$$\int \mathbf{r} \times (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dm = \int \mathbf{r} \times (\nabla \Theta) dQ + \mathbf{M} \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{M}$  – главный момент относительно точки  $O$  внешних поверхностных сил.

Наконец, любую из бесконечного числа квазиординат, соответствующую упругим деформациям, можно получить, используя скалярное уравнение

$$\int \mathbf{V}_{\pi_n} (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dm = \int \mathbf{V}_{\pi_n} (\nabla \Theta) dQ \quad (2.9)$$

Если в качестве квазиординаты, соответствующей упругим деформациям, принять обобщенную координату  $q_n$ , и если пренебречь квадратичными и более высокими составляющими, то из формул (2.2) и (2.5) следует, что ее парциальная скорость равна функции  $\varphi_n$ .

В этом случае предлагаемая процедура составления уравнений движения эквивалентна составлению уравнений сил и моментов, определяющих поступательное и вращательное движение (уравнения Эйлера – Лагранжа), и составлению уравнений для обобщенных координат методом типа Бубнова–Галеркина, если функции  $\varphi_n$  удовлетворяют всем граничным условиям.

Общая система нелинейных уравнений движения деформируемой конструкции в указанном случае имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} m\mathbf{j} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2} &= \mathbf{P} \\ \frac{d}{dt} (J\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (J\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{L} \times \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} &= \mathbf{M} \\ a_{nm} \frac{d^2 q_m}{dt^2} + b_{nmk} \frac{dq_m}{dt} \frac{dq_k}{dt} + c_{nm} q_m + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_n} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_n} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} & \\ - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \frac{\partial J}{\partial q_n} \boldsymbol{\omega} - 2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q_n} \boldsymbol{\omega} &= Q_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \mathbf{r} dm, \quad \mathbf{G} = \int \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} dm, \quad b_{nmk} = \int (\Psi_{mk} + \dots) (\varphi_n + \Psi_{nl} q_l + \dots) dm \\ a_{nm} &= \int (\varphi_m + \Psi_{mk} q_k + \dots) (\varphi_n + \Psi_{nl} q_l + \dots) dm \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $m$ ,  $J$  – масса и тензор инерции всей деформируемой конструкции;  $\mathbf{L}$  – вектор статического момента;  $\mathbf{G}$  – вектор кинетического момента относительного движения

частиц;  $a_{nm}, b_{nm}$  – обобщенные присоединенные массы;  $c_{nm}$  – обобщенные жесткости упругой системы;  $\mathbf{M}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}_n$  – обобщенные внешние и диссипативные моменты и силы.

Система дифференциальных уравнений (2.10) представляет собой математическую модель движения деформируемой механической системы, совершающей конечные повороты и перемещения в абсолютном пространстве и немалые деформации, которые представлены разложениями в ряд по малому параметру  $q_n$ . Количество учитываемых членов в разложениях зависит от характера задачи. Например, когда рассматривалась задача об устойчивости круговой волны на поверхности жидкого топлива в баках ракет, в системе (2.10) учитывались слагаемые до третьего порядка малости относительно обобщенных координат  $q_n$ , включительно [3]. При рассмотрении устойчивости вращения спутника с упругими антеннами оставались слагаемые, линейные относительно  $q_n$ .

**3. Математическая модель конечных разворотов КА при немалых деформациях его элементов.** С учетом бесконечных разложений (2.5) векторы статического момента  $\mathbf{L}$  и относительного кинетического момента  $\mathbf{G}$ , тензор инерции  $J$ , а также приведенные массы  $a_{nm}$  и  $b_{nmk}$  будут раскладываться в ряды по малому параметру  $q_n$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_{0n}q_n + \frac{1}{2}\mathbf{L}_{nm}q_nq_m + \dots \quad (3.1)$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_{0n} + \mathbf{G}_{nm}q_m)\dot{q}_n + \dots; \quad J = J_0 + (J_{0n} + J_{0n}^T)q_n + J_{nm}q_nq_m + \dots$$

$$a_{nm} = a_{nm0} + a_{nmk}q_k + \dots; \quad b_{nmk} = b_{nmk0}q_k + \dots$$

$$\mathbf{L}_0 = \int \boldsymbol{\rho} dm, \quad \mathbf{L}_{0n} = \int \boldsymbol{\varphi}_n dm, \quad \mathbf{L}_{nm} = \int \boldsymbol{\Psi}_{nm} dm \quad (3.2)$$

$$\mathbf{G}_{0n} = \int \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\varphi}_n dm, \quad \mathbf{G}_{nm} = \int (\boldsymbol{\varphi}_m \times \boldsymbol{\varphi}_n + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\Psi}_{nm}) dm$$

$$J_{0n} = \int ((\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n)E - \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\varphi}_n) dm, \quad J_{0n}^T = \int ((\boldsymbol{\varphi}_n \cdot \boldsymbol{\rho})E - \boldsymbol{\varphi}_n \otimes \boldsymbol{\rho}) dm$$

$$J_{nm} = \int \left\{ ((\boldsymbol{\varphi}_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{nm})E - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_n \otimes \boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\Psi}_{nm} + \boldsymbol{\varphi}_m \otimes \boldsymbol{\varphi}_n + \boldsymbol{\Psi}_{nm} \otimes \boldsymbol{\rho})) \right\} dm$$

$$a_{nm0} = \int \boldsymbol{\varphi}_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_m dm, \quad a_{nmk} = \int (\boldsymbol{\varphi}_n \cdot \boldsymbol{\Psi}_{mk} + \boldsymbol{\Psi}_{nk} \cdot \boldsymbol{\varphi}_m) dm, \quad b_{nmk0} = \int \boldsymbol{\Psi}_{mk} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n dm$$

где  $E$  – единичный диагональный тензор; верхний индекс ( $T$ ) означает транспонирование векторов, тензоров и матриц; точкой обозначается скалярное произведение векторов; знаком ( $\times$ ) – векторное произведение, а знаком ( $\otimes$ ) – диадное произведение.

Будем применять аппарат теории матриц для представления математических операций. Представим любой вектор в виде произведения трехмерной строки ортов  $e_1, e_2, e_3$  системы координат  $Ox_1x_2x_3$  на матрицу-столбец его трех компонент по осям этой системы. Например, радиус-вектор можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r} = E\mathbf{r}, \quad E = (e_1, e_2, e_3), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

При конечных разворотах или ротационном вращении КА формы упругих колебаний могут быть двух видов: радиальные по отношению к оси вращения  $\boldsymbol{\varphi}_{ns}$  и тангенциальные  $\boldsymbol{\varphi}_{np}$ , т.е. обобщенные координаты  $q_n$  распадаются на две группы:  $s_u$  и  $p_u$  соответственно. Тогда в матричных обозначениях формулы (3.1) примут вид

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + \mathbf{L}_s^1 \dot{s} + \mathbf{L}_p^1 \dot{p} + \frac{1}{2}(s^T(\mathbf{L}_{ss}^2 + \mathbf{L}_{sp}^2) + p^T(\mathbf{L}_{ps}^2 + \mathbf{L}_{pp}^2)) + \dots$$

$$\mathbf{G} = \dot{s}^T(\mathbf{G}_s^1 + \mathbf{G}_{sp}^2) + \dot{p}^T(\mathbf{G}_p^1 + \mathbf{G}_{pp}^2) + \dots$$

$$J = J^0 + J_s^1 \dot{s} + J_p^1 \dot{p} + s^T(\mathbf{J}_{ss}^2 + \mathbf{J}_{sp}^2) + p^T(\mathbf{J}_{ps}^2 + \mathbf{J}_{pp}^2) + \dots \quad (3.3)$$

$$A = \begin{vmatrix} A_{ss} & A_{sp} \\ A_{ps} & A_{pp} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} C_{ss} & C_{sp} \\ C_{ps} & C_{pp} \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} H_{ss} & H_{sp} \\ H_{ps} & H_{pp} \end{vmatrix}$$

$$J_s^1 = J_{0s}^1 + J_{s0}^1, \quad J_p^1 = J_{0p}^1 + J_{p0}^1$$

С учетом всех матричных обозначений общая система уравнений движения деформируемого тела (2.10) примет довольно компактную форму записи

$$mj + \dot{\omega}^* L + \omega^* (\omega^* L) + 2\omega^* \dot{L} + \ddot{L} = P$$

$$J\dot{\omega} + \dot{J}\omega + L^* j + \omega^* (J\omega) + \dot{G} + \omega^* G = M$$

$$A_{ss}\ddot{s} + A_{sp}\ddot{p} + H_{ss}\dot{s} + H_{sp}\dot{p} + C_{ss}s + C_{sp}p + j^T (L_s^1 + L_{ss}^2 s + L_{sp}^2 p) + \quad (3.4)$$

$$+ \dot{\omega}^T (G_s^1 + G_{ss}^2 s + G_{sp}^2 p) - \omega^T (J_{s0}^1 + J_{ss}^2 s + J_{sp}^2 p)\omega + 2\omega^T G_{sp}^2 \dot{p} = Q_s$$

$$A_{pp}\ddot{p} + A_{ps}\ddot{s} + H_{pp}\dot{p} + H_{ps}\dot{s} + C_{pp}p + C_{ps}s + j^T (L_p^1 + L_{ps}^2 s + L_{pp}^2 p) +$$

$$+ \dot{\omega}^T (G_p^1 + G_{ps}^2 s + G_{pp}^2 p) - \omega^T (J_{p0}^1 + J_{ps}^2 s + J_{pp}^2 p)\omega + 2\omega^T G_{ps}^2 \dot{s} = Q_p$$

Введем следующие обозначения для компонентов векторных и тензорных величин  $L_s^1$ ,  $G_p^1$ ,  $J_{pp}^2$ , ... на оси связанной системы координат:

$$L = (L_1, L_2, L_3)^T, \quad L^0 = (L_1^0, L_2^0, L_3^0)^T, \quad L_s^1 = (l_1, l_2, l_3)^T, \quad L_p^1 = (l_{1p}, l_{2p}, l_{3p})^T$$

$$G_s^1 = (g_1, g_2, g_3)^T, \quad G_p^1 = (g_{1p}, g_{2p}, g_{3p})^T, \quad G_{sp}^2 = (g_{01}, g_{02}, g_{03})^T, \quad J = (J_{ij}) \quad (3.5)$$

$$J^0 = (J_{ij}^0), \quad J_s^1 = (d_{ij}), \quad J_p^1 = (d_{ijp}), \quad J_{ss}^2 = (d_{ijss}), \quad J_{sp}^2 = (d_{ijsp}), \quad J_{pp}^2 = (d_{ijpp})$$

$$J_{0s}^1 = (d_{ij0s}), \quad J_{s0}^1 = (d_{ijs0}), \quad J_{0p}^1 = (d_{ij0p}), \quad J_{p0}^1 = (d_{ijp0})$$

Недиагональные моменты инерции  $I_{ij}^0 = -J_{ij}^0$  ( $i \neq j$ ), взятые со знаком минус, называются центробежными моментами инерции твердого тела. В случае движения по инерции на пассивных участках траектории, когда реактивные силы ускорителей равны нулю, а управляющие моменты и обобщенные силы в правых частях уравнений (3.4) малы, вектор  $j$  представляет собой малую величину порядка обобщенных координат  $s_n$  и  $p_n$ . В этом случае в двух первых векторных уравнениях (3.4) составляющие упругих деформаций высшего порядка малости обычно незначительно влияют на величину переменного тензора инерции, которыми можно пренебречь.

Следует отметить, что нелинейный анализ устойчивости вращения КА с упругими штангами, проведенный в [3], показал, что граница области устойчивости существенным образом зависит от парциальных частот, имеющих значения, сравнимые с угловой скоростью закрутки КА или более низкие. Что же касается учета нелинейных членов упругого изгиба, то их влияние значительно меньше по сравнению с диссипативными силами, которые не учитывались в рассмотренном численном примере работы [2]. Упругие деформации можно учитывать, оставляя в математической модели координаты в первой степени. В последних уравнениях (2.10) это соответствует учету второго порядка малости.

Если учесть вышеизложенные допущения, то в бесконечных разложениях (3.3) можно ограничиться линейными членами. Будем использовать ниже следующие

обозначения:

$$\begin{aligned}
 L_i &= L_i^0 + l_i^T s + l_{ip}^T p, \quad \dot{L}_i = l_i^T \dot{s} + l_{ip}^T \dot{p}, \quad G_i = g_i + g_{0i} p, \quad G_{ip} = g_{ip} - g_{0i} s \\
 G_\omega &= g_{01} \omega_1 + g_{02} \omega_2 + g_{03} \omega_3, \quad J_{ij} = J_{ij}^0 + d_{ij}^T s + d_{ijp}^T p \\
 D_{j\omega} &= d_{1j0s} \omega_1 + d_{2j0s} \omega_2 + d_{3j0s} \omega_3, \quad D_{jp\omega} = d_{1j0p} \omega_1 + d_{2j0p} \omega_2 + d_{3j0p} \omega_3 \\
 d_{ij} &= d_{ijs0} + d_{ij0s}, \quad d_{ijp} = d_{ijp0} + d_{ij0p} \\
 D_{ij} &= d_{ijs0} + d_{jis0} + (d_{ijss} + d_{jiss})s + (d_{ijsp} + d_{jisp})p \\
 D_{ijp} &= d_{ijp0} + d_{jip0} + (d_{ijps} + d_{jips})s + (d_{ijpp} + d_{jipp})p
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Проекция векторного уравнения сил (3.4) на ось  $ox_1$  связанной системы координат примет вид

$$\begin{aligned}
 mj_1 + L_3 \dot{\omega}_2 - L_2 \dot{\omega}_3 + l_1^T \ddot{s} + l_{1p}^T \ddot{p} &= -L_3 \omega_1 \omega_3 - L_2 \omega_1 \omega_2 + L_1 (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \\
 + 2(\dot{L}_2 \omega_3 - \dot{L}_3 \omega_2) + P_1
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Остальные две проекции на оси  $ox_2, ox_3$  получаются из уравнения (3.7) путем круговой замены индексов (1–2–3). Проекция векторного уравнения моментов (3.4) на ось  $ox_1$  равна

$$\begin{aligned}
 J_{11} \dot{\omega}_1 + J_{12} \dot{\omega}_2 + J_{13} \dot{\omega}_3 + L_2 j_3 - L_3 j_2 + G_1^T \ddot{s} + G_{1p}^T \ddot{p} &= (J_{22} - J_{33}) \omega_2 \omega_3 + \\
 + (J_{12} \omega_3 - J_{13} \omega_2) \omega_1 + J_{23} (\omega_3^2 - \omega_2^2) - 2D_{1\omega}^T \dot{s} - 2D_{1p\omega}^T p + M_1
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогично, остальные два уравнения могут быть записаны автоматически путем круговой перестановки индексов (1–2–3).

Если система координатных функций, используемых в разложении (2.5), ортогональна, то перекрестные матрицы  $A_{sp}, A_{ps}, H_{sp}, H_{ps}, C_{sp}, C_{ps}$  равны нулю и матрицы  $A, H, C$  принимают диагональный вид. Уравнения для обобщенных координат системы (3.4) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_s \ddot{s} + H_s \dot{s} + C_s s + l_1 j_1 + l_2 j_2 + l_3 j_3 + G_1 \dot{\omega}_1 + G_2 \dot{\omega}_2 + G_3 \dot{\omega}_3 &= \\
 = -2G_\omega^T \dot{p} + \frac{1}{2} (D_{11} \omega_1^2 + D_{22} \omega_2^2 + D_{33} \omega_3^2) + \\
 + D_{12} \omega_1 \omega_2 + D_{13} \omega_1 \omega_3 + D_{23} \omega_2 \omega_3 + Q_s \\
 A_p \ddot{p} + H_p \dot{p} + C_p p + l_{1p} j_1 + l_{2p} j_2 + l_{3p} j_3 + G_{1p} \dot{\omega}_1 + G_{2p} \dot{\omega}_2 + G_{3p} \dot{\omega}_3 &= \\
 = 2G_\omega^T \dot{s} + \frac{1}{2} (D_{11p} \omega_1^2 + D_{22p} \omega_2^2 + D_{33p} \omega_3^2) + \\
 + D_{12p} \omega_1 \omega_2 + D_{13p} \omega_1 \omega_3 + D_{23p} \omega_2 \omega_3 + Q_p
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Система уравнений (3.7)–(3.9), представляющая собой нелинейную математическую модель пространственного движения деформируемого КА, должна быть дополнена строгими кинематическими уравнениями, связывающими какие-либо параметры его ориентации в инерциальном пространстве (углы Эйлера, кватернионы и т.д.) с проекциями угловых скоростей  $\omega_i$ . Например, для углов Кардана – Брайнта  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), если ввести обозначение  $\sin \theta_i = si, \cos \theta_i = ci$ , матрица направляющих косинусов будет

иметь вид

$$B = \begin{vmatrix} c2c3 & c1s3 + s1s2c3 & s1s3 - c1s2c3 \\ -c2s3 & c1c3 - s1s2s3 & s1c + c1s2s3 \\ s2 & -s1c2 & c1c2 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

а проекции вектора скорости на оси связанной системы координат будут определяться кинематическими соотношениями

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 c2c3 + \dot{\theta}_2 s3, \quad \omega_2 = -\dot{\theta}_1 c2s3 + \dot{\theta}_2 c3, \quad \omega_3 = \dot{\theta}_1 s2 + \dot{\theta}_3 \quad (3.11)$$

Недостатком углов Брайнта является наличие особенностей в кинематических дифференциальных уравнениях при  $\theta_2 = \pi/2$  и  $3\pi/2$ . Таким же недостатком обладают и углы Эйлера, и самолетные углы, и любые три угла. Поэтому для описания больших разворотов КА предпочтительно использовать кватернионы или направляющие косинусы.

**4. Определение параметров математической модели КА с произвольно расположенным упругим стержнем.** На спутниках типа *Эксплорер*, *Космос*, *Интербол* при орбитальном движении раскрываются длинные гибкие штыревые антенны, расположенные по продольным и поперечным осям или под острым углом к корпусу.

Будем рассматривать общий случай компоновки. Пусть прямолинейный стержень закреплен с корпусом КА в точке  $M_0(x_0, r_0 \cos \gamma, r_0 \sin \gamma)$  и составляет угол  $\psi$  с поперечной осью в меридиональном сечении. Меридиан находится под углом  $\gamma$  по отношению к плоскости  $Ox_1x_2$ . Нерастяжимый стержень постоянного сечения консольно закреплен.

Будем учитывать два низших тона изгибных колебаний упругого стержня: первый радиальный  $s(t)$  и первый тангенциальный  $p(t)$ . Введем координату  $y$  вдоль нейтральной линии стержня и выразим формы бинормальных  $\varphi_s$ , и тангенциальных  $\varphi_p$  упругих колебаний через формы консольно закрепленного стержня  $\eta(y)$ . Будем пренебрегать осадкой нейтральной оси стержня при изгибе и поворотом поперечных сечений. В качестве полной системы координатных функций воспользуемся функциями Крылова.

Введем обозначения для присоединенных масс и жесткостей изгибных колебаний стержня

$$A = \rho^\circ F^\circ l \int_0^1 \eta^2 dy, \quad C = \frac{E^\circ I^\circ}{I^3} \int_0^1 (\eta'')^2 dy, \quad L = \rho^\circ F^\circ l \int_0^1 \eta dy, \quad D = \rho^\circ F^\circ l^2 \int_0^1 y \eta dy \quad (4.1)$$

а также следующие сокращения:

$$\begin{aligned} sp &= \sin \psi, & cp &= \cos \psi, & sg &= \sin \gamma, & cg &= \cos \gamma \\ cc &= \cos \psi \cos \gamma, & cs &= \cos \psi \sin \gamma, & sc &= \sin \psi \cos \gamma, & ss &= \sin \psi \sin \gamma \\ d_0 &= x_0 L + D sp, & d_r &= r_0 L + D cp, & g_0 &= d_r cp + d_0 sp \end{aligned} \quad (4.2)$$

Коэффициенты системы уравнений (3.7)–(3.9) будут выражаться через параметры (4.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} l_1 &= Lcp, & l_2 &= -Lsc, & l_3 &= -Lss, & l_{2p} &= -Lsg, & l_{3p} &= Lcg, & g_2 &= g_0 sg \\ g_{1p} &= d_r, & g_{2p} &= -d_0 cg, & g_{3p} &= -d_0 sg, & g_{01} &= Asp, & g_{02} &= Acc, & g_{03} &= Acs \\ d_{110s} &= -d_r sp, & d_{120s} &= d_0 sc, & d_{130s} &= d_0 ss, & d_{210s} &= -d_r cc, & d_{310s} &= -d_r cs \\ d_{220s} &= d_0 cp - d_r sp (sg)^2, & d_{330s} &= d_0 cp - d_r sp (cg)^2, & g_3 &= -g_0 cg \\ d_{230s} &= d_{320s} = d_r sp \cdot sg \cdot cg, & d_{120p} &= d_0 sg, & d_{130p} &= -d_0 cg \end{aligned} \quad (4.3)$$



$$\begin{aligned}
d_{220p} &= d_{330p} = -d_r \text{cg} \cdot \text{sg}, & d_{230p} &= -d_r (\text{cg})^2, & d_{320p} &= -d_r (\text{sg})^2 \\
d_{11ss} &= A(\text{sp})^2, & d_{12ss} &= A \text{cp} \cdot \text{sc}, & d_{13ss} &= A \text{cp} \cdot \text{ss}, & d_{23ss} &= -A \text{sc} \cdot \text{ss} \\
d_{22ss} &= A((\text{cp})^2 + (\text{ss})^2), & d_{33ss} &= A((\text{cp})^2 + (\text{sc})^2), & d_{11pp} &= A, & d_{22pp} &= A(\text{cg})^2 \\
d_{33pp} &= A(\text{sg})^2, & d_{23pp} &= -A \text{sg} \cdot \text{cg}, & d_{21ps} &= A \text{cs}, & d_{22ps} &= -d_{33ps} = -A \text{ss} \cdot \text{cg} \\
d_{31ps} &= -A \text{cs}, & d_{32ps} &= A \text{sc} \cdot \text{cg}, & d_{23ps} &= -A \text{ss} \cdot \text{sg}
\end{aligned}$$

Следует иметь в виду тождества при замене индексов  $d_{ijs0} = d_{ji0s}$ ,  $d_{ijp0} = d_{ji0p}$ ,  $d_{ijss} = d_{jiss}$ ,  $d_{ijsp} = d_{jips}$ ,  $d_{ijpp} = d_{jipp}$ , а не приведенные в (4.3) коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим случай, когда стержень расположен на продольной оси КА. Расположим связанную систему координат по главным центральным осям КА в недеформированном состоянии. В этом случае имеем

$$r_0 = 0, \quad \psi = \pi/2, \quad d_0 = x_0 L + D = D^\circ, \quad d_r = 0, \quad g_0 = D^\circ \quad (4.4)$$

и система уравнений движения (3.7)–(3.9) упрощается

$$\begin{aligned}
mj_1 + L(p\dot{\omega}_2 + s\dot{\omega}_3) &= -2L(\dot{p}\omega_2 + \dot{s}\omega_3) - L \cdot w_{ps}\omega_1 + P_1 \\
mj_2 - L(p\dot{\omega}_1 + \dot{s}) &= L(2\dot{p}\omega_1 - s\omega_1^2 - w_{sp}\omega_3) + P_2 \\
mj_3 - L(s\dot{\omega}_1 - \dot{p}) &= L(2\dot{s}\omega_1 + p\omega_1^2 + w_{sp}\omega_2) + P_3 \\
J_{11}\dot{\omega}_1 + D^\circ(s\dot{\omega}_2 - p\dot{\omega}_3) - L(sj_3 + pj_2) + A(p\ddot{s} - s\ddot{p}) &= (J_{22} - J_{33})\omega_2\omega_3 + D^\circ w_{sp}\omega_1 + M_1 \\
J_{22}\dot{\omega}_2 + D^\circ s\dot{\omega}_1 + Lpj_1 - D^\circ \dot{p} &= (J_{33} - J_{11})\omega_1\omega_3 + D^\circ(-2s\omega_1 - p\omega_1^2 + w_{ps}\omega_3) + M_2 \\
J_{33}\dot{\omega}_3 - D^\circ p\dot{\omega}_1 + Lsj_1 - D^\circ \dot{s} &= (J_{11} - J_{22})\omega_1\omega_2 + D^\circ(2\dot{p}\omega_1 - s\omega_1^2 - w_{ps}\omega_2) + M_3 \\
A\ddot{s} - Lj_2 + Ap\dot{\omega}_1 - D^\circ \dot{\omega}_3 &= -H\dot{s} - Cs + D^\circ \omega_1\omega_2 + A(w_{sp}\omega_3 - 2\dot{p}\omega_1 + s\omega_1^2) + Q_s \\
A\ddot{p} + Lj_3 - As\dot{\omega}_1 - D^\circ \dot{\omega}_2 &= -H\dot{p} - Cp - D^\circ \omega_1\omega_3 + A(w_{sp}\omega_2 + 2\dot{s}\omega_1 + p\omega_1^2) + Q_p \\
w_{ps} &= p\omega_3 - s\omega_2, \quad w_{sp} = s\omega_3 + p\omega_2
\end{aligned} \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.5) совместно с кинематическими уравнениями (3.10)–(3.11) описывает нелинейное движение КА с упругим стержнем в предположении, что на поступательные и угловые перемещения и скорости никаких ограничений не накладывается, а упругие деформации стержня представлены линейно-квадратичными разложениями.

**5. Линеаризация нелинейных уравнений движения в случае одноосной ориентации КА.** Ограничимся случаем, когда возмущениями, связанными с наличием гравитационного и магнитного полей, а также солнечного давления, можно пренебречь. В этом случае правые части в уравнениях (4.5) можно положить равными нулю. При одноосной ориентации проекция угловой скорости  $\omega_1$  на продольную ось КА является конечной величиной, в то время как ее проекции на поперечные оси  $\omega_2$  и  $\omega_3$  можно считать малыми. Пренебрежем квадратами и произведениями малых величин  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$ ,  $s$ ,  $p$ . Тогда из первого уравнения системы (4.5) следует, что  $j_1 = 0$ . Из четвертого – что угловая скорость относительно продольной оси постоянна и равна скорости закрутки  $\omega_1 = \omega_0$ . Поперечные ускорения можно выразить из второго и третьего уравнений и подставить в два последних уравнения. Считая углы  $\theta_1$  и  $\theta_3$  малыми, из (3.11) найдем

$$\theta_1 = \omega_0 t, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2 - \omega_0 \theta_3, \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 + \omega_0 \theta_2 \quad (5.1)$$

Подставляя эти кинематические соотношения в (4.5), получим линейризованную систему, которая в матричном виде имеет вид

$$M_0 \ddot{Z} + G_0 \dot{Z} + F_0 Z + K_0 Z = 0 \quad (5.2)$$

Здесь  $M_0$ ,  $G_0$ ,  $K_0$ ,  $F_0$ , соответственно, матрицы инерционных, гироскопических, потенциальных и диссипативных сил;  $Z$  — матрица-столбец, составленный из приращений всех обобщенных координат:

$$M_0 = \begin{vmatrix} J_{22} & 0 & 0 & -D^\circ \\ 0 & J_{33} & -D^\circ & 0 \\ 0 & -D^\circ & \left(A - \frac{L^2}{m}\right) & 0 \\ -D^\circ & 0 & 0 & \left(A - \frac{L^2}{m}\right) \end{vmatrix}, \quad F_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ s \\ p \end{vmatrix}$$

$$G_0 = \begin{vmatrix} 0 & (J_{11} - J_{22} - J_{33})\omega_0 & 2D^\circ\omega_0 & 0 \\ -(J_{11} - J_{22} - J_{33})\omega_0 & 0 & 0 & -2D^\circ\omega_0 \\ -2D^\circ\omega_0 & 0 & 0 & 2\left(A - \frac{L^2}{m}\right)\omega_0 \\ 0 & 2D^\circ\omega_0 & -2\left(A - \frac{L^2}{m}\right)\omega_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$K_0 = \begin{vmatrix} (J_{11} - J_{33})\omega_0^2 & 0 & 0 & D^\circ\omega_0^2 \\ 0 & (J_{11} - J_{22})\omega_0^2 & D^\circ\omega_0^2 & 0 \\ 0 & D^\circ\omega_0^2 & C - \left(A - \frac{L^2}{m}\right)\omega_0^2 & 0 \\ D^\circ\omega_0^2 & 0 & 0 & C - \left(A - \frac{L^2}{m}\right)\omega_0^2 \end{vmatrix}$$

Перейдем к случаю, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения  $J_{22} = J_{33} = J$ . Парциальная частота первого тона  $\omega_c$  и соответствующий декремент  $\delta_1$  упругих колебаний стержня определяются через жесткость и диссипативную функцию следующим образом:

$$\omega_c^2 = \frac{C}{A}, \quad \varepsilon_c = \frac{\delta_1 \omega_c}{\pi} = \frac{H}{A} \quad (5.3)$$

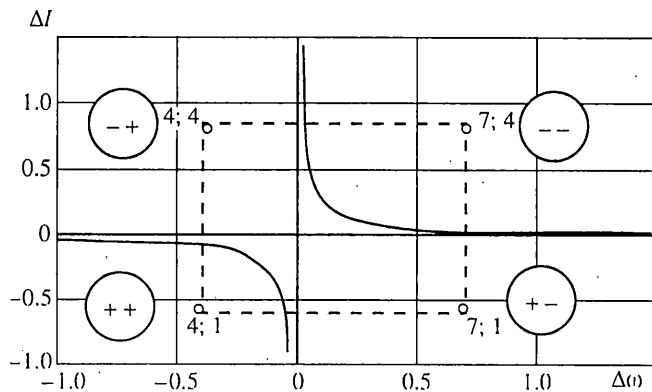
Введем далее комплексные безразмерные функции

$$\theta = \theta_2 + i\theta_3, \quad \zeta = \frac{A}{D^\circ}(-p - is) \quad (5.4)$$

зависящие от безразмерного времени  $\tau = \omega_0 t$ , и безразмерные параметры

$$\Delta I = \frac{J_{11} - J}{J}, \quad \sigma = \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_c^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \sigma^2 - 1 \quad (5.5)$$

$$a_1 = 1 - \frac{L^2}{Am}, \quad B_1 = \frac{(D^\circ)^2}{AJ}, \quad \gamma = \frac{\delta\sigma}{\pi}$$



Фиг. 1

В результате получим два дифференциальных уравнения для безразмерных переменных  $\theta, \zeta$

$$\ddot{\theta} - i(\Delta I - 1)\dot{\theta} + \Delta I\theta + B_1(\ddot{\zeta} + 2i\dot{\zeta} - \zeta) = 0 \quad (5.6)$$

$$a_1\ddot{\zeta} - (2ia_1 + \gamma)\dot{\zeta} + (\Delta\omega + 1 - a_1)\zeta + \ddot{\theta} + 2i\dot{\theta} - \theta = 0$$

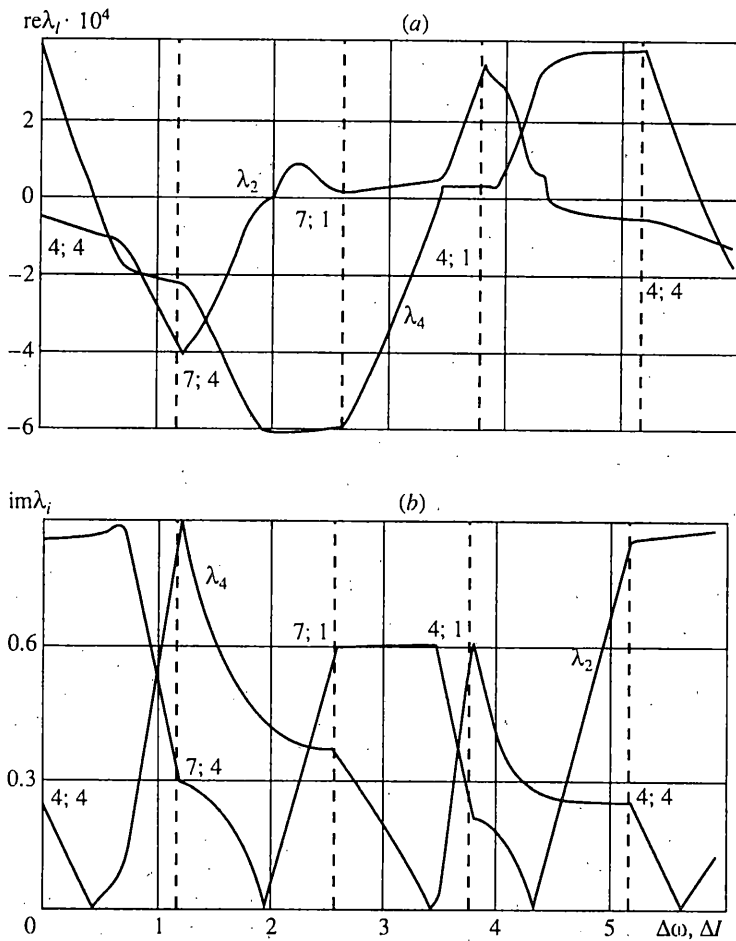
Если система уравнений (5.2) определенная (т.е. характеристическое уравнение не имеет нулевых корней), то об устойчивости этой системы можно судить по положительной определенности матрицы  $K_0$ . Однако, уравнения (5.6) описывают движение свободной механической системы.

**6. Анализ областей устойчивости.** В работе [6] автором было доказано утверждение, что для свободных механических систем с распространяющимся демпфированием и гамильтонианом, не зависящим явно от времени (к каковым относятся вышеперечисленные КА), необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости стационарного вращения деформируемой системы при  $\Delta I > 0$  является положительность матрицы свободных членов  $K_0$ . Граница устойчивости определяется условием  $\det \|K_0\| = 0$ .

В целях наглядности излагаемого вопроса рассмотрим КА типа аврорального зонда в проекте *Интербол*, имеющего упругую антенну на продольной оси. Номинальные значения угловой скорости закрутки КА, частоты поперечных колебаний упругой антенны, коэффициентов поперечной связи упругих колебаний антенны и твердого корпуса, присоединенных масс и коэффициентов демпфирования приняты близкими к конструкции КА, приведенной в [5].

На фиг. 1 построены области устойчивости. Если все действительные части корней характеристического уравнения линеаризованной системы (5.6) отрицательны, то система устойчива, если какие-то корни приобретают положительную действительную часть, то система становится неустойчивой. Однако, неустойчивость может определяться как корнями, соответствующими парциальным частотам упругих колебаний, так и корнями, обусловленными тензором инерции корпуса КА.

На фиг. 1 представленные кривые разделяют плоскость конструктивных параметров на три зоны. В правом верхнем углу выше кривой двумя минусами показана зона устойчивого вращения КА. В левом нижнем углу ниже второй кривой двумя плюсами показана зона неустойчивого вращения. В промежуточных зонах, показанных плюсом и минусом, неустойчивость вращения КА определяется либо неустойчивостью упругой частоты (слева вверху), либо неустойчивостью твердого тела (справа внизу). При переходе через построенные кривые один из корней принимает нулевое значение и сменяет знак действительной части.



Фиг. 2

Анализ неустойчивости вращения спутников с упругими антеннами показал, что снижение величины жесткости таких антенн, увеличение их длины и скорости закрутки КА сужает область его устойчивости. Если антенны расположены перпендикулярно к оси вращения аппарата, то скорость его закрутки при некотором превышении продольного момента инерции над поперечным может быть неограниченной. В случае размещения антенн вдоль оси закрутки КА, максимальная скорость быстрого вращения аппарата для обеспечения его устойчивости всегда ограничивается.

**7. Расчет корней характеристического уравнения.** Каждому значению парциальной частоты и каждому значению тензора инерции на плоскости безразмерных параметров (фиг. 1) соответствует точка, которая при изменении частоты и тензора инерции движется по какой-то траектории. Варьировались значения парциальной частоты упругой штанги от величины, превышающей угловую скорость закрутки на 40%, до величины на 20% ниже этой скорости. Изменялись также значения продольного и поперечного моментов инерции от 50 до 200%. На фиг. 1 показана пунктиром траектория в виде прямоугольника горизонтально вправо от точки (4;4) до точки (7;4), вертикально вниз до точки (7;1), горизонтально влево до точки (4;1) и вертикально вверх в исходную точку (4;4). Горизонтальные линии соответствуют варьированию

парциальной частоты упругих колебаний штанги, вертикальные линии – изменению тензора инерции КА.

Полное характеристическое уравнение системы (5,6) решалось QR-методом. Первый корень имеет строгое значение  $\lambda_1 = i\omega_0$ . Третий корень при варьировании вышеуказанных параметров практически не изменяется. Поведение второго и четвертого корней характеристического уравнения показаны на фиг. 2. На фиг. 2, а представлены действительные части этих корней. При перемещении по горизонтальной верхней траектории (фиг. 1) второй корень имеет отрицательную действительную часть, а действительная часть четвертого корня изменяет свои значения с положительных величин на отрицательные, обращаясь в нуль при переходе через границу области устойчивости. Аналогично, но в обратном порядке они ведут себя на нижней горизонтальной траектории. На вертикальных участках траектории действительная часть второго корня меняет знак, а у четвертого – знак сохраняется. Эти знаки показаны на области устойчивости фиг. 1. На фиг. 2, в показаны соответствующие значения мнимых частей этих корней. Поскольку характеристическое уравнение имеет действительные коэффициенты, то корни являются комплексно-сопряженными и мнимые части принимают симметричные значения относительно нуля. На фиг. 2, в показаны только положительные величины.

При вращении ИСЗ относительно оси, соответствующей максимальному моменту инерции ( $\Delta I > 0$ ), и парциальной частоте упругих колебаний, превышающей угловую скорость закрутки ( $\Delta\omega > 0$ ), когда корни  $\lambda_2$  и  $\lambda_4$  имеют отрицательные действительные части (правая верхняя область на фиг. 1), вращение ИСЗ носит характер регулярной прецессии с затуханием начальных отклонений. При переходе через границу области устойчивости в левую верхнюю область ( $\Delta\omega < 0$ ), где действительная часть корня  $\lambda_4$  положительна, характер прецессии меняется. Если рассмотреть режим, соответствующий исходной точке (4;4) фиг. 1, то получим совершенно другую картину. Упругий стержень начинает все больше отклоняться, возмущения угловой скорости увеличиваются, и продольная ось начинает уходить от направления на Солнце. Подобная же картина происходит в случаях  $\Delta I < 0$ ,  $\Delta\omega < 0$  и  $\Delta I < 0$ ,  $\Delta\omega > 0$ , что соответствует нижней половине области неустойчивости, представленной на фиг. 1. В перечисленных примерах неустойчивость вращения всех КА объясняется попаданием их конструктивных параметров в неустойчивую зону.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Изв. РАН. МТГ. 1996. № 1. С. 161–175.
3. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М: Машиностроение, 1987. 232 с.
4. Докучаев Л.В. Построение областей устойчивого вращения космического аппарата с упругими штангами // Космические исследования. 1969. Т. 7. № 4. С. 534–546.
5. Кремнев Р.С., Смирнов А.И., Горкин С.С. Краткое описание космического аппарата Прогноз-М2 в проекте "Интербол" // Космические исследования. 1996. Т. 34. № 4. С. 363–370.
6. Kane T.R., Levinson D.A. Formulation of equations of motion for complex spacecraft // J. Guidance and Contr. 1980. V. 3. № 2. P. 99–112.
7. Докучаев Л.В. Об устойчивости вращения деформируемого летательного аппарата // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 25–33.
8. Эйсмонт Н.А., Хравченко В.В., Александров А.Н., Триска П., Труглик В., Шмилауер Я., Хум Я., Клас Я. Особенности задач динамики полета и управления движением космического аппарата проекта Интербол // Космические исследования. 1998. Т. 36. № 3. С. 323–331.