

УДК 531.38

© 2000 г. А.М. КРИВЦОВ

### ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПРИ ПОМОЩИ КВАЗИКООРДИНАТ

Рассматривается свободное вращательное движение твердого тела под действием линейного вязкого момента. Приводится простейшая механическая система, позволяющая смоделировать указанный закон взаимодействия. Показывается, что в математической постановке задача сводится к нахождению единичного вектора, для которого модуль первой и второй производной являются известными функциями времени. Исследуется траектория вершины орта оси симметрии тела на единичной сфере. Строится аналитическое решение задачи с использованием квазикоординат.

**Введение.** Рассматривается свободное движение осесимметричного твердого тела под действием линейного вязкого момента

$$\mathbf{M} = -\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} B_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) + B_3 \mathbf{nn} \quad (1.1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости,  $\mathbf{n}$  – орт оси симметрии тела,  $B_{12}, B_3$  – постоянные положительные коэффициенты,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор,  $\mathbf{nn}$  – диодное произведение ортов  $\mathbf{n}$ .

Уравнение движения подобной системы имеет вид

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega})^* = -\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) + \theta_3 \mathbf{nn} \quad (1.2)$$

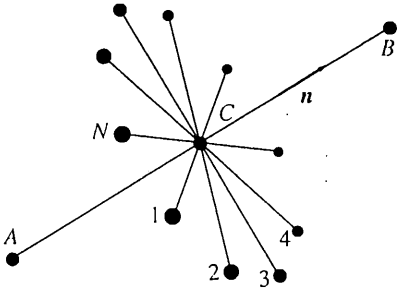
где  $\theta_{12}$  и  $\theta_3$ , соответственно, экваториальный и полярный моменты инерции твердого тела.

Задача (1.1) – (1.2) известна давно. Э. Дж. Раус рассматривал данную задачу в случае, когда тензор вязкости  $\mathbf{V}$  пропорционален тензору инерции твердого тела  $\mathbf{V} = \alpha \boldsymbol{\theta}$  [1]. В этом случае (1.2) дает линейное дифференциальное уравнение относительно кинетического момента  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , которое легко интегрируется

$$\dot{\mathbf{K}} = -\alpha \mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 e^{-\alpha t} \quad (1.3)$$

Таким образом, в этом частном случае кинетический момент остается постоянным по направлению, а движение твердого тела оказывается аналогичным движению в пустоте, но с экспоненциально убывающей угловой скоростью. Отметим, что это решение автоматически обобщается на случай произвольного тензора инерции.

Р. Граммель в [2] рассматривает шаровой тензор вязкости  $\mathbf{V} = \alpha \mathbf{E}$ . Этот случай значительно сложнее, и, с точки зрения решения, мало отличается от общего случая (1.1), рассмотренного в [3]. В этих работах определяются проекции угловой скорости на подвижные оси, связанные с вращающимся телом. Из более поздних работ, посвященных этой задаче, отметим работу [4], в которой также определяются проекции угловой скорости на подвижные оси, а также рассматривается более общая задача, когда тензор вязкости не обладает осевой симметрией.



Фиг. 1

Однако, во всех перечисленных выше работах не находится положение вектора угловой скорости в неподвижном пространстве, а также углы, определяющие положение тела. Последнее требует дальнейшего интегрирования уравнений движения. В [5] получено точное решение данной задачи в виде равномерно сходящегося ряда. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий получить простое решение задачи с использованием квазиординат. Подобное решение не является решением в классическом смысле, тем не менее оно позволяет наглядно описать движение тела в пространстве. При

этом для описания движения не требуется функций "сложнее" экспонент.

**2. Физическая интерпретация рассматриваемого момента сопротивления.** Прежде чем перейти к решению задачи, приведем в качестве примера простую физическую модель, для которой момент трения в точности соответствует формуле (1.1).

На фиг. 1 представлена жесткая конструкция, состоящая из стержней и укрепленных на них одинаковых шариков. Шарiki 1, 2, ..., N расположены в плоскости, перпендикулярной стержню AB, и распределены равномерно по окружности радиуса a с центром в точке C, совпадающей с центром стержня AB. Здесь  $N \geq 3$  и не слишком велико, так, чтобы расстояния между шариками можно было считать много больше их размеров. Ясно, что тензор инерции подобной системы трансверсально изотропен. Рассмотрим движение конструкции в линейно вязкой среде. Будем считать, что толщина стержней пренебрежимо мала по сравнению с размером шариков, тогда сопротивление определяется силой вязкого трения, действующей на шарiki  $\mathbf{f} = -\beta \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  – скорость шарика,  $\beta$  – коэффициент вязкости. Суммарный момент сопротивления относительно центра масс C равен

$$\mathbf{M} = -\beta \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k - \beta \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A - \beta \mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$  – радиус-векторы соответствующих шариков, проведенные из точки C. Скорость каждого шарика представим в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}_C + (r^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость конструкции,  $\mathbf{v}_C$  – скорость центра масс. Подставив это соотношение в (2.1), получим

$$\mathbf{M} = -\beta \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_C - \beta \left( \sum_{k=1}^N (a^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k) + 2(b^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_A \mathbf{r}_A) \right) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

Здесь использовано, что  $|\mathbf{r}_k| = a, |\mathbf{r}_A| = b, \mathbf{r}_B = -\mathbf{r}_A$ . Обозначим  $\mathbf{n}$  – орт оси AB:  $\mathbf{r}_A = -b\mathbf{n}$ . Рассмотрим соотношение (2.2). Сумма  $\sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k$  из соображений симметрии равна нулю. Тензор  $\sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k$  лежит в плоскости ортогональной  $\mathbf{n}$  и обладает симметрией вращения N-го порядка, следовательно он должен быть пропорционален трансверсально изотропному тензору  $\mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}$ . Вычислив след для этих тензоров, найдем коэффициент пропорциональности

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k = k(\mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \Rightarrow \sum_{k=1}^N (a^2) = k(3-1) \Rightarrow k = \frac{N}{2} a^2$$

Тогда формула (2.2) принимает вид

$$\mathbf{M} = -\beta \left( \frac{N}{2} a^2 (\mathbf{E} + \mathbf{n}\mathbf{n}) + 2b^2 (\mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \right) \cdot \boldsymbol{\omega}$$

откуда получаем

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{B} = B_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) + B_3 \mathbf{nn}$$

$$B_{12} = \beta \left( \frac{N}{2} a^2 + 2b^2 \right), \quad B_3 = \beta N a^2$$

Таким образом, момент сопротивления, действующий на рассмотренную конструкцию, в точности соответствует формуле (1.1).

**3. Первые интегралы.** Перейдем к решению уравнения (1.2):

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.1)$$

Для кинетического момента  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}$  воспользуемся представлением [6]  $\mathbf{K} = \theta_{12} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \theta_3 \Omega \mathbf{n}$ , где  $\Omega$  – угловая скорость собственного вращения, представляющая собой проекцию вектора угловой скорости на орт  $\mathbf{n}$ . Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\theta_{12} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} + \theta_3 (\Omega \mathbf{n} + \dot{\Omega} \mathbf{n}) = -B_{12} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} - B_3 \Omega \mathbf{n}$$

Умножим полученное соотношение скалярно на  $\mathbf{n}$ ,  $\dot{\mathbf{n}}$  и  $\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}$ , после несложных преобразований получим следующие три скалярных уравнения:

$$\theta_3 \dot{\Omega} = -B_3 \Omega$$

$$\theta_{12} \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}}) - \theta_3 \Omega \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$$

$$\theta_{12} \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{n}} = -B_{12} \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} \quad (3.2)$$

1-е и 3-е уравнения легко интегрируются, в результате чего находим  $\Omega$  и  $\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}$  как функции времени

$$\Omega = \Omega_0 e^{-B_3 t / \theta_3}, \quad \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} = v_0^2 e^{-2B_{12} t / \theta_{12}} \quad (3.3)$$

Здесь  $\Omega_0, v_0$  – константы интегрирования.

Для описания движения рассматриваемого тела достаточно определить как функции времени орт  $\mathbf{n}$ , задающий направление оси симметрии тела, и величину  $\Omega$ , описывающую вращение вокруг этой оси. Угловая скорость  $\Omega$  известна из (3.3). Орт  $\mathbf{n}$  является двухпараметрической величиной, поэтому, вообще говоря, он может быть восстановлен по двум скалярным уравнениям. В качестве первого уравнения для орта  $\mathbf{n}$  возьмем соотношение (3.3), а второе может быть получено из 2-го уравнения системы (3.2). Введем две экспоненциальные функции времени:

$$\Omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_0 e^{-B_3 t / \theta_3}, \quad v(t) \stackrel{\text{def}}{=} v_0 e^{-B_{12} t / \theta_{12}} \quad (3.4)$$

тогда для определения  $\Omega$  и орта  $\mathbf{n}$  получаем уравнения

$$\Omega = \Omega(t), \quad \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} = v^2(t), \quad \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}}) = \frac{\theta_3}{\theta_{12}} \Omega(t) v^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} f^3(t) \quad (3.5)$$

Константу  $v_0$  будем считать положительной, тогда величина  $v(t)$  имеет смысл модуля скорости вершины вектора  $\mathbf{n}$ . Таким образом, задача сводится к чисто математической постановке – восстановить единичный вектор  $\mathbf{n}$  по следующим двум скалярным соотношениям:

$$\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} = v^2(t), \quad \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}}) = f^3(t) \quad (3.6)$$

где  $v(t)$  и  $f(t)$  – известные функции времени, имеющие размерность частоты. Второе из уравнений (3.6) можно заменить эквивалентным. Для этого воспользуемся тожде-

СТВОМ [7]:

$$(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 - b^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})^2 - c^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$$

тогда

$$(\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}}))^2 = \dot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}} \ddot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}} - (\dot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}})^2 - \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} (\dot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}})^2 = v^2 (\ddot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}} - \dot{v}^2 - v^4)$$

откуда получаем

$$\ddot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}} = \frac{1}{v^2} (\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}}))^2 + \dot{v}^2 + v^4 = \frac{f^6}{v^2} + \dot{v}^2 + v^4 \stackrel{\text{def}}{=} F^4(t)$$

Следовательно, система (3.6) может быть записана в форме  $\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} = v^2(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{n}} \cdot \ddot{\mathbf{n}} = F^4(t)$ . Таким образом, задача сводится к нахождению единичного вектора, для которого модуль первой и второй производной являются известными функциями времени. Эта проблема оказывается значительно сложнее получения всех приведенных выше результатов. Специфика данной задачи заключается в ее инвариантности – отсутствуют какие-либо выделенные направления в пространстве. Однако, в этом и ее сложность – не ясно, от какого направления отталкиваться при описании поворотов. Введение любого выделенного направления сразу разрушает симметрию задачи.

Отметим, что интегралы, аналогичные (3.3), получены в работах [2, 3, 4]. В частности, в этих работах находится квадрат полной угловой скорости, который может быть выражен через (3.3) следующим образом

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \Omega \mathbf{n})^2 = \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} + \Omega^2 = v_0^2 e^{-2B_{12}t/\theta_{12}} + \Omega_0^2 e^{-2B_{31}t/\theta_{31}}$$

**4. Сферическая кривизна.** Таким образом, для решения задачи необходимо описать движение единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Его вершина описывает траекторию, лежащую на сфере единичного радиуса. На траектории введем безразмерную дуговую координату  $s$ , такую что  $|ds| = |d\mathbf{n}|$ . Введем угол  $\xi$  поворота траектории в плоскости, касательной к сфере. Пусть  $\boldsymbol{\tau}$  – орт касательной к траектории:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}'$  (здесь и далее штрихом обозначается производная по  $s$ ). Определим  $d\xi$  как угол между  $\boldsymbol{\tau}$  и  $(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot (\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\tau})$  – угол между  $\boldsymbol{\tau}$  и проекцией  $\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\tau}$  на касательную плоскость. Это определение можно записать формулой

$$nd\xi \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\tau} \times ((\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot (\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\tau})) \quad (4.1)$$

Домножив соотношение (4.1) скалярно на  $\mathbf{n}$  получим

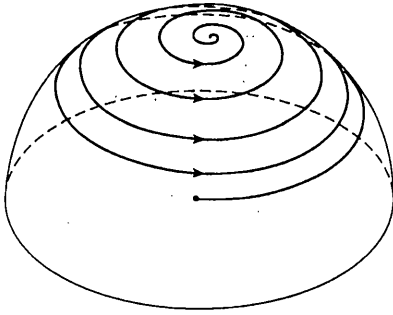
$$d\xi = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times d\boldsymbol{\tau}) \Rightarrow \xi' = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}') = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'') \quad (4.2)$$

Величина  $k \stackrel{\text{def}}{=} \xi' = d\xi/ds$  представляет собой геодезическую кривизну траектории на сфере. Для краткости далее будем называть ее сферической кривизной траектории. Согласно (4.2), она связана с ортом  $\mathbf{n}$  формулой

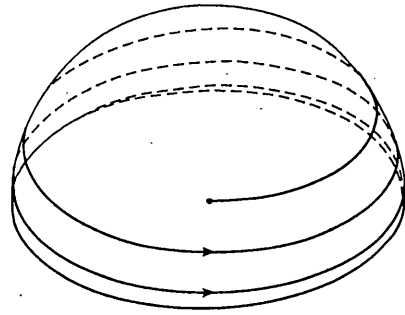
$$k \stackrel{\text{def}}{=} \xi' = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'') \quad (4.3)$$

Можно показать, что полная кривизна траектории  $K$  связана со сферической кривизной соотношением  $K^2 = 1 + k^2$ . Отсюда, в частности, следует, что когда сферическая кривизна обращается в ноль, то  $K = 1$ , а следовательно в этом случае траектория представляет собой большую окружность на сфере. Отметим также, что для  $K$  можно получить формулу, аналогичную (4.3)  $K^2 = \mathbf{n}'' \cdot \mathbf{n}''$ .

Из уравнений движения, согласно (3.6), нам известно смешанное произведение  $\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}})$ . Установим, как оно связано со сферической кривизной  $k$ . Имеем  $ds^2 = d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} \Rightarrow s'^2 = \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}} = v^2$ . Напомним, что  $v(t)$  – известная функция времени. Положим



Фиг. 2



Фиг. 3

$\dot{s} = v$ , тогда  $d/dt = vd/ds$ . Используя эту формулу, заменим производные в выражении  $\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}})$ :

$$\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{n}} \times \ddot{\mathbf{n}}) = \mathbf{n} \cdot (v\mathbf{n}' \times (v\mathbf{v}'\mathbf{n}' + v^2\mathbf{n}'')) = v^3 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'') = v^3 k \quad (4.4)$$

Теперь мы можем найти сферическую кривизну  $k$  как функцию времени. Из (4.4), используя (3.5), получаем

$$k = \frac{f^3(t)}{v^3(t)} = \frac{\theta_3}{\theta_{12}} \frac{\Omega(t)}{v(t)} = \frac{\theta_3 \Omega_0}{\theta_{12} v_0} \exp\left(\left(\frac{B_{12}}{\theta_{12}} - \frac{B_3}{\theta_3}\right)t\right) \quad (4.5)$$

Из полученной формулы для сферической кривизны можно сделать следующие выводы относительно характера движения.

1.  $B_{12}/\theta_{12} > B_3/\theta_3 \Rightarrow k \rightarrow \infty$  – кривизна монотонно возрастает, стремясь в пределе к бесконечности, следовательно траектория вершины вектора  $\mathbf{n}$  на единичной сфере представляет собой спираль с уменьшающимся радиусом витков, стремящуюся в пределе к точке – фиг. 2.

2.  $B_{12}/\theta_{12} < B_3/\theta_3 \Rightarrow k \rightarrow 0$  – траектория представляет собой раскручивающуюся спираль, стремящуюся в пределе к большей окружности на сфере – фиг. 3.

3.  $B_{12}/\theta_{12} = B_3/\theta_3 \Rightarrow k = \text{const}$  – траектория вырождается в окружность: это упоминавшийся ранее частный случай (1.3) пропорциональности тензора вязкости и тензора инерции.

**5. Квазикоординаты.** Согласно результатам предыдущего параграфа, нам известны производные

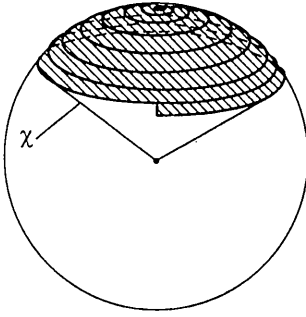
$$\dot{s} = v(t), \quad \dot{\xi} = v\xi' = vk = \frac{\theta_3}{\theta_{12}} \Omega(t)$$

Величины  $s$  и  $\xi$  определяют пройденный путь и угол поворота траектории на сфере. В некотором смысле они могут трактоваться как координаты вектора  $\mathbf{n}$ . Если к ним добавить формальную угловую величину  $\zeta$ , такую что  $\dot{\zeta} = \Omega$ , то в этих переменных мы получаем возможность проинтегрировать задачу. Действительно, согласно (3.4):

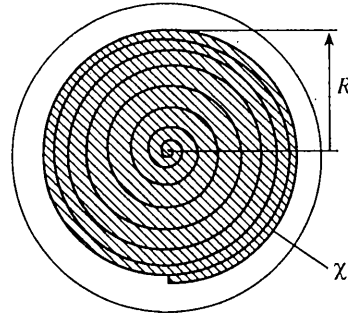
$$\dot{s} = v(t) = v_0 e^{-B_{12}t/\theta_{12}}, \quad \dot{\xi} = \frac{\theta_3}{\theta_{12}} \Omega(t) = \frac{\theta_3}{\theta_{12}} \Omega_0 e^{-B_3 t/\theta_3}, \quad \dot{\zeta} = \Omega(t) = \Omega_0 e^{-B_3 t/\theta_3}$$

Проинтегрировав эти соотношения с нулевыми начальными условиями получим

$$s = \frac{\theta_{12}}{B_{12}} v_0 (1 - e^{-B_{12}t/\theta_{12}}), \quad \xi = \frac{\theta_3^2 \Omega_0}{B_{12} \theta_{12}} (1 - e^{-B_3 t/\theta_3}), \quad \zeta = \frac{\theta_3}{B_3} \Omega_0 (1 - e^{-B_3 t/\theta_3}) \quad (5.1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Квазикоординаты  $s, \xi, \zeta$  не являются мгновенными характеристиками положения тела: значения их в фиксированный момент времени  $t$  не дают возможность однозначно определить положение тела в момент времени  $t$ , для этого необходимо знать всю историю изменения квазикоординат. Однако, они обладают тем важным преимуществом, что сохраняют симметрию задачи, потому и приводят к такому простому интегрированию.

Полученное решение (5.1) нельзя назвать решением задачи в традиционном смысле. Однако, оно позволяет ответить практически на все вопросы, которые могут возникать в данной задаче. Как уже упоминалось, траектория вершины орта  $\mathbf{n}$ , на единичной сфере представляет собой спираль. Тогда, например, значения  $s, \xi$  и  $\zeta$  при  $t \rightarrow \infty$  определяют, соответственно, длину этой спирали, суммарный угол закручивания спирали и число поворотов тела вокруг оси симметрии. Радиус  $R$  витка спирали может быть найден как

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k = \frac{d\xi}{ds} = \frac{\theta_3 \Omega_0}{\theta_{12} \nu_0} \exp\left(\left(\frac{B_{12}}{\theta_{12}} - \frac{B_3}{\theta_3}\right)t\right) \quad (5.2)$$

Осевой поворот  $\Delta\varphi$  тела в абсолютном пространстве за время прохождения ортом  $\mathbf{n}$  одного витка спирали может быть вычислен при помощи теоремы о телесном угле [8]:

$$\Delta\varphi = \chi + \Delta\zeta$$

Здесь  $\Delta\zeta$  – приращение угловой квазикоординаты  $\zeta$  за один виток,  $\chi$  – телесный угол, ограниченный спиралью – фиг. 4–5. Если витки спирали располагаются достаточно часто, то телесный угол  $\chi$  может быть приближенно выражен через радиус витка спирали (5.2)  $\chi \approx 2\pi(1 - \sqrt{1 - R^2})$ .

Таким образом, решение (5.1) дает практически полное, но вместе с тем простое и наглядное описание движения системы. Известно, что уравнения динамики для многих относительно простых систем невозможно решить аналитически в мгновенных координатах, а если это и удается, то это приводит к чрезвычайно громоздким формулам, не имеющим наглядной физической интерпретации. В таких случаях целесообразным может оказаться использование квазикоординат, как это сделано в данной задаче.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
2. Грэммель Р. Гироскоп, его теория и применение. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
3. Магнус К. Гироскоп: Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.

4. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
5. Иванова Е.А. Свободное вращение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тр. СПбГТУ. 1997. № 467. С. 61–69.
6. Журавлев В.Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.
7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд. АН СССР, 1961. 426 с.
8. Журавлев В.Ф. Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
6.04.1998