

УДК 533.6.013.42

© 2000 г. Ю.Д. КАПЛУНОВ, В.А. КОВАЛЕВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ РЕЗОНАНСОВ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН УПРУГИМИ ЦИЛИНДРАМИ И СФЕРАМИ

Исследуется рассеяние стационарных акустических волн упругими цилиндрами и сферами. Применяется коротковолновое описание движения тела, сводящееся к рассмотрению уравнений плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат. Получены приближенные формулы, описывающие резонансные компоненты парциальных мод волны Рэлея. При значительном различии между физическими параметрами упругого тела и акустической среды даются элементарные локальные аппроксимации для резонансных кривых. Производится сопоставление с точным решением задачи рассеяния для полого цилиндра.

Изучение резонансов парциальных мод является одним из основных элементов резонансной теории рассеяния [1]. При этом приближенное аналитическое описание динамического взаимодействия тела со средой имеет важное значение для выявления качественных закономерностей процесса рассеяния. В настоящее время получены асимптотические формулы для резонансов волн Лэмба и Стоунли применительно к рассеянию плоской акустической волны тонкими упругими оболочками [2, 3 и др.]. В их основе лежит малость относительной толщины оболочки. В случае массивных тел возможности асимптотического анализа в значительной мере ограничены коротковолновым приближением, т.е. резонансами больших номеров.

В публикуемой работе в коротковолновом приближении исследуются резонансы волны Рэлея в задачах рассеяния для упругих цилиндров и сфер, погруженных в акустическую среду. Используется приближенная модель, в рамках которой в уравнениях теории упругости сохраняются только старшие производные, а радиальная координата замораживается на поверхности контакта. Формулировка задач резонансной теории рассеяния на основе этой модели позволяет расширить известную аналогию между волной Рэлея на свободной поверхности упругой полуплоскости и ее обобщением для искривленного тела, контактирующего со средой. В результате удастся не только оценить резонансные частоты, но и аппроксимировать резонансные кривые. При этом уравнение Гельмгольца, описывающее движение среды, первоначально решается точно. Распространение развиваемого подхода на тела более сложной формы потребует разработки приближенных методов его интегрирования.

В статье выписываются явные формулы для резонансных компонент парциальных мод. При значительном различии между физическими параметрами тела и среды получены локальные представления, содержащие элементарные выражения для резонансных частот и амплитуд, а также коэффициентов затухания. Попутно обсуждаются критерии оценки добротности резонансов, лежащих в широком частотном диапазоне. Эффективность предлагаемых формул проверяется путем сравнения с эталонным решением для полого цилиндра.

1. Постановка задачи в рамках приближенного описания движения тела. Рассмотрим двумерные стационарные задачи рассеяния для круговых цилиндров и сфер,

погруженных в безграничную акустическую среду. Для безразмерных параметров, характеризующих процесс рассеяния, примем следующие обозначения:

$$\eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \eta_R = \frac{c_R}{c_2}, \quad \beta_i = \frac{c_i}{c} \quad (i=1,2), \quad \beta_R = \frac{c}{c_R}$$

$$\kappa = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad x = \frac{\omega a}{c} \quad (1.1)$$

где c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной волн в упругом теле, c_R — скорость волны Рэлея в упругой полуплоскости, c — скорость звука в акустической среде, ρ — плотность акустической среды, ρ_1 — плотность упругого тела, a — внешний радиус тела, ω — круговая частота.

При исследовании резонансов волны Рэлея больших номеров будем исходить из уравнений

$$\Delta_p \varphi + \beta_1^{-2} x^2 \varphi = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta_p \psi + \beta_2^{-2} x^2 \psi = 0 \quad (1.3)$$

$$\Delta_p = \partial^2 / \partial r^2 + \partial^2 / \partial \theta^2$$

Здесь φ и ψ — упругие потенциалы Ламе, r и θ — цилиндрические либо сферические координаты; считается, что радиус r отнесен ко внешнему радиусу тела a .

При переходе от уравнений теории упругости в криволинейной (цилиндрической или сферической) системе координат к уравнениям (1.2) и (1.3) сохранены только старшие производные, а радиус r заморожен на поверхности контакта. Такое упрощение опирается на предположения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \gg 1, \quad \frac{\partial}{\partial r} \gg 1, \quad \beta_i x \gg 1, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \sim \frac{\partial}{\partial r} \sim \beta_i x \quad (1.4)$$

при экспоненциальном затухании решения по радиусу r . Они заведомо выполняются для резонансов волны Рэлея больших номеров.

Соответствующие формулы для перемещений и напряжений имеют вид

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{rr} = \rho_1 c^2 \left[-x^2 \varphi - 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \rho_1 c^2 \left[x^2 \psi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \right] \quad (1.6)$$

Формулы (1.2)–(1.5) совпадают с соотношениями плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат (r, θ) . Они ориентированы на изучение коротковолновых колебаний, локализованных около цилиндрической или сферической поверхностей.

Условия контакта на границе раздела между телом и средой примем в форме ($r=1$):

$$\sigma_{rr} = -(p_i + p_s), \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1.7)$$

$$u_r = \frac{1}{\rho c^2 x^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \quad (1.8)$$

где p_i и p_s – соответственно давление в падающей и рассеянной волне. Каждое из них удовлетворяет уравнению Гельмгольца ($p = p_i$ или $p = p_s$):

$$\Delta p + x^2 p = 0 \quad (1.9)$$

В цилиндрической системе

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.10)$$

а в сферической

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (1.11)$$

Кроме того, давление p_s должно удовлетворять условию излучения на бесконечности.

2. Рассеяние плоской акустической волны круговым цилиндром. Представим давление в падающей волне в виде ряда [1]:

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n J_n(xr) \cos n\theta \quad (2.1)$$

где $E_0 = 1$, $E_n = 2$ ($n \geq 1$); p_0 – постоянная, имеющая размерность давления; J_n – функция Бесселя.

Рассеянное давление будем разыскивать в форме

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n B_n H_n^{(1)}(xr) \cos n\theta \quad (2.2)$$

где B_n – искомые коэффициенты, $H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода; считается, что колебания развиваются во времени по закону $\exp(-i\omega t)$.

В качестве амплитудно-частотной характеристики возьмем резонансный компонент парциальных мод при рассеянии назад ($\theta = 0$). Для фонового компонента, соответствующего давлению, рассеянному акустически жестким цилиндром, он выражается формулой [1]:

$$\zeta_n = \frac{4}{\sqrt{\pi x}} \left| B_n + \frac{J_n'(x)}{H_n^{(1)'}(x)} \right| \quad (2.3)$$

Представим теперь потенциалы Ламе в виде тригонометрических рядов

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos n\theta, \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \sin n\theta \quad (2.4)$$

Подставляя их в уравнения (1.2) и (1.3), получим

$$\varphi_n = C_{1n} \exp[\alpha_1(r-1)], \quad \psi_n = C_{2n} \exp[\alpha_2(r-1)] \quad (2.5)$$

где функции в показателе экспоненты имеют вид

$$\alpha_i = \sqrt{n^2 - \beta_i^{-2} x^2} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь C_{in} ($i = 1, 2$) – постоянные; считается, что $x < \beta_2 n$.

Внося соотношения (2.1), (2.2) и (2.4) в контактные условия (1.7) и (1.8), придем с

учетом формул (1.5), (1.6) и (2.5) к системе линейных уравнений

$$(2\beta_2^2 n^2 - x^2)C_{1n} + 2\beta_2^2 n\alpha_2 C_{2n} = -\frac{p_0 E_n (-i)^n}{\rho_1 c^2} (J_n(x) + B_n H_n^{(1)}(x))$$

$$2\beta_2^2 n\alpha_1 C_{1n} + (2\beta_2^2 n^2 - x^2)C_{2n} = 0 \quad (2.6)$$

$$\alpha_1 C_{1n} + n C_{2n} = \frac{p_0 E_n (-i)^n}{\rho c^2 x} (J'_n(x) + B_n H_n^{(1)'}(x))$$

Решая ее, определим все неизвестные постоянные. В частности

$$B_n = \frac{J_n(x)S + J'_n(x)R}{-H_n^{(1)}(x)S + H_n^{(1)'}(x)R} \quad (2.7)$$

$$R = (2n^2 - \beta_2^2 x^2)^2 - 4n^2 \alpha_1 \alpha_2 \quad (2.8)$$

$$S = \kappa \beta_2^{-4} x^3 \alpha_1$$

Подставим теперь выражение (2.7) в формулу (2.3) и учтем, что вронскиан используемых цилиндрических функций принимает значение [4]:

$$W\{J_n(x), H_n^{(1)}(x)\} = \frac{2i}{\pi x} \quad (2.9)$$

Будем иметь

$$\zeta_n = \frac{8}{(\pi x)^{3/2}} \frac{S}{|R - S \frac{H_n^{(1)} x}{H_n^{(1)'}(x)} \| H_n^{(1)'}(x)|^2} \quad (2.10)$$

Полученная приближенная формула показывает, что изучаемые резонансы соответствуют нулям рэлеевского знаменателя R . Это соответствие становится еще более наглядным при переходе в формуле (2.10) к разложению в окрестности частоты n -го резонанса. С этой целью используем асимптотическое представление функций Ханкеля при больших значениях порядка. При $x > n$ имеем [4]:

$$H_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{tg} \delta}} \exp \left\{ i \left[n(\operatorname{tg} \delta - \delta) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (2.11)$$

где введена подстановка $\delta = \arccos(n/x)$.

Соответственно запишем

$$H_n^{(1)'} \approx i \left(\frac{\sin 2\delta}{\pi n} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left[n(\operatorname{tg} \delta - \delta) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (2.12)$$

С учетом последних соотношений приходим после элементарных преобразований в формуле (2.10) к стандартному локальному представлению

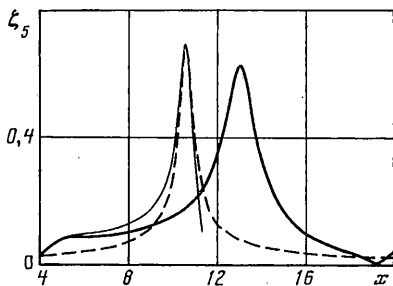
$$\zeta_n = A_n \frac{\Gamma_n}{|x - x_n + i \Gamma_n|} \quad (2.13)$$

Здесь частоты резонансов x_n , их амплитуды A_n , а также коэффициенты затухания Γ_n определяются формулами

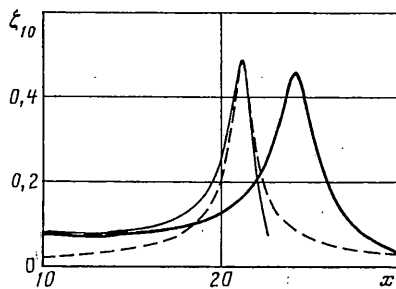
$$x_n = \beta_R n \quad (2.14)$$

$$A_n = 4 / \sqrt{\pi x_n} \quad (2.15)$$

$$\Gamma_n = \kappa \beta_2 \mu n / \sqrt{\beta_R^2 - 1} \quad (2.16)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В последней формуле

$$\mu = \frac{\gamma_1 \eta_R^3}{4[(2 - \eta_R)^2 + \eta^{-2} \gamma_2 \gamma_1^{-1} + \gamma_1 \gamma_2^{-1}]} \quad (2.17)$$

где приняты обозначения

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \eta^{-2} \eta_R^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - \eta_R^2}$$

Представление (2.13) применимо на интервале

$$x - x_n \ll \beta_R n \quad (2.18)$$

при условии

$$\Gamma_n \ll \beta_R n \quad (2.19)$$

Ограничение (2.19) обеспечивает попадание резонансной кривой, для точек которой $x \sim x_n \pm \Gamma_n$, на интервал (2.18). Полагая, что коэффициенты η и η_R , определяемые параметрами упругого тела, являются величинами порядка единицы, перепишем с учетом формулы (2.16) сильное неравенство (2.19) в виде

$$\kappa / \sqrt{\beta_R^2 - 1} \ll 1 \quad (2.20)$$

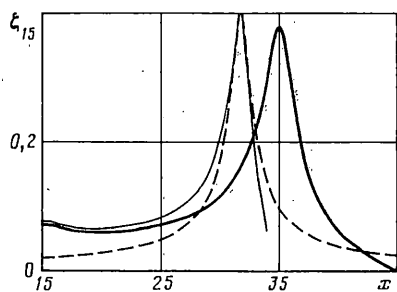
Таким образом, представление (2.13) справедливо только когда плотность тела значительно превосходит плотность среды либо скорости упругих волн намного больше, чем скорость звука в среде. При $\beta_R \gg 1$ условие (2.20) соответствует среде с малым относительным импедансом.

Заметим также, что известная формула для вычисления добротности

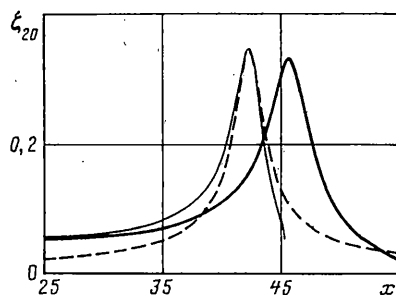
$$Q = x_n / \Gamma_n \quad (2.21)$$

в случае выражений (2.14) и (2.16) дает оценку, не зависящую от номера резонанса. В то же время ширина резонанса, равная $2\Gamma_n$, растет линейно по n . Поэтому при определении добротности резонансов, лежащих в широком частотном диапазоне, вероятно следует вводить специальную нормировку, например, использовать выражение $Q_* = Q/n$.

На фиг. 1–4 представлены результаты тестирования полученных приближенных формул. Резонансные кривые, рассчитанные по формуле (2.10), показаны тонкой линией, а по формуле (2.13) – штрихом. В качестве эталона использовано точное решение задачи рассеяния [1] для погруженного в воду полого алюминиевого цилиндра, отношение внутреннего радиуса которого ко внешнему равно 0,1. Резонансные кривые, соответствующие точному решению, изображены жирной линией. В расчетах принимались следующие значения параметров: $c_1 = 6380$ м/с, $c_2 = 3100$ м/с, $c = 1370$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, $\rho_1 = 2790$ кг/м³.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Рассеяние плоской акустической волны сферой. Будем исходить из разложений [3]:

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n(xr) P_n(\cos \theta) \quad (3.1)$$

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) B_n h_n^{(1)}(xr) P_n(\cos \theta) \quad (3.2)$$

где j_n – сферическая функция Бесселя, $h_n^{(1)}$ – сферическая функция Ханкеля первого рода, P_n – полином Лежандра.

Для резонансного компонента высших парциальных мод при рассеянии назад применим аналогичную (2.3) формулу [3]:

$$\zeta_n = \frac{4n}{x} \left| B_n + \frac{j'_n(x)}{h_n^{(1)'}(x)} \right| \quad (3.3)$$

Разложим потенциалы Ламе в ряды по полиномам Лежандра

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_n(\cos \theta), \quad \psi = \frac{\psi_n}{n} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (3.4)$$

В отличие от задачи рассеяния для цилиндра, в рассматриваемом случае не удастся получить точное решение в рамках принятой модели. Далее будем опираться на асимптотическую формулу

$$\partial^2 P_n(\cos \theta) / \partial \theta^2 \approx -n^2 P_n(\cos \theta) \quad (3.5)$$

справедливую при $n \gg 1$.

Подставим разложения (3.1), (3.2) и (3.4) в соотношения п. 1. С учетом приближенного равенства (3.5) придем к выражениям (2.5) и к формулам, получающимся из (2.6), (2.7) заменой цилиндрических функций на их сферические аналоги, а также C_{2n} на $-C_{2n}$ в (2.6). При этом формула (3.3) примет вид

$$\zeta_n = \frac{4n}{x^3} \frac{S}{\left| R - S \frac{h_n^{(1)}(x)}{h_n^{(1)'}(x)} \right| \left| h_n^{(1)'}(x) \right|^2} \quad (3.6)$$

где функции R и S по-прежнему определяются формулами (2.8).

В представлении (2.13) выражения (2.14) и (2.16) для резонансных частот и коэффициентов затухания также сохраняют свой вид. Амплитуды же теперь выглядят так

$$A_n = 4n / x_n^2 \quad (3.7)$$

В заключение отметим, что развиваемый в статье подход может быть распространен на некруговые цилиндры и произвольные тела вращения. При этом однако, возникнут дополнительные трудности, связанные с исследованием уравнения Гельмгольца, решение которого в общем случае не может быть представлено через специальные функции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (98-15-96017 и 99-01-01123) и ИНТАС (96-2113).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер Н.Д. Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 324 с.
2. Каплунов Ю.Д., Корсунский В.М. Описание резонансов волн Лэмба высших порядков в задаче рассеяния для цилиндрической оболочки // Акуст. ж. 1992. Т. 38. Вып. 3. С. 477–482.
3. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. N.Y. etc.: Acad. Press, 1998. 226 p.
4. Справочник по специальным функциям с формулами графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.01.2000