

УДК 533.6.013.42

© 2000 г. Н.Д. ВАЙСФЕЛЬД, В.Г. ПОПОВ

**ДИФРАКЦИЯ ИМПУЛЬСА НА ОБОЛОЧКЕ,
РАСПОЛОЖЕННОЙ В АКУСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ
НА РАССТОЯНИИ ОТ ЖЕСТКОГО ДНА**

На основе метода, базирующегося на применении разрывных решений уравнений динамики сплошных сред [1], решены нестационарные задачи дифракции акустических волн на упругих оболочках двух типов: тонкой упругой оболочке и толстостенной оболочке. В соответствии с этим методом, в пространстве изображений Лапласа решение исходной задачи представляется в виде построенных разрывных решений, для неизвестных скачков которых из граничных условий получены двумерные интегральные уравнения Вольтерра – Фредгольма 2-го рода. После приближенного решения последних численно исследовано влияние дна на величину нормальных напряжений на поверхности оболочки, расположенной в акустическом полупространстве, проведен расчет тангенциальных напряжений, позволяющий определить рамки применимости в этом случае теории тонких оболочек. Обзор современных методов исследования задач дифракции импульса на объектах оболочечного типа приведен в [2].

1. Пусть в акустическом полупространстве $y > 0$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$ на расстоянии l от дна содержится толстостенная оболочка, положение которой в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью оболочки, определено следующим образом: $r_1 < r < r_2$, $-\pi < \theta < \pi$, $-\infty < z < \infty$. Перемещения в оболочке удовлетворяют уравнениям Ламе для случая плоской деформации. На внешней поверхности оболочки выполнены условия

$$\sigma_r(r_2 - 0, \theta, t) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=r_2+0}, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r_2 - 0, \theta, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=r_2+0} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{r\theta}(r_2 - 0, \theta, t) = 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

Внутренняя поверхность оболочки считается свободной от напряжений

$$\sigma_{r\theta}(r_1 + 0, \theta, t) = 0, \quad \sigma_r(r_1 + 0, \theta, t) = 0 \quad (1.2)$$

В момент времени $t = 0$ с оболочкой взаимодействует плоская волна, потенциал которой имеет вид

$$\Phi_0(r, \theta, t) = -(c_0 t - r_2 - r \cos(\theta - \theta_0)) H(c_0 t - r_2 - r \cos(\theta - \theta_0)) \quad (1.3)$$

Здесь H – единичная функция Хевисайда, θ_0 – угол падения волны, c_0 – скорость распространения звука.

На дне выполняется условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (1.4)$$

Требуется определить напряженное состояние оболочки под воздействием падающей волны. Поле перемещений и напряжений внутри оболочки представляется в виде суперпозиции разрывных решений уравнений Ламе [3]:

$$T = T_1 + T_2 \quad (1.5)$$

где $T_k = [\sigma_r^k, \sigma_{r\theta}^k, \mathbf{u}_r^k, \mathbf{u}_\theta^k]_T$ ($k = 1, 2$) – вектора, компоненты которых перемещения и напряжения, терпящие разрыв на линии $r = r_k$, $-\pi < \theta \leq \pi$ со скачками:

$$\begin{aligned} \sigma_r^k(r_k - 0, \theta, t) - \sigma_r^k(r_k + 0, \theta, t) &= X_{1k}(\theta, t) \\ \sigma_{r\theta}^k(r_k - 0, \theta, t) - \sigma_{r\theta}^k(r_k + 0, \theta, t) &= X_{2k}(\theta, t) \\ \mathbf{u}_r^k(r_k - 0, \theta, t) - \mathbf{u}_r^k(r_k + 0, \theta, t) &= X_{3k}(\theta, t) \\ \mathbf{u}_\theta^k(r_k - 0, \theta, t) - \mathbf{u}_\theta^k(r_k + 0, \theta, t) &= X_{4k}(\theta, t) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В пространстве изображений Лапласа эти разрывные решения определяются формулами:

$$\begin{aligned} \bar{T}_k(r, \sigma) &= \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} A_n^k(r, \sigma) X_n^{(k)} \quad X_n^{(k)} = [X_n^{1k}, X_n^{2k}, X_n^{3k}, X_n^{4k}]_T \quad (k = 1, 2) \\ X_n^{jk} &= \int_{-\pi}^{\pi} X_{jk}(\theta) e^{-in\theta} e^{-pt} d\theta dt \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $A_n^k(r, \sigma)$ – матрицы 4-го порядка, элементы которых весьма громоздким образом выражаются через функции

$$\begin{aligned} h_{nk}^{(i)}(r, \sigma) &= \begin{cases} I_n(\sigma \zeta_i r) K_n(\sigma \zeta_i r_k), & r < r_k \\ I_n(\sigma \zeta_i r_k) K_n(\sigma \zeta_i r), & r > r_k \end{cases} \\ g_{nk}^{(i)}(r, \sigma) &= \begin{cases} \sigma \zeta_i I_n(\sigma \zeta_i r) K_n'(\sigma \zeta_i r_k), & r < r_k \\ \sigma \zeta_i I_n'(\sigma \zeta_i r_k) K_n(\sigma \zeta_i r), & r > r_k \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\zeta_i = c_2 / c_i$ ($i = 1, 2$), $\sigma = p/c_2$, где c_1, c_2 – скорости продольных и поперечных волн в среде, составляющей оболочку. Вид матриц $A_n^k(r, \sigma)$ дан в работе¹.

Волновое поле во внешней среде представляется в виде

$$\Phi(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta, t) + \varphi_0(r, \theta, t) + \varphi_p(r, \theta, t) \quad (1.9)$$

$$\varphi_p(r, \theta, t) = -(c_0 t - r_2 - r \cos(\theta + \theta_0)) H(c_0 t - r_2 - r \cos(\theta + \theta_0)) \quad (1.10)$$

где $\varphi(r, \theta, t)$ – потенциал рассеянной волны, $\varphi_p(r, \theta, t)$ – потенциал волны, отраженной от дна.

Учитывая представление (1.9) условие на дне (1.4) примет вид:

$$\partial \varphi / \partial y|_{y=0} = 0 \quad (1.11)$$

Для отыскания потенциала отраженной от оболочки волны используется метод изображений [4], в соответствии с которым, полупространство дополняется до всего пространства, а в нижнем полупространстве вводится симметричная фиктивная оболочка. После этого потенциал отраженных от оболочки волн представляется в виде $\varphi(r, \theta, t) = \varphi^+(r_+, \theta_+, t) + \varphi^-(r_-, \theta_-, t)$, где r_+, θ_+ – координаты исходной ци-

¹ Н.Д. Вайсфельд, В.Г. Попов. Дифракция акустической волны на тонкой упругой оболочке // Одесский ун-т. – Одесса, 1993. – 13 с. – Деп. в ГНТБ Украины 24.03.93 № 659 – Ук93.

линдрической системы, r_- , θ_- – цилиндрические координаты, симметричные координатам r_+ , θ_+ относительно плоской границы

$$r = r_+, \theta = \theta_+$$

$$r_- = \sqrt{r_+^2 + 4l^2 + 4lr_+ \sin \theta_+}, \theta_- = \arccos \frac{r_+}{r_-} \cos \theta_+ \quad (1.12)$$

Потенциалы φ^\pm – разрывные решения волнового уравнения со скачками

$$\langle \varphi^\pm \rangle |_{r_\pm=r_2} = \omega^\pm(\theta_\pm, t), \quad \left\langle \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r_\pm=r_2} = \gamma^\pm(\theta_\pm, t) \quad (1.13)$$

В пространстве изображений Лапласа они имеют следующий вид:

$$\bar{\varphi}^\pm(r, \theta) = r_2 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_n^\pm h_{n2}^{(2)}(r^\pm, p/c_0) e^{in\theta_\pm} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\omega}_n^\pm g_{n2}^2(r^\pm, p/c_0) e^{in\theta_\pm} \right\} \quad (1.14)$$

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\gamma}_n^\pm \\ \bar{\omega}_n^\pm \end{array} \right] = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \left[\begin{array}{c} \gamma^\pm(\theta, t) \\ \omega^\pm(\theta, t) \end{array} \right] e^{in\theta} e^{-pt} d\theta dt$$

Здесь, черта над буквой обозначает трансформанту Лапласа. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие на дне (1.11) удовлетворится автоматически, если в (1.14) положить

$$\bar{\omega}^+(\theta) = \bar{\omega}^-(\theta), \quad \bar{\gamma}^+(\theta) = \bar{\gamma}^-(\theta) \quad (1.15)$$

Тогда согласно (1.12) вид потенциала отраженных волн будет следующий:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(r, \theta) = & \frac{r_2}{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_n^+ [h_{n2}^{(2)}(r^+, p/c_0) e^{in\theta_+} + h_{n2}^{(2)}(r^-, p/c_0) e^{in\theta_-}] \right\} - \\ & - \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\omega}_n^+ [g_{n2}^{(2)}(r^+, p/c_0) e^{in\theta_+} + g_{n2}^{(2)}(r^-, p/c_0) e^{in\theta_-}] \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Формулы (1.7) и (1.16) определяют перемещения и напряжения внутри оболочки и волновое поле в акустической среде, если будут известны десять скачков \bar{X}_n^k ($k = 1, 2$) и ω^\pm , γ^\pm . Они могут быть найдены из условий (1.1), (1.2). Но этих пяти условий для однозначного определения скачков недостаточно, поэтому на разрывные решения (1.7), (1.16) накладываются следующие дополнительные условия. Поскольку φ^\pm должна описывать волновое поле вне оболочки, потребуем от разрывного решения (1.14) выполнения равенства

$$\bar{\varphi}^+(r_2 - 0, \theta) = 0 \quad (1.17)$$

из которого после подстановки (1.16) следует

$$\begin{aligned} \omega^+(\theta_+) = & \frac{r_2}{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\omega}_n^+ [g_{n2}^{(2)}(r^+, p/c_0) e^{in\theta_+} + g_{n2}^{(2)}(r^-, p/c_0) e^{in\theta_-}] \right\} \Big|_{r^\pm=r_2+0} - \\ & - \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_n^+ [h_{n2}^{(2)}(r^+, p/c_0) e^{in\theta_+} + h_{n2}^{(2)}(r^-, p/c_0) e^{in\theta_-}] \right\} \Big|_{r^\pm=r_2+0} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Аналогично, так как разрывные решения (1.7) должны определять перемещения и напряжения только в упругой среде ($r_1 < r < r_2$), от них требуется выполнение равенств

$$\bar{\mathbf{u}}_r^1(r_1 - 0, \theta) = 0, \quad \bar{\mathbf{u}}_r^2(r_2 + 0, \theta) = 0, \quad \bar{\mathbf{u}}_\theta^1(r_1 - 0, \theta) = 0, \quad \bar{\mathbf{u}}_\theta^2(r_2 + 0, \theta) = 0 \quad (1.19)$$

Из последних, после подстановки (1.7), находим следующие соотношения для скачков²:

$$X_n^{jk} = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij}^n X_n^{ik} \quad (j = \overline{3,4}) \quad (1.20)$$

Остается удовлетворить условиям на стыке сред (1.1), (1.2). В указанных равенствах осуществляется переход от предельных значений функций к неизвестным скачкам. Откуда, разрешая полученную систему из пяти уравнений, находится формула для связи скачков ω_n^+ и γ_n^+ . После подстановки ее в (1.18) получается интегральное уравнение относительно неизвестного скачка ω^+ :

$$\overline{\omega}^+(\theta_+, t) = \frac{r_2}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\omega}^+(v) \overline{Q}(\theta_+ - v) dv + \overline{F}(\theta_+) \right\} \quad (1.21)$$

После перехода к оригиналам и применения теоремы о свертке, (1.21) принимает вид

$$\omega^+(\theta_+, t) = \frac{r_2}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \omega^+(v, \tau) \overline{Q}(\theta_+ - v, t - \tau) dv d\tau + F(\theta_+, t) \right\} \quad (1.22)$$

Функция $Q(\theta_+ - \vartheta, t - \tau)$ является оригиналом функции $\overline{Q}(\theta_+ - \vartheta)$ и находится при помощи численного обращения преобразования Лапласа по методу *Ltr*₂ алгоритма [5]. Решение уравнения (1.22) строится численно. Для этого временной промежуток $[0; T]$, на протяжении которого будет исследоваться взаимодействие оболочки со средой, разбивается на интервалы $[\tau_k; \tau_{k+1}]$ с шагом $h = T/N$, $\tau_k = kT/N$ ($k = \overline{0, N}$). Интегралы по τ заменяются интегральной суммой при помощи формулы Симпсона, значения неизвестных функций в узлах которой разыскиваются в виде рядов

$$\omega_n^+(\theta_+) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{nm}^+ e^{im\theta_+}, \quad \omega_n^+(\theta_+) = \omega(\theta_+, \tau_n) \quad (1.23)$$

В результате, относительно ω_{nm}^+ — неизвестных коэффициентов из разложения (1.23), получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\omega_{nl}^+ - \frac{r_2}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \omega_{km}^+ B_{kmn} \right\} = F_{nl} \quad (1.24)$$

$$B_{kmn} = \int_{-\pi}^{\pi} [R(\theta_+, t_n - \tau_k) + R(\theta_-, t_n - \tau_k)] e^{-il\theta_+} d\theta_+$$

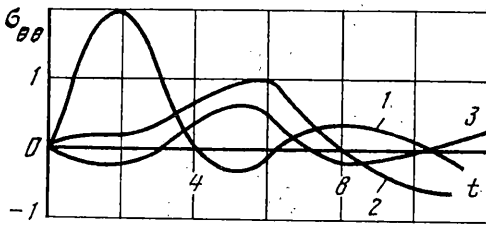
$$R(\theta, t) = e^{im\theta} \left\{ \sum_{j=0}^{2N} \frac{a_{j,N}}{1 + \delta_j^2} L_j(2\gamma t) - \int_0^{\infty} \xi N'_m \left(\frac{\xi}{c_0} r_2 \right) J_m \left(\frac{\xi}{c_0} r_2 \right) \cos \xi t d\xi \right\} -$$

$$- \int_0^{\infty} \xi N'_m \left(\frac{\xi}{c_0} r_2 \right) J_m \left(\frac{\xi}{c_0} r_2 \right) \sin \xi t d\xi, \quad F_{nl} = \sum_{k=1}^n E_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\varphi_{km}^0 + \varphi_{km}^p] D_{kmn}$$

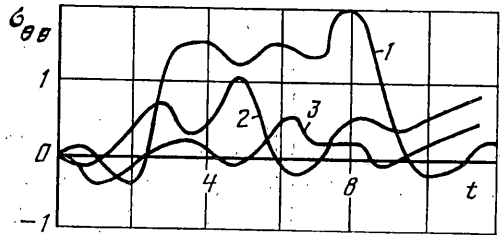
$$D_{kmn} = \int_{-\pi}^{\pi} [W_m(\theta_+, t_n - \tau_k) + W_m(\theta_-, t_n - \tau_k)] e^{-il\theta_+} d\theta_+$$

$$W_m(\theta, t) = \frac{\rho}{2\mu} \int_0^{\infty} \zeta^2 J_m \left(\frac{\zeta}{c_0} r_2 \right) \left[J'_m \left(\frac{\zeta}{c_0} r_1 \right) \sin \zeta t - N'_m \left(\frac{\zeta}{c_0} r_1 \right) \cos \zeta t \right] d\zeta e^{im\theta}$$

² Коэффициенты α_{ij}^n приведены в работе, цитируемой в ссылке на с. 174.



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь A_k – коэффициенты квадратурной формулы Симпсона, L_j – полиномы Лагерра, $a_{j,N}$ – определяются через значения трансформанты функции $\bar{Q}(\theta_+ - v)$. Затем, система (1.24) решается методом редукции. Для получения точности $\epsilon = 10^{-3}$ необходимо сохранение первых 18 членов ряда. Решение системы получено в виде набора коэффициентов ω_{km}^+ , с помощью которых определяется скачок $\omega^+(\theta_+, t)$. После нахождения остальных неизвестных скачков и использования разрывных решений (1.7), к которым применяется обратное преобразование Лапласа и теорема о свертке, получается выражение для подсчета нормальных напряжений на оболочке.

2. Пусть теперь в той же акустической среде на расстоянии l от дна расположена тонкая упругая цилиндрическая оболочка, положение которой в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью оболочки, определено следующим образом $0 < r < R$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $-\infty < z < \infty$. Движение оболочки описывается системой линейных дифференциальных уравнений Кирхгофа – Лява [4]:

$$(1+a^2) \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + a^2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^3} = \frac{\sigma}{R} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}, \quad a = \frac{h^2}{3R^2} \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + a^2 \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial \theta^3} + \left(1 + a^4 \frac{\partial^4 \omega}{\partial \theta^4}\right) - \frac{R(1-\sigma^2)}{2Eh} Z = \frac{\sigma}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

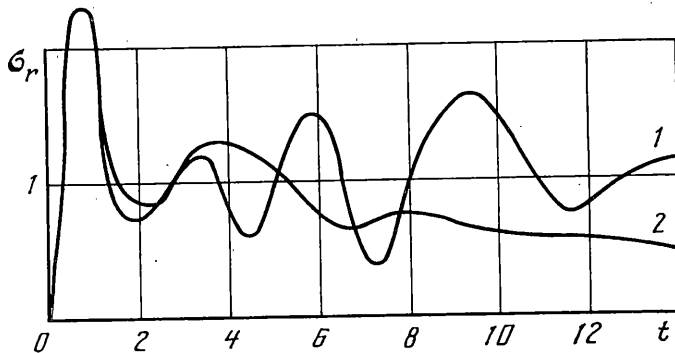
где h – толщина оболочки, R – радиус срединной поверхности, \mathbf{v} , \mathbf{w} – тангенциальные и нормальные перемещения оболочки. В момент времени $t = 0$ с покоящейся оболочкой взаимодействует волна (1.3). На дне справедливо равенство (1.4). Волновое поле представляется в виде (1.12). Тогда сила, действующая со стороны среды на оболочку, равна

$$Z = -\rho \left. \frac{\partial(\varphi(r, \theta, t) + \varphi_0(r, \theta, t) + \varphi_p(r, \theta, t))}{\partial t} \right|_{r=R+0} \quad (2.2)$$

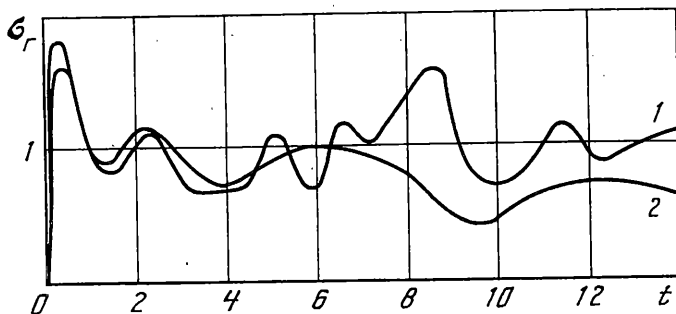
Из условия совпадения скоростей оболочки и окружающей среды на поверхности оболочки и (2.2) следует

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left. \frac{\partial(\varphi(r, \theta, t) + \varphi_0(r, \theta, t) + \varphi_p(r, \theta, t))}{\partial t} \right|_{r=R+0} \quad (2.3)$$

Для построения потенциала $\varphi(r, \theta, t)$, удовлетворяющего (2.2), (2.3), (1.4) так же используется метод изображений. В результате он будет определяться (1.16). Волновое поле в среде вне оболочки будет определено, если в (1.16) будут известны скачки $\bar{\omega}^+$ и $\bar{\gamma}^+$. Для их однозначного определения недостаточно условий (2.2), (2.3). Недостающее условие может быть получено, если внутри оболочки, где акустическая среда отсутствует, будет выполняться соотношение (1.17). Считая его выполненным и подставив в него (1.16), получено уравнение вида (1.22), решение которого строилось



Фиг. 3



Фиг. 4

численно, изложенным ранее методом. Неизвестные функции $\omega_n^+(\theta_+)$ разыскивались в виде (1.24). Неизвестные коэффициенты из этого разложения определялись из бесконечной системы вида (1.23), коэффициенты которой приведены в [5]. Бесконечная система решалась методом редукции. Для достижения точности 10^{-3} сохранялись первые 14 членов ряда.

3. В обоих случаях рассчитывались зависимость тангенциальных напряжений от времени в лобовой точке $\theta = \pi/2$. Фиг. 1 иллюстрирует характер изменения во времени тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, полученных при описании движения оболочки с помощью линейных уравнений нестационарной теории упругости. Напряжения рассчитывались для срединной поверхности оболочки. Кривая 1 соответствует толщине оболочки 0,4 (обезразмеренная по радиусу величина), кривая 2 – толщине 0,3, кривая 3 – 0,1. На фиг. 2 приведены графики тангенциальных напряжений, полученных при описании движения оболочки с помощью уравнений линейной теории тонких упругих оболочек. Кривая 1 соответствует толщине 0,4, кривая 2 – 0,3, кривая 3 – 0,1. Анализ результатов счета позволяет заметить следующие особенности. При увеличении толщины оболочки значения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в срединной поверхности возрастают. При толщине оболочки равной 0,1 максимальные значения на приведенных кривых совпадают, однако для напряжений, рассчитанных с помощью линейной теории упругости отмечается большее количество точек максимума и минимума. При толщине оболочки, равной 0,3, $\sigma_{\theta\theta}$ достигают своих максимальных значений в различные моменты времени, однако абсолютные значения максимальных величин близки. При толщине, превышающей 0,3, графики тангенциальных напряжений носят качественное различие.

Кроме того, для случая тонкой оболочки исследовалась зависимость давления от времени для различных величин заглубления. На фиг. 3 приведены графики давления

на поверхности тонкой оболочки в точке $\theta = \pi/2$ с толщиной $h/R = 0,01$. Кривая 1 соответствует величине заглупления оболочки $R/l = 0,9$, кривая 2 соответствует величине заглупления $R/l = 0,01$. На фиг. 4 приведены графики давления на поверхности тонкой оболочки в точке $\theta = \pi/2$ с толщиной $h/R = 0,1$. Кривая 1 соответствует величине заглупления оболочки $R/l = 0,9$, кривая 2 соответствует величине заглупления $R/l = 0,01$. Прделанные численные расчеты позволяют сделать следующие выводы. Чем ближе оболочка расположена к границе ($R/l \rightarrow 1$), тем выше значения давления и тем более характерно для него наличие точек максимума и минимума, что объясняется сложным дифракционным процессом, протекающим вблизи границы. С удалением от границы ($R/l \rightarrow 0$), значения давления в области контакта оболочки со средой уменьшается. При сравнении численных результатов с полученными значениями напряжения при отсутствии дна, заметно, что уже при $R/l = 0,01$, влияние дна становится несущественным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
3. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на дугообразном жестком включении // Динамические системы. Киев: Вища шк., 1983. Вып. 2. С. 35–41.
4. Гузь А.Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. Динамика тел, взаимодействующих со средой. Киев: Наук. Думка, 1991. 392 с.
5. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жандырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: 1992. 227 с.

Одесса

Поступила в редакцию
10.11.1997