

УДК 624.07:534.1

© 2000 г. А.П. МАЛЫШЕВ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
 И СТАТИКИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
 НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Волновые процессы при внешнем сухом трении описаны довольно детально только для простейшего случая продольных волн в стержнях [1, 2]. При поперечном нагружении, а тем более при совместном действии продольных и поперечных нагрузок, различные компоненты возмущений в условиях внешнего трения оказываются связанными друг с другом сложными нелинейными зависимостями, что существенно затрудняет решение задачи. Отдельные аспекты поперечных волновых процессов в прямолинейных балках, соприкасающихся с шероховатой поверхностью, изучались в [3, 4]. Настоящая работа посвящена моделированию общего случая плоского волнового движения стержневых конструкций по шероховатой поверхности. Исследованы критические уровни трения при поперечном и продольно-поперечном нагружении. Для описания статических режимов используется метод установления.

1. Плоское движение стержня с учетом сдвига и инерции поворота сечений при внешнем трении можно описать следующей системой уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \partial N / \partial x &= \rho F \partial U / \partial t - p_1, & \partial N / \partial t &= EF \partial U / \partial x \\ \partial Q / \partial x &= \rho F \partial W / \partial t - p_2, & \partial Q / \partial t &= \alpha GF (\partial W / \partial x - \Phi) \\ \partial M / \partial x &= \rho J \partial \Phi / \partial t - m, & \partial M / \partial t &= EJ \partial \Phi / \partial x \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $N$  и  $Q$  – продольная и поперечная силы,  $M$  – изгибающий момент,  $U$ ,  $W$  и  $\Phi$  – продольная, поперечная и угловая скорости сечений,  $\rho$  – плотность,  $E$  и  $G$  – модули упругости при растяжении и сдвиге,  $F$ ,  $J$  и  $\alpha$  – площадь, момент инерции и коэффициент формы сечения,  $t$  – время,  $x$  – продольная координата,  $p_1$ ,  $p_2$  и  $m$  – погонные усилия и изгибающий момент, вызванные трением.

В дальнейшем будем считать, что силы трения соответствуют закону Кулона

$$\begin{aligned} \sigma &= -q \operatorname{sign} V \text{ при } V \neq 0 \\ |\sigma| &< q \text{ при } V = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\sigma$  – напряжения трения,  $V$  – скорость смещения точки по шероховатой поверхности.

Для определенности будем считать, что стержень имеет прямоугольное сечение, которое по боковой стороне высотой  $2f$  соприкасается с шероховатой поверхностью. Ограничимся рассмотрением малых углов поворота сечений  $\varphi \ll 1$ .

Создаваемые трением погонные усилия и момент определяются по-разному в зависимости от величины  $U$ ,  $W$  и  $\Phi$ .

(a)  $U \neq 0$ ,  $W \neq 0$ ,  $\Phi \neq 0$ :

$$p_1 = q(\Phi I_2 - U I_1), \quad p_2 = -q W I_1, \quad m = q(U I_2 - \Phi I_3)$$

$$I_1 = \frac{1}{|\Phi|} \ln \left| \frac{b_1 \operatorname{sign} \Phi - a_1}{b_2 \operatorname{sign} \Phi - a_2} \right|, \quad I_2 = (b_1 - b_2 + \Phi U I_1) / \Phi^2$$

$$I_3 = 0, 5[(f + 3U / \Phi)b_1 + (f - 3U / \Phi)b_2 + (2U^2 - W^2)I_1] / \Phi^2$$

$$a_i = U + (-1)^i \Phi f, \quad b_i = (W^2 + a_i^2)^{1/2} \quad (i = 1, 2)$$

(b)  $U = 0, W \neq 0, \Phi \neq 0$ :

$$p_1 = p_{10}, p_2 = -qWI_1, m = -q\Phi I_3$$

(c)  $U \neq 0, W = 0, \Phi \neq 0$ :

$$p_1 = q[|a_1|H(-a_1) - a_2H(a_2)] / \Phi, p_2 = p_{20}$$

$$m = 0, 5q[|a_2| a_1 H(a_2) - |a_1| a_2 H(-a_1)]$$

(d)  $U \neq 0, W \neq 0, \Phi = 0$ :

$$p_1 = -2qfU/d, p_2 = -2qfW/d, m = m_0$$

$$d = (U^2 + W^2)^{1/2}$$

(e)  $U = 0, W = 0, \Phi \neq 0$ :

$$p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, m = -qf^2 \operatorname{sign} \Phi$$

(f)  $U \neq 0, W = 0, \Phi = 0$ :

$$p_1 = -2qf \operatorname{sign} U, p_2 = p_{20}, m = m_0$$

(g)  $U = 0, W \neq 0, \Phi = 0$ :

$$p_1 = p_{10}, p_2 = -2qf \operatorname{sign} W, m = m_0$$

(h)  $U = 0, W = 0, \Phi = 0$ :

$$p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, m = m_0$$

(1.3)

Здесь  $p_{10}$  и  $p_{20}$  – создаваемые трением погонные усилия, которые определяются из условия равенства нулю всех приложенных к сечению сил в продольном и поперечном направлении соответственно,  $m_0$  – момент сил трения, соответствующий равенству нулю суммы всех моментов, действующих на сечение,  $H(\dots)$  – функция Хевисайда.

Ограничимся рассмотрением плоских конструкций, имеющих стыки произвольного числа стержней. Подобная расчетная схема позволяет охватить достаточно широкий класс конструкций типа рам и различных стержневых деталей сложной формы.

Условия неразрывности перемещений в стыке  $k$  стержней и условия равновесия стыка можно записать в виде:

$$L_k = D_{ki} L_i \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} B_{ki} D_{ki} S_i, \quad M_k = \sum_{i=0}^{k-1} B_{ki} M_i \quad (1.4)$$

$$L_i = \begin{Bmatrix} U_i \\ W_i \end{Bmatrix}, \quad S_i = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \end{Bmatrix}, \quad B_{ki} = -j_k j_i$$

$$B_{k0} = j_k, \quad \gamma_{ki} = \theta_i - \theta_k, \quad \gamma_{k0} = -\theta_k$$

где  $D_{ki}$  – матрица поворота на угол  $\gamma_{ki}$ ,  $\theta_i$  – угол между локальной системой координат, связанной с продольной осью  $i$ -го стержня, и глобальной системой координат, связанной с внешними силами  $N_0$  и  $Q_0$ ,  $j_i$  – направляющий косинус внешней нормали к торцу  $i$ -го стержня,  $M_0$  – внешний момент,  $U_i, W_i, \Phi_i, N_i, Q_i, M_i$  ( $i \neq 0$ ) – скорости, силы и момент на торце  $i$ -го стержня.

2. Алгоритм численного моделирования базируется на схеме С.К. Годунова [6], которая дополнена специальной шаговой процедурой, позволяющей с высокой точностью описывать системы волн, бегущих с различной скоростью [4]. В методику численного моделирования внесены отдельные изменения и дополнения, указанные ниже.

В разностных соотношениях, соответствующих уравнениям (1.1), слагаемые, которые содержат диссипативные силовые факторы, целиком отнесены к следующему временному слою:

$$(\rho F)_*(U^* - U_*) = (N_n - N_{n-1})\tau/h + p_1^*\tau \quad (2.1)$$

$$N^* - N_* = (EF)_*(U_n^* - U_{n-1}^*)\tau/h$$

$$(\rho F)_*(W^* - W_*) = (Q_n - Q_{n-1})\tau/h + p_2^*\tau$$

$$Q^* - Q_* = (\alpha GF)_*(W_n^* - W_{n-1}^*)\tau/h - (\alpha GF)_*(\Phi^* + \Phi_*)\tau/2$$

$$(\rho J)_*(\Phi^* - \Phi_*) = (M_n - M_{n-1})\tau/h + (Q^* + Q_*)\tau/2 + m^*\tau$$

$$M^* - M_* = (EJ)_*(\Phi_n^* - \Phi_{n-1}^*)\tau/h$$

Выражения для равновесных диссипативных факторов принимают вид

$$p_{10}^* = (N_{n-1} - N_n)/h - (\rho F)_* U_* / \tau$$

$$p_{20}^* = (Q_{n-1} - Q_n)/h - (\rho F)_* W_* / \tau \quad (2.2)$$

$$m_0^* = (M_{n-1} - M_n)/h - (\rho J)_* \Phi_* / \tau$$

В соотношениях на характеристиках диссипативные факторы не учитываются, причем слагаемые в правых частях, умножаемые на  $\tau$ , обновляются на каждом шаге расчета и соответствуют текущему времени моделирования  $t$ . Остальные слагаемые пересчитываются только в моменты совпадения  $t$  с локальным временем соответствующей системы волн  $t_i$ :

$$N_n - (jc_1 \rho F)_k U_n = (N - jc_1 \rho F U)_k$$

$$Q_n - (jc_2 \rho F)_k W_n = (Q - jc_2 \rho F W - \tau \alpha GF \Phi / 2)_k \quad (2.3)$$

$$M_n - (jc_1 \rho J)_k \Phi_n = (M - jc_1 \rho J \Phi - \tau j c_1 Q / 2)_k$$

$$(n = 1, 2, \dots; k = n - j/2), \quad c_1^2 = E/\rho, \quad c_2^2 = \alpha G/\rho$$

где  $j$  – направляющий косинус внешней нормали к соответствующему торцу элементарного участка, на которые разбивается каждый стержень в процессе моделирования.

Подобная структура расчетных соотношений, хотя и понижает формально порядок аппроксимации разностной схемы до первого за счет слагаемых с диссипативными силовыми факторами, однако, как показал обширный численный эксперимент, ликвидирует "дребезг" в зависимостях для  $p_{20}$  и  $m_0$ , который связан с нелинейностью задачи и иногда наблюдался в моменты останова при использовании прежнего варианта алгоритма. С этой же целью было увеличено количество итераций при переходе от предварительного упругого решения к решению с учетом сил трения. Многочисленные расчеты показали, что заведомо достаточно пяти итераций.

Координата стыка совпадает с координатами начала или конца скрепленных стержней, поэтому в зависимости (1.4) входят среднеинтегральные значения параметров на интервале  $(t, t + \tau)$  при  $x = nh$ , которым приписываются целочисленные индексы. Эти зависимости вместе с соотношениями на характеристиках (2.3) для торцевых сечений, образуют полную систему уравнений, позволяющую определить

все граничные условия в стыке. В остальных сечениях параметры с целочисленными индексами вычисляются на основании обычного расчета распада разрыва по соотношениям (2.3).

Для проверки сходимости были проведены серии расчетов с  $h = 0,04; 0,02$  и  $0,01$ . При двух последних значениях шага результаты различались не более, чем на несколько единиц в четвертом значащем десятичном разряде, что позволило сделать вывод о достаточной сходимости численного решения. Все приведенные ниже результаты получены при  $h = 0,01$ . Коэффициент Пуассона полагался равным  $0,3$ ;  $\alpha = 5/6$ ;  $c_2 = 0,5661 c_1$ .

3. При задании на торце стержня скачка продольной скорости  $U_0$  уровень внешнего трения  $q_u$ , начиная с которого наблюдается торможение головного фронта волны, определяется зависимостью:

$$q_u = U_0 l_T L / (2\rho c_1 F) \quad (3.1)$$

где  $L$  – часть периметра поперечного сечения стержня, на которой действуют силы трения,  $l_T$  – длина участка с трением.

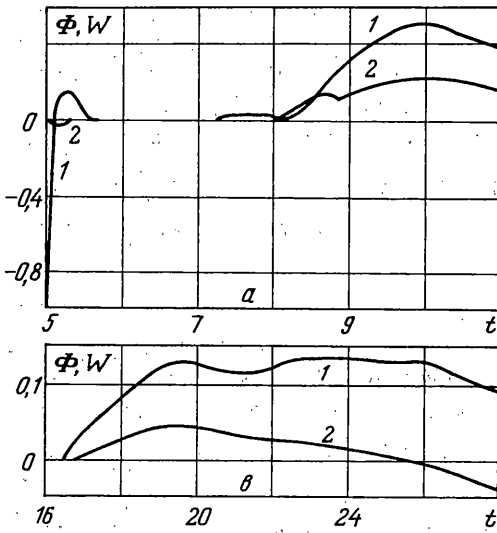
Этот результат следует из аналитического решения [7], которое удалось получить для простейшего случая возбуждения продольных волн в прямом стержне. При динамическом изгибе балки тесная взаимосвязь поперечного и углового смещения сечений существенно меняет вид волновой картины. В [3] установлен подобный эффект торможения головной волны и для этого случая, однако ввиду больших осложнений, сопровождающих аналитическое решение задачи, получены только отдельные асимптотические зависимости. С целью более детального анализа указанного явления было проведено численное моделирование волновых переходных процессов в балке квадратного сечения высотой  $2f = 1$  и длиной  $l = 5$ , лежащей на шероховатом основании.

Сначала на торце  $x = 0$  внезапно задавалась постоянная угловая скорость  $\Phi_0 = -\dot{H}(t)$ . Перерезывающая и осевая силы полагались на этом торце равными нулю, а другой торец балки считался свободным. На фиг. 1 показано изменение по времени  $\Phi$  (кривая 1) и  $W$  (кривая 2) при разных уровнях трения: фиг. 1,а соответствует  $q = 0,05$ , фиг. 1,б –  $q = 0,15$ .

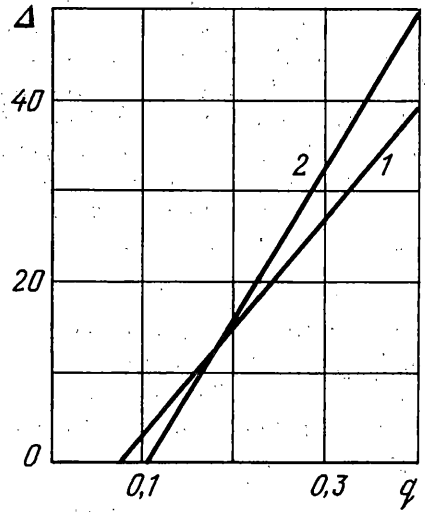
Анализ (1.1)–(1.3) показывает, что задание возмущающего фактора равным единице в рассматриваемых задачах эквивалентно нормированию скоростей и силовых факторов, описывающих волновую реакцию, по его максимальному значению. При этом действительный максимум нагрузки предполагается достаточно малым, чтобы постановка задачи оставалась корректной. В частности считается, что действительная, не нормированная угловая скорость обеспечивает выполнение условия  $\varphi \ll 1$ , которое использовалось при выводе соотношений (1.3).

По мере затухания головного пика волны  $\Phi$  возмущения между ним и фронтом сдвига, бегущим со скоростью  $c_2$ , быстро убывают, и здесь формируется новый волновой фронт (фиг. 1а). Сначала он опережает сдвиговой фронт – именно такая ситуация рассматривалась в [3]. Начиная с уровня трения  $q_\varphi = 0,128$  этот фронт становится головным, т.к. возмущения перед ним полностью затухают после прохождения всего стержня и не достигают свободного торца стержня. С ростом трения скорость нового фронта падает, однако возмущения продолжают распространяться. На фиг. 1,б четко виден такой фронт волны  $\Phi$ , который приходит в торцевое сечение со значительной задержкой. Величина задержки  $\Delta$  отсчитывалась относительно времени выхода на свободный торец только что сформировавшегося фронта ( $t = 7,1$  при  $q = 0,07$ ). Результаты расчетов показывают, что задержка  $\Delta$  линейно зависит от уровня трения (фиг. 2, прямая 1).

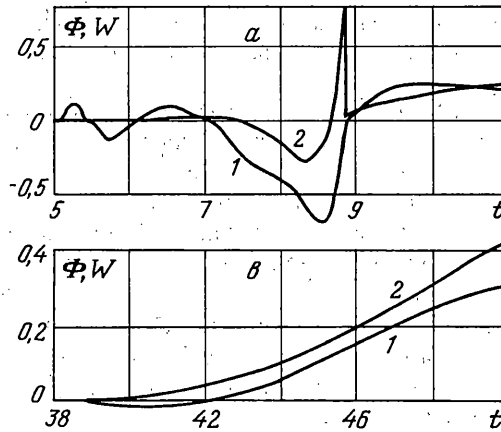
Следует отметить, что заметное нарастание поперечной скорости наблюдается, в свою очередь, с некоторым дополнительным запаздыванием. За счет него образуется видный на фиг. 1,б квазифронт  $W$ , бегущий вслед за головным фронтом  $\Phi$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Были исследованы также волновые процессы в балке, сопровождающие поперечное краевое возбуждение:  $W_0 = -H(t)$ ,  $N_0 = 0$ ,  $M_0 = 0$  при  $x = 0$ , когда разрыв переносится с упругим фронтом сдвиговой волны. Результаты расчета скоростей свободного торца представлены на фиг. 3,а ( $q = 0,05$ ) и фиг. 3,б ( $q = 0,25$ ), где использованы обозначения фиг. 1. Возмущения между фронтами упругих волн в этом случае тоже быстро затухают. Спереди к сдвиговому фронту примыкает узкая область, где возмущения противоположны по знаку тем, которые наблюдаются сразу за фронтом (фиг. 3,а).

С увеличением уровня трения возмущения в окрестности фронта сдвига локализуются и принимают вид уединенного знакопеременного импульса. Появление уединенных импульсов при другой краевой нагрузке уже отмечалось в [4]. Оно является, видимо, общей закономерностью подобных волновых процессов, которая ждет экспериментального подтверждения. При дальнейшем повышении трения указанный импульс уменьшается как по амплитуде, так и по длительности. Одновременно за ним формируется новый фронт, который начиная с  $q_w = 0,241$  становится головным (фиг. 3,б).

Скорость движения нового головного фронта убывает линейно с ростом уровня трения. На фиг. 2 приведена задержка выхода этого фронта на свободный торец балки (линия 2). За начало ее отсчета принято время прихода фронта, сформировавшегося в непосредственной близости от торца ( $t = 14,8$  при  $q = 0,0941$ ).

Отметим, что в обоих случаях формирование нового волнового фронта начинается за упругим фронтом, несущим разрыв.

При приложении к стержню осевой силы  $N_0$  всегда существует уровень сухого трения  $q_n$ , когда возмущения перестают преодолевать фиксированный участок с трением и происходит "запирание" стержня [7]:

$$q_u/q_n = \rho c_1 F U_0 / N_0 \quad (3.2)$$

Исследование динамики балки под действием изгибающего момента:  $M_0 = H(t)$ ,  $N_0 = 0$ ,  $Q_0 = 0$  при  $x = 0$  показало, что возмущения перестают достигать свободного торца при  $q_m = 1,538$ . Полученные значения  $q_m$  и  $q_\Phi$  соответствуют зависимости, аналогичной (3.2) и следующей из соотношения на характеристиках

$$q_\Phi/q_m = \rho c_1 J \Phi_0 / M_0 \quad (3.3)$$

Вместе с тем, когда на торце  $x = 0$  действует только перерезывающая сила  $Q_0 = H(t)$ , полное затухание возмущений на фронте сдвига происходит при  $q = 0,491$ . Это больше значения  $q_w/(\rho c_2 F)$ , которое следует из соответствующего соотношения на характеристиках. И даже при таком трении возмущения продолжают преодолевать балку, правда, со значительной задержкой. Они перестают достигать свободного торца только при  $q_q = 0,594$ .

Причина кроется в тесной взаимосвязи поперечных и угловых смещений балки. Трение "запирания" для изгибающего момента существенно выше, чем для перерезывающей силы. При краевом нагружении перерезывающей силой одновременно с волнами  $W$  и  $Q$  возбуждаются сопутствующие волны  $\Phi$  и  $M$ . За счет этой части возмущений и повышается общий порог "запирания" балки. Если возбуждение, как в предыдущей задаче, носит преимущественно моментный характер, а  $\Phi$  и  $M$  гасятся трением, сопутствующие возмущения  $W$  и  $Q$  не могут дойти до свободного торца, поскольку для их подавления достаточно и более слабого трения ( $q_q < q_m$ ).

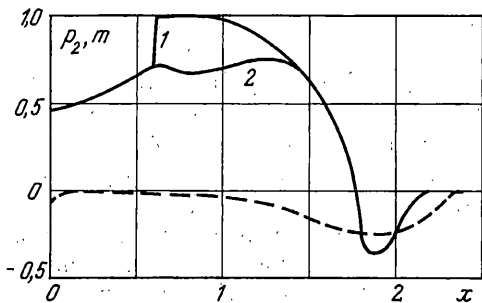
При изгибе балки поперечные и угловые скорости, а также соответствующие силовые факторы в ней связаны даже при отсутствии трения [5]. Внешнее трение усиливает и видоизменяет эту связь. Вместе с тем оно может послужить причиной взаимного влияния процессов, которые без трения протекают независимо. Чтобы оценить характер подобного воздействия трения, были рассмотрены волновые процессы в той же балке, когда к ее левому торцу одновременно внезапно приложены единичные осевая сила  $N_0$  и изгибающий момент  $M_0$ . Без внешнего трения реакцию балки на каждый из этих видов нагрузки можно считать независимой. Перерезывающая сила на этом торце для определенности принималась равной нулю.

В соответствии с (3.1), (3.2) при действии одной единичной осевой силы ( $Q_0 = 0$ ,  $M_0 = 0$ ) уровень трения "запирания" балки  $q = 0,4$ . Как показали предварительные расчеты, при действии одного изгибающего момента ( $N_0 = 0$ ,  $Q_0 = 0$ ), такое трение "запирает" балку, когда  $M_0 = 0,26$ .

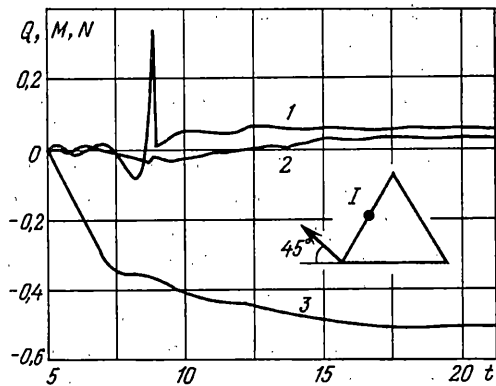
Оказалось, что при совместном действии  $N_0 = 1$  и  $M_0 = 0,26$  уровень трения "запирания" поднимается до  $q = 0,646$ . Другими словами, совместное возбуждение осевых и изгибных волн заметно ослабляет влияние трения.

Обобщая приведенные выше результаты, можно сделать вывод о том, что критические уровни трения существенно зависят от характера возбуждения волновых процессов.

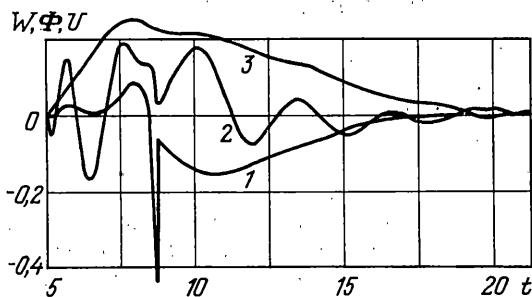
4. При решении нелинейных задач в газовой динамике широкое распространение получил метод установления, когда уравнения нестационарной динамики интегри-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

руются вплоть до полного затухания переходных процессов. Такой подход представляется эффективным и при решении статических задач с учетом трения.

Рассмотрим изгиб бесконечной балки, покоящейся на шероховатой поверхности, поперечной силой  $Q_0$ , которая приложена в сечении  $x = 0$ . В силу симметрии задачи продольная и угловая скорости этого сечения равны нулю.

Аналитическое решение данной задачи для квазистатического нагружения и соответствующего распределения сил трения получено в [8]. Численное моделирование позволило найти решение задачи при динамическом нагружении. В расчетах принималось  $Q_0 = H(t)$ ,  $q = 1$ . На фиг. 4 показано распределение поперечного усилия трения по длине балки в момент  $t = 5,1$  (кривая 1) – перед полной остановкой балки и в момент  $t = 5,5$  (кривая 2) – сразу после завершения динамических процессов. На кривой 1 четко видна левая точка торможения поперечного движения ( $x = 0,51$ ). При торможении происходит резкое падение усилия трения, и своеобразный фронт разгрузки быстро движется слева направо. На правой границе зоны поперечного движения, где также происходит торможение, такого резкого изменения  $p_2$  не наблюдается, что связано, по всей видимости, с влиянием поворота сечения. О таком влиянии свидетельствует повышенный уровень погонного момента трения при  $x > 1,5$ . Для  $t = 5,5$  он показан на фиг. 4 штриховой линией. Отметим, что  $p_2$  меняет знак только один раз, а не многократно, как в [8]. Указанное отличие связано с разной историей деформирования балки, предшествующей ее конечному положению, при динамическом и квазистатическом изгибе. Обращает на себя внимание и то, что в состоянии покоя на балке нигде не реализуются максимальные напряжения трения. Впервые подобный эффект был отмечен в [7] для продольных волновых процессов в стержне.

Как показывают проведенные исследования, численное моделирование в сочетании с методом установления является одним из эффективных способов решения как

динамических, так и статических задач с учетом сухого трения. Возможности разработанной методики хорошо иллюстрирует моделирование плоского движения по шероховатой поверхности стержневой рамы в виде равностороннего треугольника со сторонами длиной  $l = 10$  (фиг. 5). К ее левому нижнему углу внезапно приложена единичная постоянная сила, направленная под углом  $45^\circ$  к основанию рамы. На фиг. 5 приведены результаты моделирования  $Q$  (кривая 1),  $M$  (кривая 2) и  $N$  (кривая 3) в точке 1 – середине левой боковой стороны при  $q = 0,1$ . Изменение по времени скоростей  $W$  (кривая 1),  $\Phi$  (кривая 2) и  $U$  (кривая 3) показано на фиг. 6. На приведенных зависимостях можно проследить всю картину переходных процессов в рассматриваемом сечении от начальной волновой фазы, когда четко видно прохождение волновых фронтов, до установления состояния статического равновесия. Методика предъявляет умеренные требования к вычислительным ресурсам. Решение последней задачи с шагом  $h = 0,01$  заняло 12 мин на ПЭВМ с процессором Pentium 120.

Автор благодарит Л.В. Никитина за полезное обсуждение данной работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Московский лицей, 1998. 272 с.
2. Никитин Л.В. Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 53–106.
3. Могилевский Р.И., Никитин Л.В. Динамический изгиб балки, лежащей на шероховатой поверхности // Изв. РАН МТТ. 1996. № 1. С. 176–179.
4. Малышев А.П. Численное моделирование волновых процессов в балке, соприкасающейся с шероховатой поверхностью // Изв. РАН МТТ: 1998. № 6. С. 149–155.
5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
6. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Никитин Л.В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения // Инж. ж. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 126–130.
8. Никитин Л.В. Изгиб балки на шероховатой поверхности // Докл. РАН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1057–1061.

Москва

Поступила в редакцию  
18.02.1998