

УДК 531.38

© 2000 г. А.К. АЛЕХИН, А.П. МАРКЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДИСКА НАД ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Рассматривается периодическое движение твердого тела над неподвижной горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Тело является однородным тонким диском. Плоскость – абсолютно гладкая, соударения диска с плоскостью – абсолютно упругие. В невозмущенном движении плоскость диска расположена вертикально, диск вращается вокруг вертикальной или горизонтальной оси и при этом периодически подсакивает над плоскостью.

В предположении о том, что константы циклических интегралов и интеграла энергии являются невозмущаемыми, исследуется устойчивость движения относительно угла отклонения плоскости диска от вертикали. Эта задача сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения плоскости в себя по алгоритму из работы [1]. В обоих случаях (вращение диска вокруг вертикальной или горизонтальной оси) получаются идентичные отображения, зависящие от двух безразмерных параметров. В плоскости параметров имеется счетное множество чередующихся зон устойчивости и неустойчивости в первом приближении, свидетельствующих о квантовании областей устойчивости по высоте подскока тела для подобного рода систем с соударениями [2].

Эта же задача была исследована в работе [3] путем численного анализа соответствующей гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами. Были определены области устойчивости линейной задачи, а также выполнен нелинейный анализ внутри этих областей. В данной статье, при помощи алгоритма из работы [1], получено явное аналитическое выражение условия устойчивости и неустойчивости через параметры задачи, и проведен нелинейный анализ как внутри области устойчивости линейной задачи, так и на ее границе.

1. Системы координат, уравнения движения. Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с началом в произвольной точке O плоскости и осью OZ , направленной вертикально вверх. Пусть $G\xi\eta\zeta$ – неподвижно связанная с диском система координат: G – центр тяжести диска, ось $G\xi$ перпендикулярна плоскости диска, а $G\xi$ и $G\eta$ лежат в плоскости диска.

Координаты центра тяжести тела X, Y, Z и углы Эйлера ψ, θ, ϕ , задающие ориентацию $G\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$, однозначно определяют положение тела в пространстве. В невозмущенном движении в случае вращения диска вокруг вертикальной оси $\theta = \pi/2, \psi = \omega_1, \phi = 0$, а в случае вращения вокруг горизонтальной оси $\theta = \pi/2, \psi = 0, \phi = \omega_2$.

Далее, вместо координаты Z будет использоваться величина $q = Z - R \sin \theta$. Во все время движения $q \geq 0$, при $q = 0$ происходит абсолютно упругий удар тела о плоскость OXY . Поэтому в момент удара знак \dot{q} меняется на противоположный [4]. В свободном полете движению диска отвечает функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + (\dot{q} + R\dot{\theta} \cos \theta)^2) + \frac{1}{8} mR^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{4} mR^2(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 - mg(q + R \sin \theta) \quad (1.1)$$

где m – масса диска, R – его радиус, g – ускорение свободного падения.

При ударе неизменны все обобщенные координаты $X, Y, q, \psi, \theta, \phi$ и все обобщенные импульсы, кроме импульса p , соответствующего обобщенной координате q [4]. Поскольку (1.1) не содержит X, Y, ψ, ϕ , то во все время движения имеют место следующие четыре интеграла:

$$p_X = m\dot{X} = C_X, \quad p_Y = m\dot{Y} = C_Y, \quad p_\phi = \frac{mR^2}{2}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = C_\phi$$

$$p_\psi = \frac{mR^2}{4}\dot{\psi} \sin^2 \theta + \frac{mR^2}{2}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \cos \theta = C_\psi$$

где C_X, C_Y, C_ψ, C_ϕ – константы. Считаем C_X, C_Y равными нулю. Это означает, что центр тяжести тела движется вдоль фиксированной вертикали. Для случая вращения вокруг вертикальной оси положим $C_\psi = mR^2\omega_1/4, C_\phi = 0$, а при вращении вокруг горизонтальной оси: $C_\psi = 0, C_\phi = mR^2\omega_2/2$. Дальнейшие выкладки будем производить для первого случая.

Во время свободного полета движение тела отвечает дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{Z} = -g, \quad \ddot{\theta} = \omega_1^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad (1.2)$$

Вводим импульсы

$$p = \partial L / \partial \dot{q} = m(\dot{q} + R\dot{\theta} \cos \theta) = m\dot{Z}$$

$$p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta} = m(\dot{q} + R\dot{\theta} \cos \theta)R \cos \theta + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta} \quad (1.3)$$

Функция Гамильтона примет вид:

$$H = \frac{4 \cos^2 \theta + 1}{2m} p^2 - \frac{4 \cos \theta}{mR} p p_\theta + \frac{2}{mR^2} p_\theta^2 + \frac{mR^2 \omega_1^2}{8 \sin^2 \theta} + mg(q + R \sin \theta) \quad (1.4)$$

Если h – высота подскока ближайшей к плоскости точки диска, то движение имеет период $2\sqrt{2h/g}$, равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями диска и плоскости. Будем считать, что для возмущенного движения, так же как и для невозмущенного, имеет место тождество

$$H(q, \theta, p, p_\theta) = mg(h + R) + mR^2\omega_1^2/8 \quad (1.5)$$

где H задается равенством (1.4). Представим θ, p_θ, q как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, определяемом (1.5). Движение диска изобразится кривой в этом пространстве, лежащей в области $q \geq 0$. Плоскость $q = 0$ отвечает моментам соударений. Пусть в возмущенном движении в момент первого соударения время $t = 0$ и $\theta(0) = \theta_0, p_\theta(0) = p_{\theta_0}$. В момент следующего соударения $t = t_1, \theta(t_1) = \theta_1, p_\theta(t_1) = p_{\theta_1}$. Отображение $(\theta_0, p_{\theta_0}) \rightarrow (\theta_1, p_{\theta_1})$ плоскости $q = 0$ в себя будет обладать свойством сохранения площади [1]; его неподвижная точка $(\pi/2, 0)$ будет соответствовать невозмущенному движению диска, а ее устойчивость или неустойчивость будет означать орбитальную устойчивость или неустойчивость исследуемого периодического движения.

Для удобства введем обозначения $\theta_0 = \pi/2 + x, p_{\theta_0} = \sqrt{g/2hmR^2}/8y$ и $\theta_1 = \pi/2 + x_1, p_{\theta_1} = \sqrt{g/2hmR^2}/8y_1$. Отображение $(x, y) \rightarrow (x_1, y_1)$ также сохраняет площадь, $(0, 0)$ – его неподвижная точка. При достаточно малых x, y величины x_1, y_1 будут анали-

тическими функциями относительно x, y . Чтобы найти эти функции, можно поступить так: выразить через x и y начальные условия $Z(0), \dot{Z}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$ уравнений (1.2); решить их; найти момент t_1 следующего соударения тела с плоскостью и выразить x_1 и y_1 через $Z(t_1), \dot{Z}(t_1), \theta(t_1), \dot{\theta}(t_1)$.

2. Построение отображения. Из формулы (1.5) при $q = 0$ получим значение импульса p непосредственно после удара

$$p^+ = m\sqrt{2gh} \left[1 + \left(-\frac{\omega_1^2 R^2}{16gh} + \frac{R}{4h} - 2 \right) x^2 - \frac{R}{4h} xy - \frac{R^2}{128h^2} y^2 \right] + O_4 \quad (2.1)$$

Здесь и далее через O_n обозначается степенной ряд, начинающийся с членов не ниже n -й степени. Используя (1.3) и (2.1), найдем, что

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= \frac{4}{mR^2} (p_\theta - p^+ R \cos \theta_0) = \\ &= \sqrt{\frac{2g}{h}} \left[\frac{4h}{R} x + \frac{1}{4} y + \left(1 - \frac{\omega_1^2 R}{4g} - \frac{26h}{3R} \right) x^3 - x^2 y - \frac{R}{32h} xy^2 \right] + O_4 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\dot{Z}(0) = \frac{p^+}{m} = \sqrt{2gh} \left[1 + \left(-\frac{\omega_1^2 R^2}{16gh} + \frac{R}{4h} - 2 \right) x^2 - \frac{R}{4h} xy - \frac{R^2}{128h^2} y^2 \right] + O_4 \quad (2.3)$$

При $t = 0$ высота Z центра масс диска равна $R \sin \theta(0)$, или

$$Z(0) = R + \frac{1}{2} R x^2 + O_4 \quad (2.4)$$

Первое из уравнений (1.2) дает

$$Z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{Z}_0 t + Z_0, \quad \dot{Z}(t) = -g t + \dot{Z}_0 \quad (2.5)$$

Решение второго дифференциального уравнения из (1.2) ищется в виде ряда по степеням C_1, C_2 , где $C_1 = \theta(0) - \pi/2, C_2 = \dot{\theta}(0)/\omega_1$:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \pi/2 + C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t + C_1^3 (\cos^3 \omega_1 t - \cos \omega_1 t - 3\omega_1 t \sin \omega_1 t)/6 + \\ &+ C_1^2 C_2 (-\sin^3 \omega_1 t - \sin \omega_1 t + \omega_1 t \cos \omega_1 t)/2 + C_1 C_2^2 (-\cos^3 \omega_1 t + \cos \omega_1 t - \omega_1 t \sin \omega_1 t)/2 + \\ &+ C_2^3 (-\sin^3 \omega_1 t - \sin \omega_1 t + 3\omega_1 t \cos \omega_1 t)/6 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Время t_1 окончания полета определяется из неявной функции $F(x, y, t) = Z(t) - R \sin \theta(t) = 0$, где $Z(t)$ и $\theta(t)$ задаются формулами (2.3) – (2.6) и представимы в виде рядов по степеням x, y . Так как в невозмущенном движении время полета равно $2\sqrt{2h/g}$, то $F(0, 0, 2\sqrt{2h/g}) = 0$, а поскольку $F_t'(0, 0, 2\sqrt{2h/g}) \neq 0$, то возможно разложить t_1 по степеням x, y :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2Rb}{g}} + \frac{1}{a^3 b} \sqrt{\frac{2R}{gb}} [(a^4 b^2 (b \sin^2 a - 1) + 2a^3 b^2 \sin a \cos a + a^2 (b(\cos^2 a + 1) - 1)) x^2 + \\ &+ 2(a^2 b (b \sin^2 a - 1) + ab \sin a \cos a) xy + (b \sin^2 a - 1) y^2] + O_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$a = 2\omega_1 \sqrt{2h/g}, \quad b = 2g/(\omega_1^2 R) \quad (2.8)$$

Теперь подставим выражение (2.7) в (2.5), (2.6) и найдем $Z(t_1), \dot{Z}(t_1), \theta(t_1)$ и $\dot{\theta}(t_1)$.

Далее, так как $x_1 = \theta(t_1) - \pi/2$ и $y_1 = 8p_\theta(t_1)\sqrt{2h/g}/(mR^2)$, где $p_\theta(t_1)$ вычислена по формуле (1.3), получаем следующие разложения функций x_1, y_1 в ряды по степеням x, y :

$$x_1 = (\cos a + ab \sin a)x + \frac{\sin a}{a}y + \sum_{i+j=3} v_{ij}x^i y^j + O_4 \quad (2.9)$$

$$y_1 = a(a^2 b^2 \sin a + 2ab \cos a - \sin a)x + (\cos a + ab \sin a)y + \sum_{i+j=3} w_{ij}x^i y^j + O_4 \quad (2.10)$$

$$v_{30} = [3a^5 b^5 \cos a - a^4 b^4 \sin a(b(\cos^2 a + 2) + 3) + a^3 b^3 \cos a(15b \sin^2 a - 9) + a^2 b^2 \sin a(b(39 \cos^2 a - 31) + 9) + ab \cos a(b(37 \cos^2 a - 13) - 12) + 24b^2 \sin a - 12b \sin a(\cos^2 a + 2) + 12 \sin a]/(6ab^2)$$

$$v_{21} = [3a^4 b^4 \cos a - a^3 b^3 \sin a(b(\cos^2 a + 2) + 2) + a^2 b^2 \cos a(14b \sin^2 a - 11) + ab \sin a(b(25 \cos^2 a - 18) + 8) + b \cos a(12 \cos^2 a - 4) - 4 \cos a]/(2a^2 b^2)$$

$$v_{12} = [3a^3 b^3 \cos a - a^2 b^2 \sin a(b(\cos^2 a + 2) + 1) + ab \cos a(13b \sin^2 a - 12) + b \sin a(12 \cos^2 a - 8) + 4 \sin a]/(2a^3 b^2)$$

$$v_{03} = [3a^2 b^2 \cos a - ab^2 \sin a(\cos^2 a + 2) + 12ab \sin^2 a \cos a - 12 \cos a]/(6a^2 b^4)$$

$$w_{30} = [3a^6 b^6 \cos a - 3a^5 b^5 \sin a(b + 2) + 3a^4 b^4 \cos a - (5b \sin^2 a - 4) + a^3 b^3 \sin a(24b^2 \sin^2 a + b(57 \cos^2 a - 61) + 18) + a^2 b^2 \cos a(72b^2 \sin^2 a + b(81 \cos^2 a - 83) - 3) + ab \sin a(b^2(72 \cos^2 a + 24) - b(51 \cos^2 a + 50) + 24) + 24b^2 \cos a(\cos^2 a + 1) - 12b \cos a(\cos^2 a + 3) + 12 \cos a]/(6b^2)$$

$$w_{21} = [3a^5 b^5 \cos a - a^4 b^4 \sin a(3b + 5) + a^3 b^3 \cos a(15b \sin^2 a - 13) + a^2 b^2 \sin a(24b^2 \sin^2 a + b(42 \cos^2 a - 46) + 19) + ab \cos a(48b^2 \sin^2 a + b(39 \cos^2 a - 47) + 4) + 24b^2 \sin a \cos^2 a - 4b \sin a(3 \cos^2 a + 2) + 4 \sin a]/(2ab^2)$$

$$w_{12} = [3a^4 b^4 \cos a - a^3 b^3 \sin a(3b + 4) + a^2 b^2 \cos a(15b \sin^2 a - 13) + ab \sin a(24b^2 \sin^2 a + b(27 \cos^2 a - 34) + 16) + 24b^2 \sin^2 a \cos a + 4b \cos a(3 \cos^2 a - 5) + 4 \cos a]/(2a^2 b^2)$$

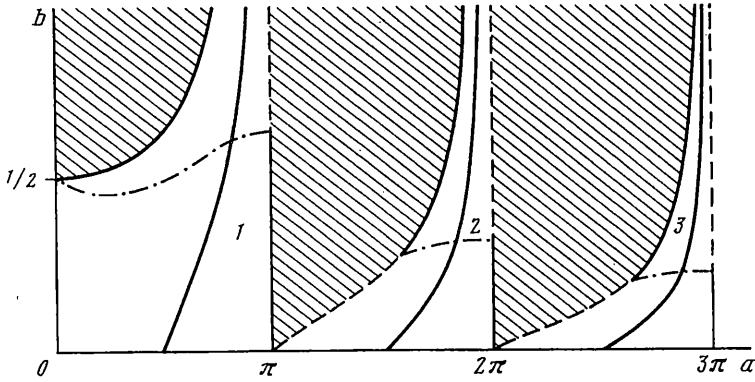
$$w_{03} = [3a^3 b^3 \cos a - 3a^2 b^2 \sin a(b + 1) + 3ab \cos a(5b \sin^2 a - 4) + 24b^2 \sin^3 a + 12b \sin a(\cos^2 a - 2) + 12 \sin a]/(6a^3 b^2)$$

Примечание: если произвести аналогичные выкладки для случая вращения диска вокруг горизонтальной оси, то в результате будет получено то же самое отображение (2.9), (2.10), где a и b будут заданы формулами (2.8), в которых следует заменить ω_1 на $2\omega_2$.

3. Исследование устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения. Характеристическое уравнение линеаризованного отображения (2.9), (2.10) имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \quad (3.1)$$

где $A = \cos a + ab \sin a$. Если $|A| > 1$, то отображение неустойчиво при любом выборе нелинейности в правых частях равенств (2.9), (2.10). Обратное неравенство $|A| < 1$ приводит к системе неравенств, определяющих области устойчивости линеаризо-



ванного отображения.

$$-\operatorname{ctg} \frac{1}{2} a < ab < \operatorname{tg} \frac{1}{2} a, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} a < ab < -\operatorname{ctg} \frac{1}{2} a \quad (3.2)$$

В плоскости параметров a, b зоны устойчивости и неустойчивости в первом приближении будут чередоваться (на фигуре зоны неустойчивости заштрихованы). Обозначим зоны устойчивости числами 1, 2, 3, ... Для строгого решения задачи устойчивости внутри области (3.2) и на ее границе, необходимо учесть нелинейные члены отображения (2.9), (2.10).

Начнем изучение области (3.2) с ее прямолинейной границы. На прямолинейной границе зон с нечетными номерами имеем $a = \pi + 2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), и отображение (2.9), (2.10) примет вид: $x_1 = -x + O_3$, $y_1 = -2\pi^2 b(2k+1)^2 x - y + O_3$. Подстановка $x = -c^{-1/2} p$, $y = c^{1/2} q$, где $c = 2\pi^2 b(2k+1)^2$, приводит к нормализации линеаризованного отображения

$$q_1 = -q + p + \sum_{i+j=3}^{\infty} f_{ij} q^i p^j, \quad p_1 = -p + \sum_{i+j=3}^{\infty} g_{ij} q^i p^j$$

Согласно [1], если $g_{30} < 0$, то отображение устойчиво, а если $g_{30} > 0$, то неустойчиво. Рассмотрев g_{30} , обнаруживаем, что устойчивость имеет место при $b < 2/(\pi(2k+1))$. На прямолинейной границе четных зон, где $a = 2\pi k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), отображение имеет вид $x_1 = x + O_3$, $y_1 = 8\pi^2 b k^2 x + y + O_3$. Нормализующая подстановка такова: $x = c^{-1/2} p$, $y = c^{1/2} q$, $c = 8\pi^2 b k^2$. Нормализованное отображение

$$q_1 = q + p + \sum_{i+j=3}^{\infty} f_{ij} q^i p^j, \quad p_1 = p + \sum_{i+j=3}^{\infty} g_{ij} q^i p^j$$

Опять же, если $g_{30} < 0$, то отображение устойчиво. Это условие эквивалентно неравенству $b < 1/(\pi k)$. Объединим критерии устойчивости: на прямолинейной границе k -й зоны при

$$b < 2/(\pi k) \quad (3.3)$$

имеет место устойчивость, а при обратном знаке неравенства (3.3) — неустойчивость.

На криволинейной границе действуем аналогично. Для нечетных зон имеем $b = a^{-1} \operatorname{tg}(a/2)$, а отображение (2.9), (2.10) имеет вид: $x_1 = x + a^{-1} \sin ay + O_3$, $y_1 = y + O_3$. После подстановки $x = d^{1/2} q$, $y = d^{-1/2} p$, где $d = a^{-1} \sin a$, получаем нормали-

зованное отображение

$$q_1 = q + p + \sum_{i+j=3}^{\infty} f_{ij} q^i p^j, \quad p_1 = p + \sum_{i+j=3}^{\infty} g_{ij} q^i p^j$$

Условие устойчивости $g'_{30} < 0$:

$$g'_{30}(a) = 2 \frac{5 \cos a + 3}{\cos a + 1} + \frac{\sin a (\cos^2 a - 14 \cos a - 19)}{a (\cos a + 1)} + 8 \frac{\sin^2 a}{a^2} \quad (3.4)$$

На криволинейной границе четных зон $b = -a^{-1} \operatorname{ctg}(a/2)$, имеем отображение: $x_1 = -x + a^{-1} \sin ay + O_3$, $y_1 = -y + O_3$. После подстановки $x = (-d)^{1/2} q$, $y = -(-d)^{-1/2} p$ получаем

$$q_1 = -q + p + \sum_{i+j=3}^{\infty} f'_{ij} q^i p^j, \quad p_1 = -p + \sum_{i+j=3}^{\infty} g'_{ij} q^i p^j$$

Условие $g''_{30} < 0$ несколько отличается от (3.4):

$$g''_{30}(a) = 2 \frac{5 \cos a - 3}{\cos a - 1} + \frac{\sin a (\cos^2 a + 14 \cos a - 19)}{a (\cos a - 1)} + 8 \frac{\sin^2 a}{a^2} \quad (3.5)$$

Участки границы области (3.2), на которых наблюдается устойчивость, обозначены на фигуре сплошной линией, а участки границы, на которых имеет место неустойчивость, — штриховой.

Для нелинейного анализа устойчивости внутри нечетных зон произведем замену переменных $x = -d^{1/2} (1 - A^2)^{1/4} q$, $y = -d^{1/2} (1 - A^2)^{1/4} p$. Линейная часть отображения $(q, p) \rightarrow (q_1, p_1)$ соответствует повороту на угол $\alpha = \arccos A$:

$$q_1 = q \cos \alpha + p \sin \alpha + \sum_{i+j=3}^{\infty} f_{ij} q^i p^j, \quad p_1 = -q \sin \alpha + p \cos \alpha + \sum_{i+j=3}^{\infty} g_{ij} q^i p^j$$

Внутри области устойчивости линейного отображения может иметь место резонанс третьего или четвертого порядка, когда $\rho^3 = 1$ или $\rho^4 = 1$, где $\rho = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Обратимся к случаю отсутствия резонансов. Согласно [1], выполнение условия $\mu_{21}^2 + \nu_{21}^2 \neq 0$, где

$$\mu_{21} = (3f_{30} + f_{12} + g_{21} + 3g_{03})/8, \quad \nu_{21} = (3f_{03} + f_{21} - g_{12} - 3g_{30})/8 \quad (3.6)$$

означает устойчивость. После упрощения это условие устойчивости выглядит так:

$$\begin{aligned} \Gamma(a, b) = & 2a^3 b^4 [-a(2 \cos^2 a + 1) + 3 \sin a \cos a] + a^2 b^3 \sin a [8a \cos a - 25 \sin a] + \\ & + 4b^2 [a^2 (5 \cos^2 a + 1) + 4a \sin a \cos a + 6 \sin^2 a] - \\ & - 32b \sin a [a \cos a + \sin a] + 16 \sin^2 a \neq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Произведя аналогичные выкладки для четных зон, легко убедиться, что для них выражение $\mu_{21}^2 + \nu_{21}^2$ после упрощения также преобразуется к (3.7). Отметим, что в точке пересечения кривой $\Gamma(a, b) = 0$ с криволинейной границей любой нечетной (или четной) зоны величина g'_{30} (или g''_{30}) обращается в нуль; аналогичная ситуация и в точке пересечения $\Gamma(a, b) = 0$ с прямолинейной границей зоны: там неравенство (3.3) обращается в равенство. Таким образом получается, что на границе зон устойчивости

кривая $\Gamma(a, b) = 0$ разделяет интервалы устойчивости и неустойчивости. На фигуре кривая $\Gamma(a, b) = 0$ изображена штрихпунктирной линией.

Резонанс третьего порядка в данной задаче несущественен, поскольку в правых частях формул (2.9), (2.10), задающих отображение, отсутствуют члены второй степени. Резонанс четвертого порядка имеет место на кривой $A = 0$. При этом выполнение неравенства $\mu_{21}^2 - \mu_{03}^2 - \nu_{03}^2 > 0$, где μ_{21} вычисляется по формуле (3.6), а $\mu_{03} = (f_{30} - f_{12} - g_{21} + g_{03})/8$, $\nu_{03} = (f_{03} - f_{21} + g_{12} + g_{30})/8$, означает устойчивость, а $\mu_{21}^2 - \mu_{03}^2 - \nu_{03}^2 < 0$ – неустойчивость [1]. Упрощая условие устойчивости, получаем

$$2a^4(\cos^2 a + 1)(5\cos^2 a - 4)^2 + a^3 \sin a \cos a(5\cos^2 a - 4)(2\cos^6 a + 15\cos^4 a + 7\cos^2 a - 32) + a^2 \sin^2 a \cos^2 a(\cos^8 a + 97\cos^6 a + 18\cos^4 a - 336\cos^2 a + 224) + 8a \sin^5 a \cos^3 a(2\cos^4 a + 17\cos^2 a - 24) + 64 \sin^8 a \cos^4 a > 0 \quad (3.8)$$

Для четных зон неравенство $\mu_{21}^2 - \mu_{03}^2 - \nu_{03}^2 > 0$, также приводится к виду (3.8).

Анализ неравенства (3.8) показывает, что в каждой зоне устойчивости линейной задачи на резонансных кривых четвертого порядка имеется небольшой участок неустойчивости, который пересекает кривая $\Gamma(a, b) = 0$ (см. фигуру, на которой кривые $A = 0$ показаны сплошными линиями). В первых трех зонах устойчивости эти отрезки таковы: $0,5909 < b < 0,6338$; $0,3081 < b < 0,3183$; $0,2079 < b < 0,2123$. Полученные результаты согласуются с расчетами работы [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00220) и INTAS (проект 96-2138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
2. Маркеев А.П. Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 363–369.
3. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 71–81.
4. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.06.1998