

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. С.Н. КУКУДЖАНОВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ЗАКРУЧЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

Исследуются собственные колебания оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящимся под предварительным действием крутящих моментов M , приложенных по торцам. Предполагается, что форма образующей срединной поверхности оболочки описывается достаточно гладкой, знакопостоянной функцией. На основании теории пологих оболочек получено соответствующее разрешающее уравнение колебания. Для случая, когда образующая срединной поверхности оболочки изменяется по параболическому закону, приведенное уравнение отличается от известного [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие учтенные члены. Рассматриваются оболочки средней длины, как положительной, так и отрицательной кривизны. При этом рассматриваются только главные граничные условия. Основное внимание уделяется низшим частотам, практически наиболее важным. Приведенное решение для определения частотных и критических характеристик является достаточно хорошим приближением решения, соответствующего свободному опиранию, так как в предельном случае, когда крутящий момент стремится к нулю, приведенное решение переходит в решение, соответствующее свободному опиранию, а частотные характеристики стремятся к частотам свободно опертой оболочки; в другом предельном состоянии, а именно наибольшего влияния крутящих моментов на низшую частоту (когда частота стремится к нулю) на основании приведенного решения получаем критические крутящие моменты, являющиеся достаточно хорошим приближением критических крутящих моментов свободно опертой оболочки [2, 3]. В безразмерной форме получены формулы и универсальные зависимости наименьшей частоты от предварительного касательного напряжения и отклонения оболочки от цилиндра.

Приведенные кривые показывают, что предварительно действующие касательные напряжения при наличии малых отклонений от цилиндрической формы (порядка толщины) в зависимости от знака гауссовой кривизны могут существенно изменять низшие частоты и форму волнообразования соответствующей цилиндрической оболочки.

1. Рассматриваются оболочки, у которых срединная поверхность образована вращением некоторой достаточно гладкой кривой вокруг оси z , прямоугольной системы координат x, y, z с началом в середине отрезка оси вращения (фиг. 1). При этом радиус поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством

$$R = r + \delta_0 F(\xi) \quad (1.1)$$

где $\xi = z/r$; $F(\xi)$ – положительная функция, заданная на интервале $(-l/r, l/r)$, такая, что $F(\pm l/r) = 0$, $\max F(\xi) = 1$, $|F'(\xi)| \leq 1$; $L = 2l$ – длина оболочки; r – радиус торцевого сечения, δ_0 – малый параметр, характеризующий максимальное отклонение от цилиндрической формы. При $\delta_0 > 0$ образующая срединной поверхности имеет форму

выпуклости, при $\delta_0 < 0$ – вогнутости. Считается, что

$$(\delta_0/r)^2, \quad (\delta_0/l)^2 \ll 1 \quad (1.2)$$

Уравнение срединной поверхности в параметрическом представлении имеет вид

$$x = R(\xi) \cos \varphi, \quad y = R(\xi) \sin \varphi \quad (1.3)$$

где φ – угловая координата. Отсюда получаем, что коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности будут $A^2 = r^2 + \delta_0(F')^2$, $B = R(\xi)$.

На основании сделанного допущения в выражении A^2 можно пренебречь вторым членом. Следовательно

$$A \approx r, \quad B = R(\xi) \quad (1.4)$$

Главные радиусы кривизны имеют вид

$$k_1 = 1/R_1 = -R''/r, \quad k_2 = 1/R_2 = 1/R(\xi) \quad (1.5)$$

За основные уравнения колебания принимались уравнения, соответствующие теории пологих оболочек [4]. Для рассматриваемых оболочек средней длины формы колебаний, соответствующие низшим частотам, сопровождаются слабовыраженным волнообразованием в продольном направлении в сравнении с окружным, поэтому справедливо соотношение

$$\partial^2 f / \partial \xi^2 \ll \partial^2 f / \partial \varphi^2 \quad (f = w, \psi) \quad (1.6)$$

где w, ψ – соответственно функции радиального перемещения и напряжения. В результате система уравнений теории пологих оболочек приводится к следующему разрешающему уравнению:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{R''}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \left(\frac{R''}{r} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \\ - \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(t_1^{\circ} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(t_2^{\circ} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(s^{\circ} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(s^{\circ} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) \right] = 0 \\ \varepsilon = h^2 / 12r^2(1 - \nu^2), \quad t_i^{\circ} = T_i^{\circ} / Eh \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$s^{\circ} = S^{\circ} / Eh$$

где T_i° ($i = 1, 2$), S° – соответственно нормальные и сдвиговые усилия исходного состояния; h – толщина оболочки. Исходное состояние предполагается безмоментным. Учитывая близость R и r , можно показать, что для рассматриваемого случая $T_1^{\circ} = T_2^{\circ} = 0$, $S^{\circ} = M / 2\pi r^2$.

2. Рассмотрим оболочку, образующая срединной поверхности которой определяется параболической функцией

$$F(\xi) = 1 - \xi^2(r/l)^2 \quad (2.1)$$

В этом случае уравнение (1.7) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2s^{\circ} \frac{\partial^6 w}{\partial \xi \partial \varphi^5} + \Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Дополнительным членом в этом уравнении в сравнении с известным уравнением, приведенным в [1], является четвертый член, который в силу неравенства (1.6) будет одного порядка с третьим членом этого уравнения.

Таким образом, нахождение форм колебаний рассматриваемых оболочек сводится

к определению ненулевых решений уравнения (2.2) при краевых условиях

$$w(\pm l/r, \varphi) = 0, \quad T_1(\pm l/r, \varphi) = 0 \quad (2.3)$$

Решение будем искать в виде ряда

$$w = \sin(\omega t + \alpha) \sum_{mn} \cos \lambda_m \xi [A_{mn} \sin n(\varphi - \gamma \xi) + B_{mn} \cos n(\varphi - \gamma \xi)] \quad (2.4)$$

$$\lambda_m = m\pi r / (2l) \quad (m = 2p + 1; \quad p = 0, 1, 2, \dots)$$

Приведенное решение удовлетворяет кинематическим граничным условиям (2.3). Статические граничные условия (2.3) выполняются в интегральном смысле. Кроме того, как будет показано ниже, при $M = 0$ параметр $\gamma = 0$ и выражение (2.4) точно удовлетворяет статическим граничным условиям.

Представим выражение (2.4) в следующем виде:

$$w = \sin(\omega t + \alpha) \sum_{mn} A_{mn} / 2 (\sin[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + \sin[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi]) + B_{mn} / 2 (\cos[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + \cos[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi]) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.2), получаем

$$\sum_{mn} \{A_{mn} F(n, -m) \sin[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + A_{mn} F(n, m) \sin[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi] + B_{mn} F(n, -m) \cos[n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + B_{mn} F(n, m) \cos[n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi]\} = 0 \quad (2.6)$$

$$F(n, \pm m) = \varepsilon n^8 + \mu_{\pm} + 4\delta \mu_{\pm}^2 n^2 + 4\delta^2 n^4 + 2s^\circ \mu_{\pm} n^5 + \Omega \omega^2 n^4, \quad \mu_{\pm} = \pm n\gamma + \lambda_m \quad (2.7)$$

Отсюда будем иметь

$$A_{mn}[F(n, -m) + F(n, m)] = 0, \quad A_{mn}[F(n, -m) - F(n, m)] = 0$$

$$B_{mn}[F(n, -m) + F(n, m)] = 0, \quad B_{mn}[F(n, -m) - F(n, m)] = 0$$

Таким образом, для существования нетривиального решения уравнения (2.2) при вышеприведенных краевых условиях необходимо и достаточно, чтобы нашлись целые m, n , удовлетворяющие условиям

$$F(n, m) = 0, \quad F(n, -m) = 0 \quad (2.8)$$

Соотношения (2.8) представляют собой следующие равенства:

$$\Omega \omega^2 = \varepsilon n^4 + \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + 4\delta \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4\delta^2 + 2s^\circ \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right) \quad (2.9)$$

$$\Omega \omega^2 = \varepsilon n^4 + \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + 4\delta \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4\delta^2 + 2s^\circ \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right) \quad (2.10)$$

Отсюда нетрудно показать, что наименьшему значению частоты ω в зависимости от m соответствует $m = 1$, поэтому в дальнейшем полагаем $m = 1$.

Введем обозначения

$$\rho = \lambda_1 \varepsilon_*^{-1/4} / n, \quad \theta = \gamma \varepsilon_*^{-1/4}, \quad \delta_* = \delta \varepsilon_*^{-1/2} \quad (2.11)$$

$$\Omega_* = \Omega \varepsilon_*^{-1} / \pi, \quad S = s^\circ / s_k, \quad \lambda_1 = \pi r / L$$

$$\varepsilon_* = hr / L^2 (1 - \nu^2)^{1/2}, \quad s_k = 0,74(1 - \nu^2)^{-5/8} (h/r)^{5/4} (r/L)^{1/2}$$

Тогда соотношения (2.9), (2.10) принимают вид

$$\Omega_* \omega^2 = \frac{\pi^2}{12} \rho^{-4} + \frac{1}{\pi^2} [(\rho^4 + 2\theta^2 \rho^2 - 3\theta^4) + 4\delta_* (-\theta^2 + \rho^2) + 4\delta_*^2] \quad (2.12)$$

$$\theta^3 + 3p\theta + 2q = 0, \quad p = \frac{1}{3}(\rho^2 + 2\delta_*), \quad q = -0,185\rho^2 S \quad (2.13)$$

Так как дискриминант этого уравнения $D = q^2 + p^3 > 0$, имеем один действительный корень

$$\begin{aligned} \theta = & (1,826\rho^2 S + \sqrt{3,562\rho^{-4} S^2 + (\rho^2 + 2\delta_*)^3 / 27})^{1/3} + \\ & + (1,826\rho^2 S - \sqrt{3,562\rho^{-4} S^2 + (\rho^2 + 2\delta_*)^3 / 27})^{1/3} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда при $S = 0$ получаем $\theta = 0$, а из равенства (2.12) – выражение для определения частоты свободно опертой ненагруженной оболочки ω_0 [6]:

$$\Omega_* \omega^2 = \frac{\pi^2}{12} \rho^{-4} + \frac{1}{\pi^2} (\rho^4 + 4\delta_* \rho^2 + 4\delta_*^2) \quad (2.15)$$

Учитывая, что для ненагруженной цилиндрической оболочки средней длины наименьшая частота определяется равенством [6]:

$$\Omega \omega_0^2(\rho_0) = 2\lambda_1^2 \varepsilon^{1/2}, \quad \rho_0^2 = \pi / 12^{1/4} \quad (n_0^2 = \lambda_1 \varepsilon^{-1/4}) \quad (2.16)$$

можно представить $\Omega_* \omega^2$ в следующем виде:

$$\Omega_* \omega^2 = 3^{-1/2} \omega^2 / \omega_0^2(\rho_0) \quad (2.17)$$

Кроме того, введем новую переменную N , определяемую выражением $N = \pi 12^{1/4} \rho^{-2}$ (при $\rho = \rho_0 N = 1$). Тогда равенства (2.12), (2.13) можно записать в следующей безразмерной форме:

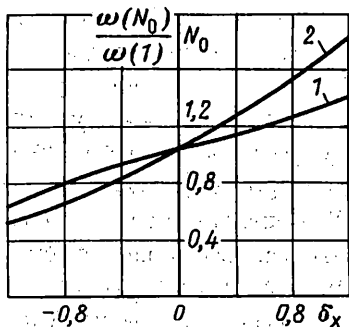
$$\begin{aligned} \omega^2(N) / \omega_0^2(1) = & 0,5[N^2 + N^{-2} + 1,185\theta^2 N^{-1} - 1,053\theta^4 + \\ & + \delta_*(2,37N^{-1} - 1,404\theta^2) + 1,404\delta_*^2], \quad \omega_0^2(1) = 2\lambda_1 \varepsilon^{-1/2} \Omega^{-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \theta = & (\sqrt{1,17S^2 N^2 + (1,688N^{-1} + 2\delta_*)^3 / 27} + 1,082SN)^{1/3} - \\ & - (\sqrt{1,17S^2 N^2 + (1,688N^{-1} + 2\delta_*)^3 / 27} - 1,082SN)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.19)$$

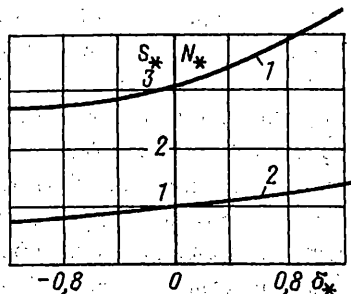
Подставляя равенство (2.19) в формулу (2.18), получаем выражение для определения безразмерной частоты как функции одной безразмерной переменной N и двух безразмерных параметров δ_* , S . Определяя наименьшее значение $\omega^2(N)$ в зависимости от N при фиксированных значениях δ_* , S , получаем соответствующую наименьшую частоту. При $S = 0$, согласно формуле (2.19), получаем $\theta = 0$. При этом (2.18) принимает вид

$$\omega^2(N) / \omega_0^2(1) = 0,5(N^2 + N^{-2} + 2,37\delta_* N^{-1} + 1,404\delta_*^2)$$

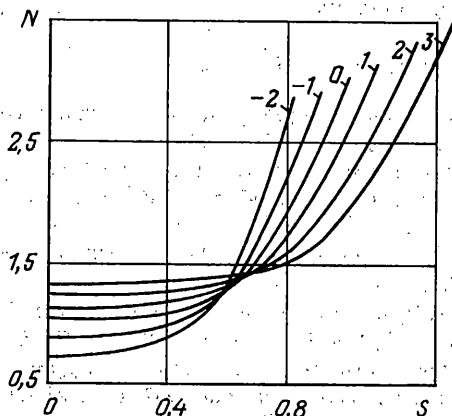
Это выражение исследовалось в [6], где приведены формулы и кривые (см. фиг. 1) для определения значений N_0 , реализующих наименьшую частоту (кривая 1) и $\omega(N_0) / \omega_0(1)$ (кривая 2) в зависимости от знака гауссовой кривизны и величины δ_* .



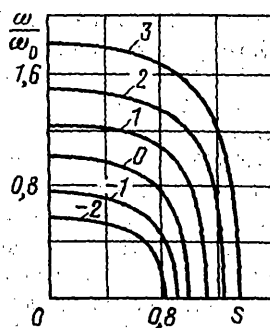
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из формул (2.9), (2.10) при $\omega = 0$ (см. [7]) получаем критические касательные усилия S_* и соответствующие критические значения N_* , при которых реализуются критические усилия. На фиг. 2 приведены кривая 1, соответствующая N_* в зависимости от δ_* , и кривая 2, соответствующая S_* .

На фиг. 3 даны графики изменения значений N , при которых реализуется минимальная частота, в зависимости от S при фиксированных значениях δ_* : $-0,8$; $-0,4$; 0 ; $0,4$; $0,8$; $1,2$. Соответствующие кривые обозначены $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

На фиг. 4 приведены кривые изменения безразмерной наименьшей частоты в зависимости от безразмерного предварительного напряжения S для различных δ_* (соответствующие кривые также обозначены $-2, -1, 0, 1, 2, 3$), при этом по оси ординат отложено отношение $\omega/\omega_0(1)$ ($\omega_0(1)$ – наименьшая частота ненагруженной цилиндрической оболочки, определяемая вторым равенством (2.18)), а по оси абсцисс – $S = s/s_*$ (s_* – характеризует критическое касательное напряжение для цилиндрической оболочки и определяется равенством (2.11)).

В работе [8] для цилиндрической оболочки ($\delta_* = 0$) приведена кривая наименьших значений отношения $\omega(n)/\omega_0(n)$ в зависимости от S , которая, вообще говоря, отличается от кривой наименьших значений частоты $\omega(n)$. Наименьшее значение $\omega(n)/\omega_0(n)$ реализуется независимо от значений S при $n = n_k$ (n_k – число волн, при котором происходит потеря устойчивости цилиндрической оболочки при кручении) [8], тогда как наименьшая частота $\omega(n)$ реализуется при $n = n(S)$. В данной работе, в частности,

для цилиндрической оболочки получена соответствующая кривая $N(S)$ (см. фиг. 3, $\delta_* = 0$). Отсюда видно, что n (при котором реализуется наименьшая частота) существенно образом зависит от S . Из фиг. 3 видно, что при изменении крутящего момента от нуля до своего критического значения, т.е. когда S изменяется в интервале $0 \leq S \leq S_*$, значение N , при котором реализуется наименьшая частота, находится в интервале $N_0 \leq N \leq N_*$, где N_0 – значение N , при котором реализуется наименьшая частота ненагруженной оболочки (см. фиг. 1); N_* – критическое значение N , при котором происходит потеря устойчивости рассматриваемых оболочек (см. фиг. 2). В частности, для цилиндрической оболочки ($\delta_* = 0$) имеем $0 \leq S \leq 1$, $1 \leq N \leq 3,02$.

Приведенные кривые на фиг. 3, 4 наглядно показывают, насколько существенно изменяются наименьшая частота и соответствующая форма волнообразования цилиндрической оболочки в зависимости от предварительно действующих касательных напряжений при малых изменениях формы оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даревский В.М. Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. М.: МИСИ, 1980. С. 35–45.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967. 984 с.
3. Товстик П.Е. К вопросу об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 9. С. 132–134.
4. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
5. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1961. 306 с.
6. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 121–126.
7. Кукуджанов С.Н. Об устойчивости оболочек вращения, близких к цилиндрическим, при одновременном действии кручения и давления // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 7. С. 56–62.
8. Никулин М.В. Собственные колебания цилиндрической оболочки, предварительно нагруженной крутящими моментами // Прочность цилиндрических оболочек. М.: Оборонгиз, 1959. С. 146–158.

Тбилиси

Поступила в редакцию
18.06.1998