

УДК 539.374

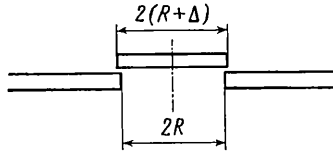
© 2000 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Н.Н. ЧИКАНОВА

### **УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛАСТИНЕ С ЗАПРЕССОВАННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ**

Техника соединения с натягом получила широкое распространение в промышленности [1]. В многих случаях полученные конструкции представляют из себя пластины с запрессованными включениями круговой или кольцевой формы. В рамках теории упругости теоретическое определение напряженно-деформированного состояния в таких конструкциях было выполнено, например, в [2]. В предположении упругопластического поведения материала большинство работ основано на деформационной теории пластичности или теории течения при условии Треска [3–13]. Кроме того, во многих работах предполагается, что давление задано в контуре отверстия (статически определяемая задача), что значительно упрощает исследование. Обзор решений статически определяемых задач содержится в [14]. Аналитические решения статически определяемой задачи известны и для упругопластического материала, подчиняющегося условию Мизеса [15, 16]. Однако, как отмечено в [3], наибольшую практическую важность представляют задачи с заданными кинематическими условиями на границе контакта пластины и включения.

Одним из существенных параметров, влияющих на работоспособность рассматриваемых конструкций, является температурное поле. Температурные эффекты для исследуемого класса задач были рассмотрены в [5, 7–9]. В этих работах предполагалось, что материал подчиняется условию текучести Треска. В публикуемой работе рассмотрен процесс совместного деформирования бесконечной пластины с круговым отверстием, в которое запрессована шайба, под действием равномерного, изменяющегося во времени температурного поля. Показаны две качественные особенности решения. По сравнению с процессом деформирования пластины под действием давления, приложенного к контуру отверстия, не происходит локального расплющивания кромки отверстия. Кроме того, радиус упругопластической границы стремительно увеличивается с ростом температуры (в разы при повышении температуры на доли градуса). Последнее обстоятельство имеет существенное значение как для инженерных приложений, так и для численных расчетов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную пластину с круговым отверстием радиуса  $R$ , в которое с некоторым натягом  $\Delta$ , запрессовывается сплошная шайба (фиг. 1). Материалы пластины и шайбы предполагаются различными, а их свойства независимыми от температуры. Величина натяга ограничена условием, согласно которому в момент запрессовки конструкция целиком находится в упругом состоянии. При наложении однородного, изменяющегося во времени температурного поля в пластине возникает пластическая деформация.



Фиг. 1

До появления пластической области в пластине напряженно-деформированное состояние определяется следующими выражениями при условии плосконапряженного состояния:

$$u_r^* = ur/R, \quad e_r^* = e_\theta^* = u/R, \quad e_z^* = \frac{2u(2\mu^* - 3K^*) + 9K^* R\alpha^* T}{R(4\mu^* + 3K^*)} \quad (1.1)$$

$$\sigma_r^* = \sigma_\theta^* = 18K^* \mu^* (u - R\alpha^* T) / [R(4\mu^* + 3K^*)]$$

$$u_r^0 = B/r, \quad -e_r^0 = e_\theta^0 = B/r^2, \quad e_z^0 = 9K\alpha T / (3K + 4\mu), \quad B = R(\Delta + u) \quad (1.2)$$

$$\sigma_r^0 = -2\mu \left( \frac{B}{r^2} + \frac{9K\alpha T}{3K + 4\mu} \right), \quad \sigma_\theta^0 = 2\mu \left( \frac{B}{r^2} - \frac{9K\alpha T}{3K + 4\mu} \right)$$

$$u = \frac{R}{9K^* \mu^* + \mu(3K^* + 4\mu^*)} \left[ 9K^* \mu^* \alpha^* T - \mu(3K^* + 4\mu^*) \left( \frac{\Delta}{R} + \frac{9K\alpha T}{3K + 4\mu} \right) \right] \quad (1.3)$$

Здесь величины со звездочкой относятся к искомым функциям и свойствам материала в области шайбы, а градус соответствует искомым функциям в упругой области пластины; обозначения свойств материала пластины не содержат индексов;  $u_r$  – радиальное перемещение;  $e_r, e_\theta, e_z$  – полные компоненты тензора деформаций;  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – компоненты тензора напряжений;  $\mu$  – модуль сдвига;  $K$  – объемный модуль;  $\alpha$  – коэффициент линейного термического расширения;  $T$  – приращение температуры от момента заpressовки;  $u$  – перемещение точек границы шайба – пластина.

Соотношения (1.1) и (1.2) справедливы до момента возникновения пластической области в пластине. Предположим, что материал пластины подчиняется критерию текучести Мизеса, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$s_r^2 + \sigma^2 - \sigma s_r = k^2, \quad s_r = \sigma_r - \sigma \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma$  – среднее напряжение,  $k$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Из (1.2) и (1.4) следует, что пластическая область начинает развиваться от контура отверстия  $r = R$  и условие ее возникновения определяется выражением

$$4\mu^2 \left( \frac{B}{R^2} + \frac{3K\alpha T^c}{3K + 4\mu} \right)^2 + \left( \frac{12\mu K\alpha T^c}{3K + 4\mu} \right)^2 - \frac{24\mu^2 K\alpha T^c}{(3K + 4\mu)} \left( \frac{B}{R^2} + \frac{3K\alpha T^c}{3K + 4\mu} \right) = k^2 \quad (1.5)$$

Величина  $u$ , входящая в выражение для  $B$ , должна быть определена из (1.3) при  $T = T^c$  и заданной величине натяга. Уравнение (1.5) может быть решено относительно критического приращения температуры  $T^c$ , соответствующей возникновению пластической деформации.

При наличии пластической области в пластине, общее решение остается в виде (1.1) в области шайбы и в виде (1.2) в упругой зоне пластины. Однако, величины  $u$  и  $B$  должны быть определены из условий на упругопластической границе и границе сопряжения шайбы с пластиной.

**2. Напряженное состояние в пластической области пластины.** Система уравнений, определяющих напряженное состояние в пластической области пластины, включает

уравнение равновесия

$$\partial\sigma_r/\partial r + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0 \quad (2.1)$$

условие текучести (1.4) и условие  $\sigma_z = 0$ . Уравнение (1.4) удовлетворяется подстановкой

$$s_r = 2k \sin \varphi / \sqrt{3}, \quad \sigma = k(\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi) / \sqrt{3} \quad (2.2)$$

Тогда, так как  $\sigma_z = \sigma + s_z = 0$  и  $s_r + s_\theta + s_z = 0$ , получим

$$s_\theta = \sigma_\theta - \sigma = k(\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi) / \sqrt{3} \quad (2.3)$$

Подстановка (2.2) и (2.3) в (2.1) дает

$$\partial\varphi/\partial r - [\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi] / [r(\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi)] = 0 \quad (2.4)$$

Пусть  $\varphi = \varphi_R$  при  $r = R$ , где  $\varphi_R$  зависит от температуры. Решения уравнения (2.4), удовлетворяющее этому условию, имеет вид

$$r/R = [(\sqrt{3} \sin \varphi_R - \cos \varphi_R) / (\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi)]^{1/2} \exp[\sqrt{3}(\varphi - \varphi_R)/2] \quad (2.5)$$

Таким образом, выражения (2.2), (2.3) и (2.5) определяют зависимость напряжений от температуры и радиуса в неявном виде.

**3. Деформированное состояние в пластической области пластины.** Полная деформация определяется как сумма упругой, температурной и пластической компонент

$$e = e^e + e^T, \quad \xi_r = \xi_r^e + \xi_r^p, \quad \xi_\theta = \xi_\theta^e + \xi_\theta^p, \quad \xi_z = \xi_z^e + \xi_z^p \quad (3.1)$$

Здесь  $e$  – средняя деформация,  $\xi_r, \xi_\theta, \xi_z$  – компоненты девиатора тензора деформаций. Суммарная упругая и температурная деформация следует из закона Гука и известного распределения напряжений

$$e = \sigma / K + 3\alpha T = k(\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi) / (\sqrt{3}K) + 3\alpha T \quad (3.2)$$

$$\xi_r^e = s_r / (2\mu) = k \sin \varphi / (\sqrt{3}\mu), \quad \xi_\theta^e = s_\theta / (2\mu) = k(\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi) / (2\sqrt{3}\mu)$$

$$\xi_z^e = s_z / (2\mu) = k(\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi) / (2\sqrt{3}\mu) \quad (3.3)$$

Компоненты скорости пластических деформаций  $\epsilon_r^p, \epsilon_\theta^p, \epsilon_z^p$ , которые, вследствие равенства нулю средней пластической деформации, равны соответствующим компонентам девиатора  $\eta_r^p, \eta_\theta^p, \eta_z^p$ , определяются из ассоциированного закона течения

$$\eta_r^p = \lambda s_r, \quad \eta_\theta^p = \lambda s_\theta, \quad \eta_z^p = \lambda s_z \quad (3.4)$$

При малых деформациях девиаторные компоненты скорости упругих деформаций  $\eta_r^e, \eta_\theta^e, \eta_z^e$  могут быть определены в виде  $\partial\xi_r^e/\partial t = \eta_r^e, \partial\xi_\theta^e/\partial t = \eta_\theta^e, \partial\xi_z^e/\partial t = \eta_z^e$ . Чтобы вычислить эти величины из (3.3), отметим, что  $\varphi_R = \varphi_R(t)$  и, следовательно, производная  $\partial\varphi/\partial t$  определяется из (2.5) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\Phi(\varphi_R)}{\Phi(\varphi)} \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (3.5)$$

$$\Phi(\delta) = (\sqrt{3} \cos \delta - \sin \delta) / (\cos \delta - \sqrt{3} \sin \delta)$$

Далее, дифференцируя (3.3), с учетом (3.5), найдем

$$\begin{aligned}\eta_r^e &= \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{3}\mu} \frac{\Phi(\varphi_R)}{\Phi(\varphi)} \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt} \\ \eta_\theta^e &= -\frac{k(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)}{2\sqrt{3}\mu} \frac{\Phi(\varphi_R)}{\Phi(\varphi)} \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt} \\ \eta_z^e &= \frac{k(\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi)}{2\sqrt{3}\mu} \frac{\Phi(\varphi_R)}{\Phi(\varphi)} \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt}\end{aligned}\quad (3.6)$$

В рассматриваемом случае полные радиальные и окружные скорости деформаций представимы в форме  $\varepsilon_r = \partial^2 u_r / \partial r \partial \varphi_R$ ,  $\varepsilon_\theta = r^{-1} \partial u_r / \partial t$  или, переходя к дифференцированию по  $\varphi_R$ :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi_R} \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial \varphi_R} \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (3.7)$$

Так как пластические компоненты тензора деформаций подчиняются условию несжимаемости, то девиаторные составляющие скоростей деформаций могут быть получены из (3.7) и продифференцированного по времени выражения (3.2):

$$\begin{aligned}\eta_r &= \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi_R} - \frac{k(\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) \Phi(\varphi_R)}{3\sqrt{3}K\Phi(\varphi)} - \alpha \frac{dT}{d\varphi_R} \right] \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt} \\ \eta_\theta &= \left[ r^{-1} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi_R} - \frac{k(\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) \Phi(\varphi_R)}{3\sqrt{3}K\Phi(\varphi)} - \alpha \frac{dT}{d\varphi_R} \right] \frac{d\varphi_R}{dT} \frac{dT}{dt}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Подставляя соотношения (3.8) и (3.6) в (3.1), выразим пластические компоненты девиатора скоростей деформаций и подставим их в первые два уравнения ассоциированного закона течения (3.4). После исключения  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi_R} - \frac{2 \sin \varphi}{r(\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi)} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi_R} &= \\ &= \frac{k\Phi(\varphi_R)}{\Phi^2(\varphi)} \left[ \frac{\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi}{3K} + \frac{\sqrt{3}\alpha\Phi(\varphi)}{k\Phi(\varphi_R)} + \frac{dT}{d\varphi_R} + \frac{1}{\mu(\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi)} \right]\end{aligned}\quad (3.9)$$

Для интегрирования уравнения (3.9) удобно перейти к новым независимым переменным  $\varphi = \varphi(\varphi_R, r)$ ,  $\varphi'_R = \varphi_R$ . Из (2.5) следует

$$\partial \varphi / \partial r = [r\Phi(\varphi)]^{-1} \quad (3.10)$$

Полагая, что  $u_r = u_r(\varphi, \varphi'_R)$  и  $v_r = \partial u_r / \partial \varphi_R$ , с учетом (3.10), найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{2v_r \sin \varphi}{\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi} &= \\ &= \frac{kr\Phi(\varphi_R)}{\Phi(\varphi)} \left[ \frac{\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi}{3K} + \frac{\sqrt{3}\alpha\Phi(\varphi)}{k\Phi(\varphi_R)} \frac{dT}{d\varphi_R} + \frac{1}{\mu(\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi)} \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

Общее решение уравнения (3.11) имеет вид

$$v_r = C[(\sqrt{3} \sin \varphi_R - \cos \varphi_R)/(\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi)]^{1/2} \exp[\sqrt{3}(\varphi_R - \varphi)/2] \quad (3.12)$$

$$c = kR\Phi(\varphi_R) \left\{ \int_{\varphi_R}^{\varphi} \left[ \frac{(\cos \delta - \sqrt{3} \sin \delta)^2}{3K} + \frac{1}{\mu} \right] \frac{\exp[\sqrt{3}(\delta - \varphi_R)]}{\sqrt{3} \cos \delta - \sin \delta} d\delta + \right. \\ \left. + \frac{\exp[\sqrt{3}(\varphi - \varphi_R)] - 1}{k\Phi(\varphi_R)} \frac{d(\alpha T)}{d\varphi_R} \right\} + v_r(\varphi_R)$$

Так как  $v_r = \partial u_r / \partial \varphi_R = (\partial u_r / \partial \varphi)(\partial \varphi / \partial \varphi_R) + \partial u_r / \partial \varphi'_R$ , то из (3.12) следует

$$\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\Phi(\varphi_R)}{\Phi(\varphi)} + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi'_R} = v_r = \Pi(\varphi_R, \varphi) \Phi(\varphi_R) \quad (3.13)$$

$$\Pi(\varphi_R, \varphi) = kR \left( \frac{\sqrt{3} \sin \varphi_R - \cos \varphi_R}{\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi} \right)^{1/2} \exp[\sqrt{3}(\varphi_R - \varphi)/2] \times \\ \times \int_{\varphi_R}^{\varphi} \left[ \frac{(\cos \delta - \sqrt{3} \sin \delta)^2}{3K} + \frac{1}{\mu} \right] \frac{\exp[\sqrt{3}(\delta - \varphi_R)]}{(\sqrt{3} \cos \delta - \sin \delta)} d\delta + \\ + \frac{\exp[\sqrt{3}(\varphi - \varphi_R)] - 1}{k\Phi(\varphi_R)} \frac{d(\alpha T)}{d\varphi_R} + \frac{v_r(\varphi_R)}{kR\Phi(\varphi_R)}$$

Характеристики этого уравнения будут

$$(\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi)/(\sqrt{3} \sin \varphi_R - \cos \varphi_R) = \exp[\sqrt{3}(\varphi - \varphi_R)]/C_1 \quad (3.14)$$

Здесь  $C_1$  – постоянная величина вдоль каждой характеристики. Соотношение вдоль характеристик может быть представлено в виде

$$u_r = \int \Phi(\varphi_R) \Pi(\varphi_R, \varphi) d\varphi_R + C_2 \quad (3.15)$$

В этом выражении  $\varphi$  является функцией  $\varphi_R$ , которая должна быть определена из (3.14), и  $C_2 = \text{const}$  для данного значения  $C_1$ .

При известной функции  $u_r = u_r(\varphi_R, \varphi)$  полные деформации могут быть получены путем дифференцирования и, далее, пластические деформации определяются из (3.1) с учетом (3.3). Таким образом, общее решение, описывающее напряженно-деформированное состояние в конструкции, построено.

**4. Начальные и краевые условия.** Вычисленное из (1.5) значение  $T^c$  позволяет получить напряженное состояние в пластине при  $r = R$  в момент начала пластического течения из соотношений (1.2). При этом напряженном состоянии начальное значение  $\varphi_R = \varphi_{R0}$  определяется из (2.2). Пусть на упругопластической границе  $r = \gamma$  величина  $\varphi = \varphi_\gamma$ . Очевидно, что в момент начала пластического течения  $\gamma = R$  и  $\varphi_\gamma = \varphi_{R0}$ . Следуя обычным предположениям, положим, что материал в упругой области на упругопластической границе находится на пределе текучести. Тогда статические краевые условия примут вид

$$\sigma_r^* - \sigma_r^p = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (4.1)$$

$$\sigma_r^p - \sigma_r^0 = 0 \quad \text{при} \quad r = \gamma \quad (4.2)$$

$$\sigma_\theta^p - \sigma_\theta^0 = 0 \quad \text{при} \quad r = \gamma \quad (4.3)$$

Здесь знак  $(p)$  соответствует искомым функциям в пластической области пластины. Подставляя выражения для напряжений (1.1) и (2.2) в (4.1), получим величину  $u$ :

$$u = kR(4\mu^* + 3K^*)(\sqrt{3} \sin \varphi_R + \cos \varphi_R)/(18\mu^* K^*) + \alpha^* TR \quad (4.4)$$

Из (1.2), (2.2) и краевых условий (4.2) и (4.3) следуют уравнения

$$k(\sqrt{3} \sin \varphi_\gamma + \cos \varphi_\gamma) + 2\mu[B/\gamma^2 + 9K\alpha T/(4\mu + 3K)] = 0 \quad (4.5)$$

$$k \cos \varphi_\gamma - \mu[B/\gamma^2 - 9K\alpha T/(4\mu + 3K)] = 0$$

Величина  $\gamma$  определяется из (2.5):

$$\gamma/R = [(\sqrt{3} \sin \varphi_R - \cos \varphi_R)/(\sqrt{3} \sin \varphi_\gamma - \cos \varphi_\gamma)]^{1/2} \exp[\sqrt{3}(\varphi_\gamma - \varphi_R)/2] \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что  $\gamma \rightarrow \infty$  если  $\varphi_\gamma = \pi/6 \pm \pi i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). В [15] показано, что при расширении кругового отверстия в бесконечной пластине под действием равномерного давления при плоско-напряженном состоянии радиус упругопластической границы ограничен величиной  $R \exp(\sqrt{3}\pi/6)/\sqrt{2}$ . При дальнейшем увеличении давления материал начинает расплющиваться вблизи контура отверстия и исследование не может быть продолжено в предположении плосконапряженного состояния. Наличие температурного поля изменяет качественное поведение решения, снимая отмеченное ограничение на радиус упругопластической границы. Это связано с тем, что напряжения не обращаются в нуль при  $r \rightarrow \infty$ , как следует из (1.2).

Из (4.5) с помощью (4.6) могут быть получены выражения для  $B$  и  $\alpha T$ :

$$B = kR^2(\cos \varphi_R - \sqrt{3} \sin \varphi_R) \exp[\sqrt{3}(\varphi_\gamma - \varphi_R)]/(4\mu) \quad (4.7)$$

$$\alpha T = -k(3K + 4\mu)(\sin \varphi_\gamma + \sqrt{3} \cos \varphi_\gamma)/(12\sqrt{3}\mu K)$$

Откуда

$$\alpha \frac{dT}{d\varphi_R} = \frac{k(2K + 4\mu)}{12\sqrt{3}\mu K} (\sqrt{3} \sin \varphi_\gamma - \cos \varphi_\gamma) \frac{d\varphi_\gamma}{d\varphi_R} \quad (4.8)$$

Кинематические краевые условия имеют вид

$$u_r^* + \Delta = u_r^p \quad \text{при} \quad r = R \quad (4.9)$$

$$u_r^p - u_r^0 = 0 \quad \text{при} \quad r = \gamma \quad (4.10)$$

Дифференцируя условия (4.9) и (4.10) по  $\varphi_R$ , получим

$$du_r^*/d\varphi_R = du_r^p/d\varphi_R \quad \text{при} \quad r = R \quad (4.11)$$

$$du_r^p/d\varphi_R = du_r^0/d\varphi_R \quad \text{при} \quad r = \gamma \quad (4.12)$$

По определению  $v_r = du_r^p/d\varphi_R$  при  $r = R$ . Поэтому, (4.11), после подстановки (4.4) в выражение для  $u_r^*$  в (1.1) и исключения  $T$  с помощью (4.8), может быть переписано в виде

$$v_r(\varphi_R) = \frac{kR}{6} \left[ \frac{(3K^* + 4\mu^*)}{3K^*\mu^*} (\sqrt{3} \cos \varphi_R - \sin \varphi_R) + \frac{(3K + 4\mu)\alpha^*}{2\sqrt{3}K\mu\alpha} (\sqrt{3} \sin \varphi_\gamma - \cos \varphi_\gamma) \frac{d\varphi_\gamma}{d\varphi_R} \right] \quad (4.13)$$

Тогда функция  $\Pi(\varphi_R, \varphi)$  в (3.13), с учетом (4.8) и (4.13), представима в форме

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi_R, \varphi) = & \left( \frac{\cos \varphi_R - \sqrt{3} \sin \varphi_R}{\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\varphi_R - \varphi) \right] \frac{kR}{6\Phi(\varphi_R)} \times \\ & \times \left\{ 6\Phi(\varphi_R) \int_{\varphi_R}^{\varphi} \frac{\exp[\sqrt{3}(\delta - \varphi_R)]}{(\sqrt{3} \cos \delta - \sin \delta)} \left[ \frac{(\cos \delta - \sqrt{3} \sin \delta)^2}{3K} + \frac{1}{\mu} \right] d\delta + \right. \\ & + \frac{(4\mu^* + 3K^*)}{3K^*\mu^*} (\sqrt{3} \cos \varphi_R - \sin \varphi_R) + \frac{(4\mu + 3K)}{2\sqrt{3}K\mu} (\sqrt{3} \sin \varphi_\gamma - \cos \varphi_\gamma) \times \\ & \left. \times [\exp(\sqrt{3}(\varphi - \varphi_R)) - 1 + \alpha^* / \alpha] \frac{d\varphi_\gamma}{d\varphi_R} \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (1.2) следует, что  $u_r^0 = B/\gamma$  при  $r = \gamma$ . Подставляя сюда (4.6) и (4.7) и дифференцируя по  $\varphi_R$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{du_r^0}{d\varphi_R} = & \frac{kR}{4\mu} \left( \frac{\cos \varphi_\gamma - \sqrt{3} \sin \varphi_\gamma}{\cos \varphi_R - \sqrt{3} \sin \varphi_R} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\varphi_\gamma - \varphi_R) \right] \times \\ & \times \left[ \sin \varphi_R - \sqrt{3} \cos \varphi_R + \frac{2 \sin \varphi_\gamma (\sqrt{3} \sin \varphi_R - \cos \varphi_R)}{(\cos \varphi_\gamma - \sqrt{3} \sin \varphi_\gamma)} \frac{d\varphi_\gamma}{d\varphi_R} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

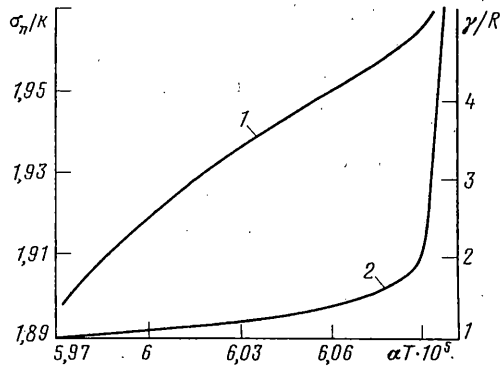
Далее, подставляя (3.13) с учетом (4.14) и (4.15) в (4.12) при  $r = \gamma$ , получим дифференциальное уравнение, связывающее  $\varphi_R$  и  $\varphi_\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_\gamma}{d\varphi_R} \left\{ \frac{(4\mu + 3K)}{6\sqrt{3}K\mu} (\cos \varphi_\gamma - \sqrt{3} \sin \varphi_\gamma) \left[ \exp(\sqrt{3}(\varphi_\gamma - \varphi_R)) - 1 + \frac{\alpha^*}{\alpha} \right] - \right. \\ \left. - \sin \varphi_\gamma \exp[\sqrt{3}(\varphi_\gamma - \varphi_R)] \mu \right\} = 2\Phi(\varphi_R) \int_{\varphi_R}^{\varphi_\gamma} \frac{\exp[\sqrt{3}(\delta - \varphi_R)]}{(\sqrt{3} \cos \delta - \sin \delta)} \times \\ \times \left[ \frac{(\cos \delta - \sqrt{3} \sin \delta)^2}{3K} + \frac{1}{\mu} \right] d\delta - \exp[\sqrt{3}(\varphi_\gamma - \varphi_R)] \times \\ \times \frac{(\cos \varphi_\gamma - \sqrt{3} \sin \varphi_\gamma)(\sin \varphi_R - \sqrt{3} \cos \varphi_R)}{2\mu(\cos \varphi_R - \sqrt{3} \sin \varphi_R)} + \frac{(4\mu^* + 3K^*)}{9K^*\mu^*} (\sqrt{3} \cos \varphi_R - \sin \varphi_R) \end{aligned} \quad (4.16)$$

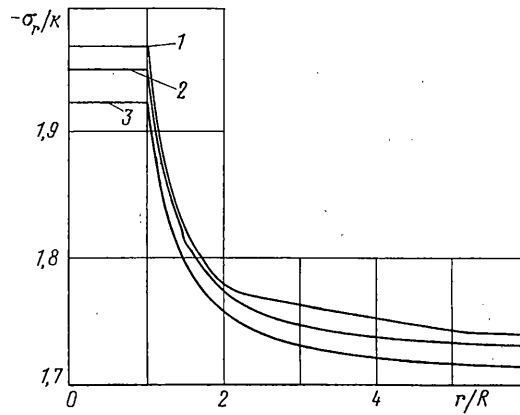
которое должно быть решено при краевом условии  $\varphi_R = \varphi_\gamma = \varphi_{R0}$ .

Из (3.14) видно, что на плоскости  $\varphi\varphi_R$  прямая  $\varphi = \varphi_R$  является характеристикой, которой соответствует значение  $C_1 = 1$ . Таким образом, на границе шайба – пластина не могут быть заданы краевые условия для  $u_r$ . Следовательно, величина  $C_2$  в (3.15) должна быть определена из условия (4.10) на упругопластической границе в пластине, что на плоскости  $\varphi\varphi_R$  соответствует линии  $\varphi = \varphi_\gamma(\varphi_R)$ . Так как из (1.2) следует, что  $u_r^0 = B/r$ , то из (4.6) и (4.7) на упругопластической границе получим

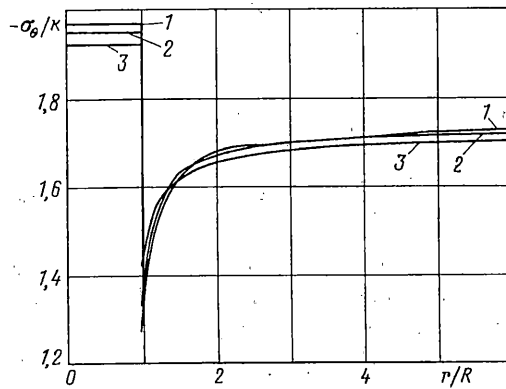
$$u_{r\gamma}^0 = \frac{kR}{4\mu} (\cos \varphi_R - \sqrt{3} \sin \varphi_R) \left( \frac{\cos \varphi_\gamma - \sqrt{3} \sin \varphi_\gamma}{\cos \varphi_R - \sqrt{3} \sin \varphi_R} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} (\varphi_\gamma - \varphi_R) \right] \quad (4.17)$$



Фиг. 2

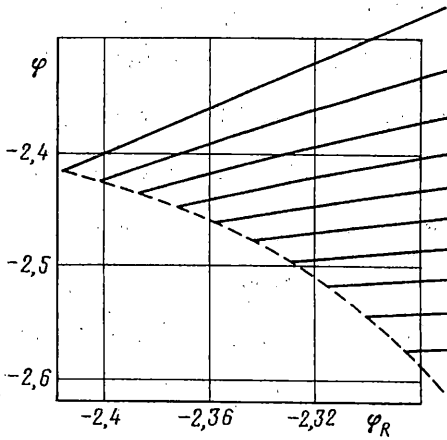


Фиг. 3

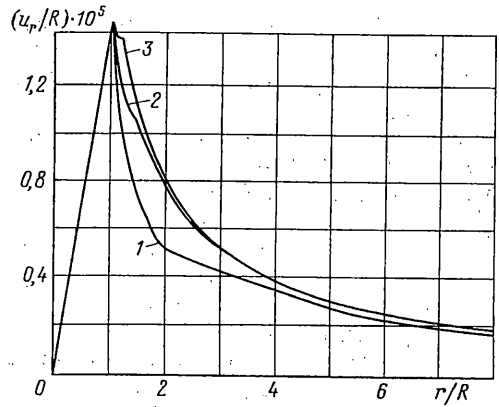


Фиг. 4





Фиг. 5



Фиг. 6

Тогда (3.15), с учетом (4.10), может быть представлено в виде

$$u_r = \int_{\varphi_{R\gamma}}^{\varphi_R} \Phi(\delta) \Pi[\delta, \varphi(\delta)] d\delta + u_{r\gamma}^0 \quad (4.18)$$

Для каждой характеристики, определяемой различными значениями  $C_1$  в (3.14), величина  $\varphi_{R\gamma}$  является значением  $\varphi_R$  в точке пересечения этой характеристики с кривой  $\varphi = \varphi_r(\varphi_R)$  на плоскости  $\varphi\varphi_R$ , а соответствующая этим значениям  $\varphi_R$  и  $\varphi_\gamma$  величина  $u_{r\gamma}^0$  вычисляется из (4.17).

**5. Пример.** Рассмотрим конструкцию, состоящую из стальной шайбы в алюминиевой пластине. Механические и физические свойства материалов приведены в [17]:  $\alpha/\alpha^* = 1,56$ ;  $\mu/\mu^* = 0,322$ ;  $K/K^* = 0,43$ ;  $k/K = 0,05 \cdot 10^{-3}$ ;  $\mu/K = 0,346$ . В расчетах величина натяга была принята  $\Delta = 0$ . Численное интегрирование уравнения (4.16) и подстановка результатов в (1.1), с учетом (4.4), (4.6) и (4.7), позволяют определить контактное давление  $\sigma_n$  на границе сопряжения шайбы и пластины и радиус упругопластической границы как функции температуры (фиг. 2; где 1 – контактное давление, 2 – радиус упругопластической границы). Распределение нормальных напряжений по радиусу (фиг. 3 и 4; 1 соответствует  $\alpha T \cdot 10^5 = 6,096$ ; 2 –  $\alpha T \cdot 10^5 = 6,065$ ; 3 –  $\alpha T \cdot 10^5 = 6,007$ ) определяется из (1.1), с учетом (4.4), во включении, из (1.2), с учетом (4.7), в упругой области пластины и из (2.2), (2.3), с учетом (2.5), в пластической области пластины. Численное интегрирование в (4.18) дает распределение  $u_r$  вдоль характеристик (3.14), сетка которых показана на фиг. 5. Штриховая линия соответствует функции  $\varphi_\gamma = \varphi_r(\varphi_R)$ . Эти результаты и (2.5) позволяют получить распределение перемещений по радиусу для различных значений  $\alpha T$  (фиг. 6; 1 соответствует  $\alpha T \cdot 10^5 = 6,096$ ; 2 –  $\alpha T \cdot 10^5 = 6,065$ ; 3 –  $\alpha T \cdot 10^5 = 6,007$ ). Из фиг. 2 видно, что когда радиус упругопластической границы достигает величины, большей чем  $5 \cdot R$ , температура повышается от момента начала пластического течения только на доли градуса (при  $\alpha \approx 24 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ). Таким образом, предположение о независимости свойств материала от температуры в рассматриваемом процессе вполне обосновано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Potter R.M., Ting T.W.* The problem of forced fitting. Part 1 The loading process // *Arch. Rat. Mech. Analys.* 1975. V. 58. No. 1. P. 77–94.
2. *Kirchner H.O.* Radially inhomogeneous sheets under stress // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1995. V. 117. No. 4. P. 1065–1067.
3. *Ball D.L.* Elastic-plastic stress analysis of cold expanded fastener holes // *Fat. Fract. Engng Mater. Struct.* 1995. V. 18. No. 1. P. 47–63.
4. *Guven U.* The shrink fit with elastic-plastic hub exhibiting variable thickness // *Acta Mech.* 1991. V. 89. No. 1. P. 65–72.
5. *Lippmann H.* The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // *Int. J. Plasticity.* 1992. V. 8. No. 7. P. 567–582.
6. *Gamer U.* A concise treatment of the shrink fit with elastic-plastic hub // *Int. J. Solid. Struct.* 1992. V. 29. No. 20. P. 2463–2469.
7. *Mack W.* Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // *Arch. Appl. Mech.* 1993. V. 63. No. 1. P. 42–50.
8. *Bengeri M., Mack W.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mech.* 1994. V. 103. No. 1–4. P. 243–257.
9. *Mack W., Bengeri M.* Thermal assembly of an elastic-plastic shrink fit with solid inclusion // *Int. J. Mech. Sci.* 1994. V. 36. No. 8. P. 699–705.
10. *Gamer U.* Die elastisch-plastische Scheibe mit druckbelasteter Bohrung // *Forschung im Ingenieurwesen.* 1988. V. 54. No. 3. P. 94–98.
11. *Hsu Y.C., Forman R.G.* Elastic-plastic analysis of an infinite sheet having a circular hole under pressure // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1975. V. 42. No. 2. P. 347–352.
12. *Gamer U.* Die Restspannungen in der Umgebung der kalt verfestigten Bohrung // *Forschung im Ingenieurwesen.* 1987. V. 53. No. 4. P. 118–120.
13. *Guven U.* Elastic-plastic annular disk with variable thickness subjected to external pressure // *Acta Mech.* 1992. V. 92. No. 1–4. P. 29–34.
14. *Gamer U.* On the quasi-analytical solutions of the elastic-plastic problems with nonlinear hardening // *Advances in Continuum Mechanics / Eds O. Brueller, H. Lippmann.* Berlin: Springer, 1991. 168–177 p.
15. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
16. *Geiringer H.* Ideal plasticity // *Encyclopedia of Physics.* Ed. S. Flugge. V. 6a/3. Mechanics of solids / Ed. C. Truesdell. Berlin: Springer, 1973. 403–533 p.
17. *Lynch C.T.* Practical handbook of materials science. Boca Raton: CRC Press, 1989. 636 p.

Москва

Поступила в редакцию  
1.07.1996