МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. М.У. НИКАБАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ДВУМЯ БАЗОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Для решения задач механики слоистых композитов во многих случаях удобно вводить две базовые поверхности в теории оболочек, для чего и предпринято настоящее исследование.

1. Параметризация пространства оболочки. Эта параметризация характеризуется заданием радиус-вектора произвольной точки пространства оболочки в виде [1]:

$$\mathbf{r}(x^1,x^2,x^3) = (1-x^3)\mathbf{r}^-(x^1,x^2) + x^3\mathbf{r}^+(x^1,x^2) = \mathbf{r}^-(x^1,x^2) + x^3\mathbf{h}(x^1,x^2) \tag{1.1}$$

где $x^3 \in [0, 1]$, $\mathbf{r}^- = \mathbf{r}^-(x^1, x^2)$ и $\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^+(x^1, x^2)$ задают соответственно внутреннюю и внешнюю базовые поверхности пространства оболочки, а вектор

$$\mathbf{h}(x^1,x^2) = \mathbf{r}^+(x^1,x^2) - \mathbf{r}^-(x^1,x^2)$$

отображающий внутреннюю базовую поверхность σ_0^- на внешнюю σ_1^+, вообще говоря, не перпендикулярен к базовым поверхностям.

Определяемые на основании (1.1) порождающие упомянутую выше параметризацию тройки векторов $\mathbf{r}_p$ и $\mathbf{r}^q$ в произвольной точке ($\sigma_g^{x^3}$ -базисы) представляются через тройки векторов $\mathbf{r}_{m^-}, \mathbf{r}^{m^-}$ и $\mathbf{r}_{m^+}, \mathbf{r}^{n^+}$ в соответствующих точках на внутренней и внешней базовых поверхностях ($\sigma_{g^-}^-$ - и $\sigma_{g^+}^+$ -базисы) следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_p = g_p^{m^-}\mathbf{r}_{m^-} = g_{pm^-}\mathbf{r}^{m^-} = g_p^{m^+}\mathbf{r}_{m^+} = g_{pm^+}\mathbf{r}^{m^+}\\ \mathbf{r}^q = g^{qn^-}\mathbf{r}_{n^-} = g_{n^-}^{q}\mathbf{r}^{n^-} = g^{qn^+}\mathbf{r}_{n^+} = g_{n^+}^{q}\mathbf{r}^{n^+}\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}g_k^{l^-} = (1-x^3)g_{k^-}^{l^-} + x^3 g_{k^+}^{l^-}, \quad g_{kl^-} = (1-x^3)g_{k^-l^-} + x^3 g_{k^+l^-}\\ g_{l^-}^{k} = ½\ (\vartheta^-)^{-1}\varepsilon^{kmn}\varepsilon_{lpq}g_m^{p^-}g_n^{q^-}, \quad g^{kl^-} = ½\ (\vartheta^-)^{-1}\varepsilon^{kmn}\varepsilon_{spq}g_m^{p^-}g_n^{q^-}g^{s^-l^-}\\ g_k^{l^+} = (1-x^3)g_{k^-}^{l^+} + x^3 g_{k^+}^{l^+}, \quad g_{kl^+} = (1-x^3)g_{k^-l^+} + x^3 g_{k^+l^+}\\ g_{l^+}^{k} = ½\ (\vartheta^+)^{-1}\varepsilon^{kmn}\varepsilon_{lpq}g_m^{p^+}g_n^{q^+}, \quad g^{kl^+} = ½\ (\vartheta^+)^{-1}\varepsilon^{kmn}\varepsilon_{spq}g_m^{p^+}g_n^{q^+}g^{s^+l^+}\end{gathered} \tag{1.3}$$

и, следовательно

$$\vartheta^- = \sqrt{g(g^-)^{-1}}, \quad \vartheta^+ = \sqrt{g(g^+)^{-1}}, \quad \sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$$
$$\sqrt{g^-} = (\mathbf{r}_{1^-} \times \mathbf{r}_{2^-}) \cdot \mathbf{r}_{3^-}, \quad \sqrt{g^+} = (\mathbf{r}_{1^+} \times \mathbf{r}_{2^+}) \cdot \mathbf{r}_{3^+} \tag{1.4}$$

Нетрудно усмотреть, что (1.3) представляют собой компоненты единичного тензора второго ранга [2, 3] и поэтому в отличие от названий, принятых для аналогичных величин, например, в [4], будем их называть компонентами переноса этого тензора. Кроме того, в случае принятия в качестве основной базовой внутренней (внешней) поверхности основными компонентами будем называть компоненты $g_{p^- q^-}, g_{p^-}^{q^-}, g^{p^- q^-}$ $(g_{p^+ q^+}, g_{p^+}^{q^+}, g^{p^+ q^+})$ и компоненты переноса $g_{p^+ q^-}, g_{p^+}^{q^-} (g_{p^- q^+}, g_{p^-}^{q^+})$, так как в рассматриваемом случае большинство объектов теории оболочек выражаются через них. В частности, это видно и из соотношений (1.3).

Легко усмотреть, что на основании второго соотношения (1.2) с учетом соответствующих соотношений (1.3) получаем[1]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}^K = (\vartheta^-)^{-1} \varepsilon^{KM} \varepsilon_{LP} g_M^{P^-} \mathbf{r}^{L^-} = (\vartheta^+)^{-1} \varepsilon^{KM} \varepsilon_{LP} g_M^{P^+} \mathbf{r}^{L^+} \\
&\mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{3^-} - g_K^{3^-} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^{3^-} - (\vartheta^-)^{-1} g_K^{3^-} \varepsilon^{KM} \varepsilon_{LP} g_M^{P^-} \mathbf{r}^{L^-} = \\
&= \mathbf{r}^{3^-} + g_{N^-}^3 \mathbf{r}^{N^-} = \mathbf{r}^{3^+} + g_{N^+}^3 \mathbf{r}^{N^+} = \mathbf{r}^{3^+} - g_K^{3^+} \mathbf{r}^K = \\
&= \mathbf{r}^{3^+} - (\vartheta^+)^{-1} g_K^{3^+} \varepsilon^{KM} \varepsilon_{LP} g_M^{P^+} \mathbf{r}^{L^+}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Кинематическая гипотеза. Рассматриваются две конфигурации пространства оболочки: отсчетная и актуальная[2].

Радиус-вектор произвольной точки пространства оболочки в актуальной конфигурации задается соотношением (1.1), а в отсчетной – в виде следующего соотношения

$$\mathbf{r}^\circ(x^1, x^2, x^3) = (1 - x^3)\mathbf{r}^{\circ -}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{r}^{\circ +}(x^1, x^2) = \mathbf{r}^-(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{h}^{\circ +}(x^1, x^2) \tag{2.1}$$

где вектор $\mathbf{h}^\circ(x^1, x^2) = \mathbf{r}^{\circ +}(x^1, x^2) - \mathbf{r}^{\circ -}(x^1, x^2)$, отображающий внутреннюю базовую поверхность $\sigma_0^{\circ -}$ на внешнюю $\sigma_1^{\circ +}$, считается перпендикулярным к внутренней базовой поверхности $(\mathbf{h}^\circ \perp \sigma_0^{\circ -})$, а $x^3 \in [0,1]$.

В рассматриваемом варианте теории оболочек кинематическая гипотеза заключается в следующем: *точка отсчетной конфигурации пространства оболочки с радиус-вектором* (2.1) *в актуальной конфигурации займет положение, определяемое радиус-вектором* (1.1).

Теперь легко усмотреть, что вектор перемещения произвольной точки пространства оболочки представляется посредством векторов перемещений соответствующих

---

[1] При изложении материала применяются обычные правила тензорного исчисления [2–4]. В основном, сохранены обозначения и соглашения, принятые в ранее опубликованных работах. В частности, используются прописные и строчные латинские индексы. При этом прописные латинские индексы пробегают значения 1, 2, а строчные – 1, 2, 3.

[2] Величины, символы, компоненты тензоров, а иногда и тензоры, относящиеся к отсчетной конфигурации, снабжаются градусом (те же самые объекты в ранее опубликованных работах автора и других авторов, например [1, 2, 5, 6], снабжаются знаком градуса или ноликом сверху), а к актуальной конфигурации, пишутся без градуса (знака градуса или нолика). Причем индексные обозначения частично согласованы с [7].

точек внутренней и внешней базовых поверхностей в следующем виде [1]:

$$\mathbf{u}(x^1,x^2,x^3)=(1-x^3)\mathbf{u}^-(x^1,x^2)+x^3\mathbf{u}^+(x^1,x^2) \tag{2.2}$$

Теперь введем следующие обозначения

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}\equiv h^{-1}\mathbf{h}=\sqrt{(g_{3^-3^-})^{-1}}\mathbf{r}_{3^-}=\sqrt{(g_{33})^{-1}}\mathbf{r}_3=\sqrt{(g_{3^+3^+})^{-1}}\mathbf{r}_{3^+},\quad \mathbf{n}^-\equiv\sqrt{(g^{3^-3^-})^{-1}}\mathbf{r}^{3^-}\\
\mathbf{n}\equiv\sqrt{(g^{33})^{-1}}\mathbf{r}^3,\quad \mathbf{n}^+\equiv\sqrt{(g^{3^+3^+})^{-1}}\mathbf{r}^{3^+}\\
h\equiv\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}=|\mathbf{h}|=\sqrt{g_{3^-3^-}}=\sqrt{g_{33}}=\sqrt{g_{3^+3^+}}\\
h^-\equiv\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}^-,\quad \hat{h}\equiv\mathbf{h}\cdot\mathbf{n},\quad h^+\equiv\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}^+\\
w_{(e)}\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{e},\quad w^{\pm}_{(e)}\equiv\mathbf{u}^{\pm}\cdot\mathbf{e},\quad w\equiv w_{(n^-)}\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}^-\\
w^{\pm}\equiv w^{\pm}_{(n^-)}\equiv\mathbf{u}^{\pm}\cdot\mathbf{n}^-,\quad \hat{w}\equiv w_{(n)}\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\\
\hat{w}^{\pm}\equiv\hat{w}^{\pm}_{(n)}\equiv\mathbf{u}^{\pm}\cdot\mathbf{n},\quad w_{(n^+)}\equiv\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}^+,\quad w^{\pm}_{(n^+)}\equiv\mathbf{u}^{\pm}\cdot\mathbf{n}^+
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Видно, что на основании третьего соотношения (1.4) и первого соотношения третьей строки (2.3) имеем

$$\sqrt{g}=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{h}=\sqrt{g}\mathbf{r}^3\cdot\mathbf{h}=\sqrt{gg^{33}}\mathbf{n}\cdot\mathbf{h}=\sqrt{gg^{33}}\hat{h}$$

Таким образом

$$\begin{gathered}
\sqrt{g^{33}}=\hat{h}^{-1},\quad \sqrt{g^{3^-3^-}}=\sqrt{g^{33}}\Big|_{x^3=1}=(h^-)^{-1}\\
\sqrt{g^{3^+3^+}}=\sqrt{g^{33}}\Big|_{x^3=1}=(h^+)^{-1}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Заметим, что последние два соотношения (2.4) получаются аналогично первому.

Теперь допустим, что вектор $\mathbf{h}$ перпендикулярен к поверхности σ_0^-. Тогда из (2.3) получаем[3]

$$\mathbf{e}=\mathbf{n}^-,\quad h^-=h,\quad w_{(e)}=w,\quad w^{\pm}_{(e)}=w^{\pm} \tag{2.6}$$

---

[3] Рассмотрением двух конфигураций обусловлено введение вектора перемещения, представление (2.2) которого, следовательно, определяется принятой кинематической гипотезой. Кроме того, как легко усмотреть на основании принятой кинематической гипотезы, параметризации как для отсчетной, так и для актуальной конфигураций пространств оболочки являются новыми параметризациями. Более того, так как $\mathbf{h}^\circ\perp\overset{\circ}{\sigma}{}_0^-$, поэтому параметризация актуальной конфигурации пространства оболочки более общая, чем отсчетной конфигурации. В связи с этим все соотношения одновременно будут иметь место в обеих конфигурациях при условии, что величины, символы, компоненты тензоров, относящиеся к отсчетной конфигурации, надо снабжать градусом и в соотношениях, где это необходимо ввиду того, что $\mathbf{h}^\circ\perp\overset{\circ}{\sigma}{}_0^-$, а также учитывать соотношения (2.6), в которых согласно второй сноске символы будут снабжены градусом и условия

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{g}_{I^-3^-}=\overset{\circ}{g}_{I^-3}=\overset{\circ}{g}_{I^-3^+}=0,\quad g^{\circ I^-3^-}=0\\
g^{\circ 3^-}_{I^+}=\partial_I\ln h^\circ,\quad \overset{\circ}{g}_{I^+3^-}=(h^\circ)^2\partial_I\ln h^\circ
\end{gathered} \tag{2.5}$$

В том частном случае актуальной конфигурации, когда $\mathbf{h}\perp\sigma_0^-$, в отсчетной конфигурации остается лишь снабжать входящие в соотношения актуальной конфигурации символы градусом.

Таким образом, с целью сокращения письма целесообразно рассматривать ниже только параметризацию актуальной конфигурации пространства оболочки, то есть получить характеристики теории оболочек для актуальной конфигурации, так как, осуществляя указанную во второй сноске процедуру перехода от актуальной конфигурации к отсчетной, они одновременно окажутся полученными и для отсчетной конфигурации.

Теперь, видно, что на основании (2.2), (2.3) и (2.4) можно получить

$$w_{(e)} = h^{-1}u_{3^-} = h^{-1}\hat{u}_3 = h^{-1}u_{3^+} = (1-x^3)w^-_{(e)} + x^3 w^+_{(e)}$$

$$w = h^- u^{3^-} = (1-x^3)w^- + x^3 w^+ \tag{2.7}$$

$$\hat{w} = \hat{h}\hat{u}^3 = (1-x^3)\hat{w}^- + x^3\hat{w}^+$$

$$w_{(n^+)} = h^+ u^{3^+} = (1-x^3)w^-_{(n^+)} + x^3 w^+_{(n^+)}$$

$$w^\pm = h^- u^{\pm 3^-}, \quad \hat{w}^\pm = \hat{h}\hat{u}^{\pm 3}, \quad w^\pm_{(n^+)} = h^+ u^{\pm 3^+} \tag{2.8}$$

В теории оболочек большой интерес представляет нахождение связей между нормалями ($\mathbf{n}^-$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}^+$) к эквидистантным от базовой поверхностям. Эти связи легко найти на основании (1.5). Действительно, учитывая соответствующие обозначения для нормалей из (2.3) на основании (2.4), по второму соотношению (1.5) получаем

$$\mathbf{n} = \hat{h}(h^-)^{-1}(\mathbf{n}^- + h^- g^3_{N^-}\mathbf{r}^{N^-}) = \hat{h}(h^+)^{-1}(\mathbf{n}^+ + h^+ g^3_{N^+}\mathbf{r}^{N^+}) \tag{2.9}$$

$$g^3_{N^-} = (\vartheta^-)^{-1} g^{3^-}_M \varepsilon^{MK}\varepsilon_{LN} g^{L^-}_K$$

$$g^3_{N^+} = (\vartheta^+)^{-1} g^{3^+}_M \varepsilon^{MK}\varepsilon_{LN} g^{L^+}_K$$

Из (2.9) в свою очередь получаем

$$\mathbf{n}^- = \mathbf{n}\big|_{x^3=0} = h^-(h^+)^{-1}(\mathbf{n}^+ + h^+ g^{3^-}_{N^+}\mathbf{r}^{N^+})$$

$$\tag{2.10}$$

$$\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}\big|_{x^3=0} = h^+(h^-)^{-1}(\mathbf{n}^- + h^- g^{3^+}_{N^-}\mathbf{r}^{N^-})$$

$$g^{3^-}_{N^+} = \vartheta^\mp g^{3^+}_{M^-}\varepsilon^{MK}\varepsilon_{LN} g^{L^+}_{K^-}, \quad g^{3^+}_{N^-} = \vartheta^\pm g^{3^-}_{M^+}\varepsilon^{MK}\varepsilon_{LN} g^{L^-}_{K^+}$$

$$\vartheta^\mp = \sqrt{g(g^-)^{-1}}\Big|_{x^3=1} = \sqrt{g^+(g^-)^{-1}}$$

$$\vartheta^\pm = \sqrt{g(g^+)^{-1}}\Big|_{x^3=0} = \sqrt{g^-(g^+)^{-1}}, \quad \vartheta^\mp = (\vartheta^\pm)^{-1}$$

Теперь на основании (2.9) и (2.10) можно найти связи между проекциями любого вектора на направления нормалей к эквидистантным поверхностям. В самом деле, умножая все части (2.9) и (2.10), например, на $\mathbf{u}$, получим соответственно

$$\hat{w} = \hat{h}(h^-)^{-1}(w + h^- g^3_{N^-}u^{N^-}) = \hat{h}(h^+)^{-1}(w_{(n^+)} + h^+ g^3_{N^+}u^{N^+})$$

$$w = h^-(h^+)^{-1}(w_{(n^+)} + h^+ g^{3^-}_{N^+}u^{N^+})$$

$$w_{(n^+)} = h^+(h^-)^{-1}(w + h^- g^{3^+}_{N^-}u^{N^-})$$

3. Градиент вектора перемещения и его компоненты. Нетрудно заметить, что градиент вектора перемещения (2.2) представляется в виде

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{r}^3(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) + (1-x^3)\nabla\mathbf{u}^- + x^3\nabla\mathbf{u}^+ \tag{3.1}$$

или, вводя обозначения

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^- \equiv \nabla\mathbf{u}^-, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^+ \equiv \nabla\mathbf{u}^+$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\mu}}} \equiv (1-x^3)\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^- + x^3\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^+ \tag{3.2}$$

будем иметь

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{r}^3\boldsymbol{\mu} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{r}^3\boldsymbol{\mu} + (1-x^3)\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^- + x^3\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^+ \tag{3.3}$$

3.1. Компоненты градиента вектора перемещения при $\sigma^-_{g^-}$-параметризации ($\sigma^-_{g^-}$-компоненты градиента вектора перемещения). На основании (3.1) и (3.3), например, для $\sigma^-_{g^-}$-ковариантных компонент будем иметь соответственно

$$\nabla^-_{p^-}u_{q^-} = g^{3^-}_{p^-}(u^+_{q^-} - u^-_{q^-}) + (1-x^3)\nabla^-_{p^-}u^-_{q^-} + x^3\nabla^-_{p^-}u^+_{q^-} \tag{3.4}$$

$$\nabla^-_{p^-}u_{q^-} = g^{3^-}_{p^-}\mu_{q^-} + \mu_{p^-q^-} = g^{3^-}_{p^-}\mu_{q^-} + (1-x^3)\mu^-_{p^-q^-} + x^3\mu^+_{p^-q^-} \tag{3.5}$$

$$\mu_{q^-} = u^+_{q^-} - u^-_{q^-}, \quad \mu^-_{p^-q^-} = \nabla^-_{p^-}u^-_{q^-}$$

$$\mu^+_{p^-q^-} = \nabla^-_{p^-}u^+_{q^-}, \quad \mu_{p^-q^-} = (1-x^3)\mu^-_{p^-q^-} + x^3\mu^+_{p^-q^-} \tag{3.6}$$

При написании (3.6) были учтены (3.2). Поднимая индекс q^- в (3.4) и (3.5), получаем соответственно $\sigma^-_{g^-}$-смешанные компоненты градиента вектора перемещения. Выписывать их не представляет большого труда, поэтому не будем останавливаться на их выписывании.

Видно, что

$$\nabla^-_{p^-}u_{q^-} \sim (\nabla^-_{P^-}u_{Q^-}, \quad \nabla^-_{P^-}u_{3^-}, \quad \nabla^-_{3^-}u_{Q^-}, \quad \nabla^-_{3^-}u_{3^-})$$

$$\nabla^-_{p^-}u^{q^-} \sim (\nabla^-_{P^-}u^{Q^-}, \quad \nabla^-_{P^-}u^{3^-}, \quad \nabla^-_{3^-}u^{Q^-}, \quad \nabla^-_{3^-}u^{3^-}) \tag{3.7}$$

где ($\sim$) – символ эквивалентности.

Теперь прежде чем приступить к нахождению выражений для $\sigma^-_{g^-}$-компонент градиента вектора перемещения (3.7), следует отметить, что для $\sigma^-_{g^-}$-символов Кристоффеля первого и второго родов имеем соответственно следующие представления [8]:

$$\Gamma_{P^-Q^-,L^-} = \Gamma^-_{P^-Q^-,L^-} = \tfrac{1}{2}(-\partial_L g_{P^-Q^-} + \partial_P g_{Q^-L^-} + \partial_Q g_{L^-P^-})$$

$$\Gamma_{3^-Q^-,l^-} = g_{Q^+l^-} - g_{Q^-l^-}, \quad \Gamma_{p^-3^-,l^-} = 0 \tag{3.8}$$

$$\Gamma_{P^-Q^-,3^-} = \Gamma_{Q^-P^-,3^-} = \tfrac{1}{2}(\partial_P g_{Q^-3^-} + \partial_Q g_{P^-3^-} - g_{P^+Q^-} - g_{Q^+P^-} + 2g_{P^-Q^-}) =$$

$$= \partial_Q g_{P^-3^-} - g_{Q^+P^-} + g_{Q^-P^-} = \partial_P g_{Q^-3^-} - g_{P^+Q^-} + g_{P^-Q^-}$$

$$\Gamma^{k^-}_{P^-Q^-} = g^{k^-l^-}\Gamma_{P^-Q^-,l^-} = g^{k^-L^-}\Gamma^{-}_{P^-Q^-,L^-} + g^{k^-3^-}(\partial_P g_{Q^-3^-} - g_{P^+Q^-} + g_{P^-Q^-})$$

$$\Gamma^{k^-}_{3^-Q^-} = g^{k^-}_{Q^+} - g^{k^-}_{Q^-}, \quad \Gamma^{k^-}_{p^-3^-} = 0 \tag{3.9}$$

а для компонент второго тензора поверхности σ_0^- на основании вторых соотношений (2.3) и (2.4) соответственно и первого соотношения (3.9) имеем [8]:

$$b^-_{P^-Q^-} = \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{r}_{P^-Q^-} = h^-\Gamma^{3^-}_{P^-Q^-} = h^- g^{3^-L^-}\Gamma^-_{P^-Q^-,L^-} + (h^-)^{-1}(\partial_P g_{Q^-3^-} - g_{P^+Q^-} + g_{P^-Q^-}) \tag{3.10}$$

где, как видно из первого соотношения (3.8), $\Gamma^-_{P^-Q^-,L^-}$ – σ_0^- -символы Кристоффеля первого рода.

Теперь не представляет большого труда получить искомые выражения для компонент (3.7). В самом деле, на основании соответствующих соотношений (2.7), (3.9) и (3.10) для $\sigma^-_{g^-}$-компонент градиента вектора перемещения имеем выражения:

$$\nabla^-_{P^-}u_{Q^-} = \mu_{P^-Q^-} = \nabla^{0-}_{P^-}u_{Q^-} - w_{(e)}h(h^-)^{-1}b^-_{P^-Q^-}$$

$$\nabla^-_{P^-}u_{3^-} = \mu_{P^-3^-} = h\varphi_{P^-}, \quad \nabla^-_{3^-}u_{Q^-} = \mu_{Q^-} = u^+_{Q^-} - u^-_{Q^-} \tag{3.11}$$

$$\nabla^-_{3^-}u_{3^-} = \mu_{3^-} = u^+_{3^-} - u^-_{3^-} = h(w^+_{(e)} - w^-_{(e)})$$

$$\varphi_{P^-} = \partial_P w_{(e)} - u_{N^-}(g^{N^-}_{P^+} - g^{N^-}_{P^-})h^{-1} - w_{(e)}(g^{3^-}_{P^+} - \partial_P \ln h) \tag{3.12}$$

$$\nabla^-_{P^-}u^{Q^-} = \mu^{\bullet Q}_{P^-\bullet} = \nabla^{0-}_{P^-}u^{Q^-} + w(g^{Q^-}_{P^+} - g^{Q^-}_{P^-})h^{-1}$$

$$\nabla^-_{P^-}u^{3^-} = \mu^{\bullet 3^-}_{P^-\bullet} = (h^-)^{-1}\psi_{P^-}, \quad \nabla^-_{3^-}u^{Q^-} = \mu^{Q^-} = u^{+Q^-} - u^{-Q^-} \tag{3.13}$$

$$\nabla^-_{3^-}u^{3^-} = \mu^{3^-} = u^{+3^-} - u^{-3^-} = (h^-)^{-1}(w^+ - w^-)$$

$$\psi_{P^-} = \partial_P w + u^{K^-} + w(g^{3^-}_{P^+} - \partial_P \ln h^-) \tag{3.14}$$

Аналогично (3.11) – (3.14) на основании (2.8), (3.9) и (3.10) получаем

$$\mu^{\pm}_{P^-Q^-} = \nabla^-_{P^-}u^{\pm}_{Q^-} = \nabla^{0-}_{P^-}u^{\pm}_{Q^-} - w^{\pm}_{(e)}h(h^-)^{-1}b^-_{P^-Q^-}$$

$$\mu^{\pm}_{P^-3^-} = \nabla^-_{P^-}u^{\pm}_{3^-} = h\varphi^{\pm}_{P^-}, \quad \mu^{\pm}_{3^-q^-} = \nabla^-_{3^-}u^{\pm}_{q^-} = 0 \tag{3.15}$$

$$\mu^{\pm\bullet Q^-}_{P^-\bullet} = \nabla^-_{P^-}u^{\pm Q^-} = \nabla^{0-}_{P^-}u^{\pm Q^-} - w^{\pm}(g^{Q^-}_{P^+} - g^{Q^-}_{P^-})h^{-1}$$

$$\mu^{\pm\bullet 3^-}_{P^-\bullet} = \nabla^-_{P^-}u^{\pm 3^-} = (h^-)^{-1}\psi^{\pm}_{P^-}, \quad \mu^{\pm\bullet q^-}_{3^-\bullet} = \nabla^-_{3^-}u^{\pm q^-} = 0$$

$$\varphi^{\pm}_{P^-} = \partial_P w^{\pm}_{(e)} - u^{\pm}_{N^-}(g^{N^-}_{P^+} - g^{N^-}_{P^-})h^{-1} - w^{\pm}_{(e)}(g^{3^-}_{P^+} - \partial_P \ln h) \tag{3.16}$$

$$\psi^{\pm}_{P^-} = \partial_P w^{\pm} + u^{\pm K^-}b^-_{K^-P^-} + w^{\pm}(g^{3^-}_{P^+} - \partial_P \ln h^-)$$

Видно, что

$$\varphi_{P^-} = (1-x^3)\varphi^-_{P^-} + x^3\varphi^+_{P^-}$$
$$\psi_{P^-} = (1-x^3)\psi^-_{P^-} + x^3\psi^+_{P^-} \tag{3.17}$$

и на основании четвертого соотношения (3.6) и третьего и шестого соотношений (3.15) имеем [8]:

$$\mu_{3^-q^-} = (1-x^3)\mu^-_{3^-q^-} + x^3\mu^+_{3^-q^-} = 0$$
$$\mu^{\bullet q^-}_{3^-\bullet} = (1-x^3)\mu^{-\bullet q^-}_{3^-\bullet} + x^3\mu^{+\bullet q^-}_{3^-\bullet} = 0 \tag{3.18}$$

Следует отметить, что получаемые из (3.15) и (3.16) соотношения, содержащие снабженные в верхних индексах знаком – (+) символы, можно получить еще из соответствующих соотношений (3.11) – (3.14), если допустим, $x^3 = 0$ $(x^3 = 1)$.

Следовательно, аналогично можно рассматривать $\sigma^+_{g^+}$-параметризацию, на рассмотрении которой не будем останавливаться.

3.2. $\sigma^{x^3}_g$ *-компоненты градиента вектора перемещения*. В рассматриваемом случае вместо (3.4), (3.5) и (3.6) соответственно будем иметь

$$\hat{\nabla}_p\hat{u}_q = g^3_p(\hat{u}^+_q - \hat{u}^-_q) + (1-x^3)\hat{\nabla}_p\hat{u}^-_q + x^3\hat{\nabla}_p\hat{u}^+_q$$
$$\hat{\nabla}_p\hat{u}_q = g^3_p\hat{\mu}_q + \hat{\mu}_{pq} = g^3_p\hat{\mu}_q + (1-x^3)\hat{\mu}^-_{pq} + x^3\hat{\mu}^+_{pq} \tag{3.19}$$

$$\hat{\mu}_q = \hat{u}^-_q - \hat{u}^+_q, \qquad \hat{\mu}^-_{pq} = \hat{\nabla}_p\hat{u}^-_q, \qquad \hat{\mu}^+_{pq} = \hat{\nabla}_p\hat{u}^+_q$$
$$\hat{\mu}_{pq} = (1-x^3)\hat{\mu}^-_{pq} + x^3\hat{\mu}^+_{pq} \tag{3.20}$$

Следовательно

$$\hat{\nabla}_p\hat{u}_q \sim (\hat{\nabla}_P\hat{u}_Q,\ \hat{\nabla}_P\hat{u}_3,\ \hat{\nabla}_3\hat{u}_Q,\ \hat{\nabla}_3\hat{u}_3),\quad \hat{\nabla}_p\hat{u}^q \sim (\hat{\nabla}_P\hat{u}^Q,\ \hat{\nabla}_P\hat{u}^3,\ \hat{\nabla}_3\hat{u}^Q,\ \hat{\nabla}_3\hat{u}^3) \tag{3.21}$$

и с целью нахождения каждой из $\sigma^{x^3}_g$ -компонент (3.21) заметим, что связь между $\sigma^{x^3}_g$ - и $\sigma^-_{g^-}$-символами Кристоффеля имеет, например, вид [8]:

$$\hat{\Gamma}^l_{pq} = g^l_{k^-}(\partial_q g^{k^-}_p + g^{m^-}_p \Gamma^{k^-}_{m^-q^-}) \tag{3.22}$$

Из (3.22), учитывая первое соотношение (1.3) и последнее соотношение (3.9), получаем

$$\hat{\Gamma}^l_{p3} = \hat{\Gamma}^l_{3p} = g^l_{k^-}\partial_3 q^{k^-}_p = g^l_{k^-}(g^{k^-}_{p^+} - g^{k^-}_{p^-}) = g^l_{p^+} - g^l_{p^-} \tag{3.23}$$

Для компонент второго тензора поверхности σ^{x^3} также имеем

$$\hat{b}_{PQ} = \hat{h}\hat{\Gamma}^3_{PQ} \tag{3.24}$$

где $\hat{\Gamma}^3_{PQ}$ можно определить, например, на основании (3.22).

Теперь заметим, что $\sigma_g^{x^3}$ -, $\sigma_{g^-}^-$ - и σ_{g+}^+ - компоненты любого вектора $\mathbf{u}$ связаны на основании (1.2) соотношениями

$$\hat{u}_p = g_p^{k^-} u_{k^-} = g_p^{k^+} u_{k^+}, \quad u_{k^-} = g_{k^-}^p \hat{u}_p = g_{k^-}^{m^+} u_{m^+}$$
$$u_{n^+} = g_{n^+}^p \hat{u}_p = g_{n^+}^{m^-} u_{m^-} \tag{3.25}$$

справедливыми при любых перемещениях свободных и немых индексов на соответствующих вертикалях и, кроме того,

$$\partial_3 u_{k^-}^{\pm} = 0, \quad \partial_3 u^{\pm k^-} = 0 \tag{3.26}$$

Тогда, учитывая (3.23), (3.25) и (3.26), получаем

$$\hat{\mu}_{3q}^{\pm} = \hat{\nabla}_3 \hat{u}_q^{\pm} = \partial_3 (g_q^{k^-} u_{k^-}^{\pm}) - \hat{u}_n^{\pm} g_{m^-}^n \partial_3 g_q^{m^-} =$$
$$= u_{k^-}^{\pm} \partial_3 g_q^{k^-} + g_q^{k^-} \partial_3 u_{k^-}^{\pm} - u_{m^-}^{\pm} \partial_3 g_q^{m^-} = 0$$

Таким образом,

$$\hat{\mu}_{3q}^{\pm} = \hat{\nabla}_3 \hat{u}_q^{\pm} = 0, \quad \hat{\mu}_{3\bullet}^{\pm\bullet q} = \hat{\nabla}_3 \hat{u}^{\pm q} = 0 \tag{3.27}$$

где второе соотношение (3.27) доказывается совершенно аналогично.

На основании (3.27) имеем

$$\hat{\mu}_{3q} = (1 - x^3) \hat{\mu}_{3q}^- + x^3 \hat{\mu}_{3q}^+ = 0$$
$$\hat{\mu}_{3\bullet}^{\bullet q} = (1 - x^3) \hat{\mu}_{3\bullet}^{-\bullet q} + x^3 \hat{\mu}_{3\bullet}^{+\bullet q} = 0 \tag{3.28}$$

Теперь не представляет большого труда найти выражения для $\sigma_g^{x^3}$ -компонент градиента вектора перемещения. Действительно, на основании первого соотношения (2.7) и (3.24), первого соотношения (2.7) и (3.23), второго соотношения (3.19), (3.20) и первого соотношения (3.28) соответственно получаем

$$\hat{\nabla}_P \hat{u}_Q = \hat{\mu}_{PQ} = \hat{\nabla}_P^0 \hat{u}_Q - w_{(e)} h \hat{h}^{-1} \hat{b}_{PQ}$$
$$\hat{\nabla}_P \hat{u}_3 = \hat{\mu}_{P3} = h \hat{\varphi}_P, \quad \hat{\nabla}_3 \hat{u}_Q = \hat{\mu}_Q = \hat{u}_Q^+ - \hat{u}_Q^- \tag{3.29}$$
$$\hat{\nabla}_3 \hat{u}_3 = \hat{\mu}_3 = \hat{u}_3^+ - \hat{u}_3^- = h(w_{(e)}^+ - w_{(e)}^-)$$
$$\hat{\varphi}_P = \partial_P w_{(e)} - u_{K^-} (g_{P^+}^{K^-} - g_{P^-}^{K^-}) h^{-1} - w_{(e)} (g_{P^+}^{3-} - \partial_P \ln h) \tag{3.30}$$

На основании третьего соотношения (2.7) и (3.23), третьего соотношения (2.7) и (3.24), второго соотношения (3.19), (3.20) и второго соотношения (3.28) соответственно получаем

$$\hat{\nabla}_P \hat{u}^Q = \hat{\mu}_{P\bullet}^{\bullet Q} = \hat{\nabla}_P^0 \hat{u}^Q + \hat{w} (g_{P^+}^Q - g_{P^-}^Q) \hat{h}^{-1}$$
$$\hat{\nabla}_P \hat{u}^3 = \hat{\mu}_{P\bullet}^{\bullet 3} = \hat{h}^{-1} \hat{\psi}_P, \quad \hat{\nabla}_3 \hat{u}^Q = \hat{\mu}^Q = \hat{u}^{+Q} - \hat{u}^{-Q} \tag{3.31}$$
$$\hat{\nabla}_3 \hat{u}^3 = \hat{\mu}^3 = \hat{u}^{+3} - \hat{u}^{-3} = \hat{h}^{-1} (\hat{w}^+ - \hat{w}^-)$$
$$\hat{\psi}_P = \partial_P \hat{w} + \hat{u}^N \hat{b}_{NP} + \hat{w} [g_{K^-}^3 (g_{P^+}^{K^-} - g_{P^-}^{K^-}) + g_{P^+}^{3^-} - \partial_P \ln \hat{h}] \tag{3.32}$$

Не представляет большого труда получить аналогичные (3.15) – (3.17) соотношения:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mu}^{\pm}_{PQ} = \hat{\nabla}_P \hat{u}^{\pm}_Q = \hat{\nabla}^0_P \hat{u}^{\pm}_Q - \hat{w}^{\pm}_{(e)} h \hat{h}^{-1} \\
&\hat{\mu}^{\pm}_{P3} = \hat{\nabla}_P \hat{u}^{\pm}_3 = h \hat{\varphi}^{\pm}_P, \qquad \hat{\mu}^{\pm}_{3q} = \hat{\nabla}_3 \hat{u}^{\pm}_q = 0 \\
&\hat{\mu}^{\bullet Q}_{P\bullet} = \hat{\nabla}_P \hat{u}^{\pm Q} = \hat{\nabla}^0_P \hat{u}^{\pm Q} - \hat{w}^{\pm}(g^{Q}_{P^+} - g^{Q}_{P^-})\hat{h}^{-1} \\
&\hat{\mu}^{\pm\bullet 3}_{P\bullet} = \hat{\nabla}_P \hat{u}^{\pm 3} = \hat{h}^{-1}\hat{\psi}^{\pm}_P, \qquad \hat{\mu}^{\pm\bullet q}_{3\bullet} = \hat{\nabla}_3 \hat{u}^{\pm q} = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_P = \partial_P \hat{w}^{\pm}_{(e)} - u^{\pm}_{K^-}(g^{K^-}_{P^+} - g^{K^-}_{P^-})h^{-1} - \hat{w}^{\pm}_{(e)}(g^{3^-}_{P^+} - \partial_P \ln h) \\
&\hat{\psi}_P = \partial_P \hat{w}^{\pm} + \hat{u}^{\pm N}\hat{b}_{NP} + \hat{w}^{\pm}[g^{3}_{K^-}(g^{K^-}_{P^+} - g^{K^-}_{P^-}) + g^{3^-}_{P^+} - \partial_P \ln \hat{h}]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Следовательно

$$\hat{\varphi}_P = (1-x^3)\,\hat{\varphi}^-_P + x^3\hat{\varphi}^+_P, \qquad \hat{\psi}_P = (1-x^3)\,\hat{\psi}^-_P + x^3\hat{\psi}^+_P$$

Сравнивая соотношения (3.12) и (3.30), (3.14) и (3.32), а также (3.16) и (3.34), заключаем, что

$$\varphi_{P^-} = \hat{\varphi}_P, \quad \hat{\varphi}^{\pm}_{P^-} = \hat{\varphi}^{\pm}_P; \quad \psi_{P^-} \neq \hat{\psi}_P, \quad \hat{\psi}^{\pm}_{P^-} \neq \hat{\psi}^{\pm}_P \tag{3.35}$$

Теперь заметим, что аналогично (3.25) $\sigma^{x^3}_g$-, $\sigma^-_{g^-}$ - и $\sigma^+_{g^+}$ - ковариантные производные от компонент любого вектора **u** связаны между собой посредством компонент переноса следующими соотношениями

$$\hat{\nabla}_p \hat{u}_q = g^{k^-}_q \nabla^-_{p^-} u_{k^-} = g^{m^+}_q \nabla^+_{p^+} u_{m^+} \tag{3.36}$$

$$\nabla^-_{p^-} u_{q^-} = g^n_{q^-} \hat{\nabla}_p \hat{u}_n = g^{m^+}_{q^-} \nabla^+_{p^+} u_{m^+}, \qquad \nabla^+_{p^+} u_{q^+} = g^n_{q^+} \hat{\nabla}_p \hat{u}_n = g^{m^-}_{q^+} \nabla^-_{p^-} u_{m^-}$$

Следовательно, аналогично (3.36) имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\hat{\mu}_{pq} = g^{k^-}_q \mu_{p^-k^-} = g^{n^+}_q \mu_{p^+n^+}, \qquad \mu_{p^-q^-} = g^n_{q^-}\hat{\mu}_{pn} = g^{k^+}_{q^-}\mu_{p^+k^+} \\
&\mu_{p^+q^+} = g^n_{q^+}\hat{\mu}_{pn} = g^{m^-}_{q^+}\mu_{p^-m^-}, \qquad \hat{\mu}^{\pm}_{pq} = g^{k^-}_q \mu^{\pm}_{p^-k^-} = g^{n^+}_q \mu^{\pm}_{p^+n^+} \\
&\mu^{\pm}_{p^-q^-} = g^n_{q^-}\hat{\mu}^{\pm}_{pn} = g^{k^+}_{q^-}\mu^{\pm}_{p^+k^+}, \qquad \mu^{\pm}_{p^+q^+} = g^n_{q^+}\hat{\mu}^{\pm}_{pn} = g^{m^-}_{q^+}\mu^{\pm}_{p^-m^-}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Заметим, что в соотношениях (3.36) и (3.37) $p = p^- = p^+$, однако в связи с усилением того факта, что оператор ковариантной производной является $(\sigma^+_{g^+})\,\sigma^-_{g^-}$ -оператором, над индексом при операторе пишем (+) –.

Заметим, что соотношения (3.36) и (3.37) сохраняют силу при любых перемещениях свободных и глухих индексов на соответствующих вертикалях.

Следует отметить, что, имея какие-нибудь из приведенных выше соотношений при какой-нибудь параметризации, интересующиеся соотношения при других параметризациях можно получить из соответствующих соотношений (3.36) и (3.37).

В частности, зная, например, третье и шестое соотношения (3.15) и (3.18), из четвертого и первого соотношений (3.37) можно получить соотношения (3.27) и (3.28) соответственно. Итак, имеем

$$\hat{\mu}^{\pm}_{3q} = g^{k^-}_q \mu^{\pm}_{3^- k^-} = g_{qk^-} \mu^{\pm \bullet k^-}_{3^- \bullet} = 0$$

$$\hat{\mu}^{\pm \bullet q}_{3\bullet} = g^q_{k^-} \mu^{\pm \bullet k^-}_{3^- \bullet} = g^{gk^-} \mu^{\pm}_{3^- k^-} = 0$$

$$\hat{\mu}_{3q} = g^{k^-}_q \mu_{3^- k^-} = g_{gk^-} \mu^{\bullet k^-}_{3^- \bullet} = 0$$

$$\hat{\mu}^{\bullet q}_{3\bullet} = g^q_{k^-} \mu^{\bullet k^-}_{3^- \bullet} = g^{gk^-} \mu_{3^- k^-} = 0$$

Аналогично из первого соотношения (3.37) на основании вторых соотношений (3.29) и (3.11) и (3.31) и (3.13) получаем соответственно

$$\hat{\varphi}_P = \varphi_{P^-}, \quad \hat{\psi}_P = \hat{h}(g^3_{N^-} \mu^{\bullet N^-}_{P^- \bullet} + (h^-)^{-1} \psi_{P^-}) = \hat{h}(g^{3N^-} \mu_{P^- N^-} + g^{33^-} h \varphi_{P^-})$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$\hat{\varphi}_P \big|_{x^3=0} = \varphi_P \big|_{x^3=0} = \hat{\varphi}^-_P = \varphi^-_{P^-}, \quad \hat{\varphi}_P \big|_{x^3=1} = \varphi_P \big|_{x^3=1} = \hat{\varphi}^+_P = \varphi^+_{P^-}$$

$$\hat{\psi}_P \big|_{x^3=0} = \psi^-_{P^-} = h^-(g^{3^- N^-} \mu^-_{P^- N^-} + h(h^-)^{-2} \varphi^-_{P^-})$$

$$\hat{\psi}_P \big|_{x^3=1} = h^+(g^{3^+}_{N^-} \mu^{+ \bullet N^-}_{P^- \bullet} + (h^-)^{-1} \psi^+_{P^-}) = h^+(g^{3^+ N^-} \mu^+_{P^- N^-} + g^{3^+ 3^-} h \varphi^+_{P^-})$$

Теперь, предоставляя читателю рассмотрение частного случая, когда $\mathbf{h} \perp \sigma_0^-$, мы далее рассмотрим более частный случай, когда $\mathbf{h} \perp \sigma_0^-$ и $h = |\mathbf{h}| = \mathrm{const}$ и выпишем некоторые соотношения для этого случая.

В рассматриваемом случае, учитывая (2.5) и (2.6) при условии, что последние два условия в (2.5) заменены условиями

$$g^{3^-}_{I^+} = \partial_I \ln h = 0, \quad g_{I^+ 3^-} = h^2 \partial_I \ln h = 0 \tag{3.38}$$

а также получаемые на основании соотношений первых двух строк (1.3) и последних двух строк (1.5) с учетом (3.38) и третьей и четвертой строк (3.3) следующие условия

$$\begin{gathered} g^3_I = 0, \quad g_{I3^-} = g_{I3} = g_{I3^+} = 0 \\ g^3_{I^-} = 0, \quad g^{3I^-} = g^{I^- N^-} g^3_{N^-} = 0 \\ \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{3^-} = \mathbf{r}^{3^+}, \quad \mathbf{n}^- = \mathbf{n} = \mathbf{n}^+, \quad h^- = \hat{h} = h^+ = h \end{gathered} \tag{3.39}$$

из (3.22) и (3.24) получаем

$$\begin{gathered} \hat{\Gamma}^3_{PQ} = g^{M^-}_P \Gamma^{3^-}_{M^- Q^-}, \quad \hat{b}^Q_P = (g^Q_{P^-} - g^Q_{P^+}) h^{-1} \\ \hat{b}_{PQ} = g^{M^-}_P b^-_{M^- Q^-} = (g_{Q^- P} - g_{Q^+ P}) h^{-1} \end{gathered} \tag{3.40}$$

Далее, учитывая (3.39) и (3.40), из первых соотношений (3.29) и (3.31) с учетом первого соотношения (3.37) получаем соответственно

$$\hat{\nabla}_P \hat{u}_Q = \hat{\mu}_{PQ} = g^{N^-}_Q \mu_{P^- N^-} = \hat{\mu}^0_{PQ} - w(g_{Q^- P} - g_{Q^+ P}) h^{-1} =$$

$$= g^{N^-}_Q [\mu^0_{P^- N^-} - w(g_{P^- N^-} - g_{P^+ N^-}) h^{-1}]$$

$$\hat{\nabla}_P \hat{u}^Q = \hat{\mu}_{P\bullet}^{\bullet Q} = g_{N^-}^{Q} \mu_{P^-\bullet}^{\bullet N^-} = \hat{\mu}_{P\bullet}^{0\bullet Q} - w(g_{P^-}^{Q} - g_{P^+}^{Q})h^{-1} = = g_{N^-}^{Q}[\mu_{P^-\bullet}^{0\bullet N^-} - w(g_{P^-}^{N^-} - g_{P^+}^{N^-})h^{-1}]$$

$$\mu_{P^-N^-}^{0} = \nabla_{P^-}^{0-} u_{N^-}, \quad \hat{\mu}_{PQ}^{0} = \hat{\nabla}_P^0 \hat{u}_Q = g_Q^{N^-} \mu_{P^-N^-}^{0}$$

$$\mu_{P^-\bullet}^{0\bullet N^-} = \nabla_{P^-}^{0-} u^{N^-}, \quad \hat{\mu}_{P\bullet}^{0\bullet Q} = \hat{\nabla}_P^0 \hat{u}^Q = g_{N^-}^{Q} \mu_{P^-\bullet}^{0\bullet N^-}$$

Следовательно

$$\hat{\nabla}_3 \hat{u}_3 = \hat{\mu}_3 = \mu_{3^-} = h(w^+ - w^-)$$

$$\hat{\nabla}_3 \hat{u}^3 = \hat{\mu}^3 = \mu^{3^-} = h^{-1}(w^- - w^-)$$

а также на основании (3.12) и (3.30), (3.14) и (3.32) и (3.16) и (3.34) получаем

$$\psi_{P^-} = \varphi_{P^-} = \hat{\psi}_P = \hat{\varphi}_P = \partial_P w + u_{K^-}(g_{P^-}^{K^-} - g_{P^+}^{K^-})h^{-1} = \partial_P w + u^{N^-}(g_{P^-N^-} - g_{P^+N^-})h^{-1}\ .$$

$$\psi_{P^-}^{\pm} = \varphi_{P^-}^{\pm} = \hat{\psi}_P^{\pm} = \hat{\varphi}_P^{\pm} = \partial_P w^{\pm} + u_{K^-}^{\pm}(g_{P^-}^{K^-} - g_{P^+}^{K^-})h^{-1} = \partial_P w^{\pm} + u^{\pm N^-}(g_{P^-N^-} - g_{P^+N^-})h^{-1}$$

Заметим, что в приведенных выше соотношениях $\nabla_{P^-}^{0-}$ – σ_0^- – оператор ковариантной производной, а $\hat{\nabla}_P^0 - \sigma^{x^3}$ -оператор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никабадзе М.У.* Новая кинематическая гипотеза и новые уравнения движения и равновесия теории оболочек и плоских криволинейных стержней // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1991. № 6. С. 54–61.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
4. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1976. 296 с.
5. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости машиностроительных расчетов. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
6. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
7. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
8. *Никабадзе М.У.* О символах Кристоффеля и втором тензоре поверхности при новой параметризации пространства оболочки // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2000. № 3. С. 41–45.

Москва

Поступила в редакцию
30.07.1998