

УДК 539.214;539.374

© 2000 г. Л.Ф. ФОМИН

СЖАТИЕ ТОНКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ НАКЛОННЫМИ ПЛИТАМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНЫХ НАТЯЖЕНИЙ

На основе предложенных в [1, 2] метода неопределенных граничных условий и метода декомпозиции приводится решение задачи сжатия между сближающимися наклонными плитами пластического слоя прямоугольной формы в плане, дополнительно растягиваемого двумя продольными одноосными силами. Показано, что в случае отсутствия растягивающих усилий или при их недостаточных величинах внутри материала существуют линии разрыва напряжений. Получены условия и критерии для нахождения таких оптимальных величин растягивающих усилий, при которых достигается однородное напряженно-деформированное состояние материала без разрывов напряжений и без неравномерности скоростей течения частиц. Приводятся значения давлений и скоростей течения частиц материала при наличии на контактных поверхностях трения по закону Кулона и совместном существовании зон трения по закону Кулона и зон трения по закону Прандтля (участков прилипания), выведены уравнения границ между этими зонами.

1. Введение. Для задач сжатия тонкого пластического слоя между шероховатыми плитами основные гипотезы и уравнения были введены в работах Л. Прандтля (1923) [3], Т. Кармана (1925) [4], А. Надаи (1939) [5] и А.А. Ильюшина (1954–1955) [6, 7]. Рассматривая слой изотропного, идеально жесткопластического вещества, занимающего в плоскости x, y область D , предполагается, что ее характерный линейный размер L_0 значительно превосходит начальную толщину слоя h_0 ($h_0/L_0 < 0,1$). При этом предположении слой считается тонким и рассматриваются средние постоянные по толщине слоя компоненты u, v вектора скорости частиц и средние нормальные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ в направлении осей x, y, z . Эти гипотезы подтверждаются экспериментальными данными [8–10]. Эксперименты также показывают, что давления p_1, p_2 на слой со стороны верхней и нижней плит в пределах погрешности h_0/L_0 одинаковы и равны по модулю нормальному напряжению σ_z , которое оказывается главным напряжением $p_1 = p_2 = p = -\sigma_z$. Пренебрегая внутренними касательными напряжениями, т.е. считая $\sigma_{xy} = 0$, получаем, что все оси x, y, z предполагаются главными. Кроме давлений p_1, p_2 на слой действуют еще только напряжения трения τ_1, τ_2 , обычно предполагаемые одинаковыми ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$), а массовые и инерционные силы не учитываются.

Используются прежде всего уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

и условие текучести Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 = 2\sigma_S^2 \quad (1.2)$$

где σ_S – предел текучести материала при растяжении.

Уравнения равновесия элемента тонкого деформированного слоя в криволинейных координатах α, β с учетом "внутренних движений" $u_1, v_1; u_2, v_2$ тел инструмента" приведены в работе А.А. Ильюшина [6]. При $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0; \tau_1 = \tau_2 = \tau$ в случае использования прямоугольных координат x, y, z уравнения равновесия в проекциях на их оси имеют вид:

$$\frac{\partial(h\sigma_x)}{\partial x} + p_2 \frac{\partial h}{\partial x} - 2\tau \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial(h\sigma_y)}{\partial y} + p_2 \frac{\partial h}{\partial y} - 2\tau \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0 \quad (1.4)$$

$$p_2 - p_1 + \tau \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0 \quad (1.5)$$

В данной работе рассматриваются только задачи, в которых толщина слоя h зависит от одной координаты x и $\partial h/\partial y \equiv 0$. Считается также, что $\tau \neq 0, u \neq 0$ и поскольку $p_1 \approx p_2$, то из уравнения (1.5) следует: $\partial h/\partial x \approx 0$. Следовательно, в уравнениях (1.3), (1.4) членами с множителем $\partial h/\partial x$ можно пренебречь. С учетом этого замечания уравнение (1.5) пропадает, а уравнения (1.3), (1.4) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{2\tau}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{2\tau}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (1.6)$$

Таким образом, для определения пяти неизвестных $\sigma_x, \sigma_y, p, u, v$ имеется только 4 уравнения. Недостающее соотношение может быть получено только в трех случаях: либо при $v = 0, u \neq 0$; либо при $u = 0, v \neq 0$; либо при $\sigma_x = \sigma_y, u \neq 0, v \neq 0$ (гипотеза "полной пластичности" Хэара – Кармана, 1909 [11]). Для случаев $v = 0$ (или $u = 0$) модели напряженно-деформированного состояния получены А. Надаи в [5]: $v = 0$: $\sigma_x = 2\tau_s - p, \sigma_y = (\sigma_x - p)/2 = \tau_s - p; u = 0$: $\sigma_y = 2\tau_s - p, \sigma_x = (\sigma_x - p)/2 = \tau_s - p$, а уравнения равновесия (1.6) при этом принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau}{h}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau}{h}$$

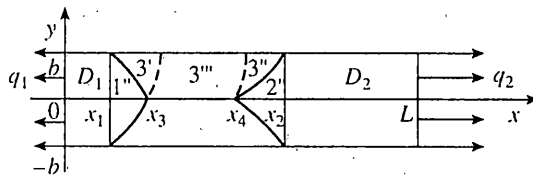
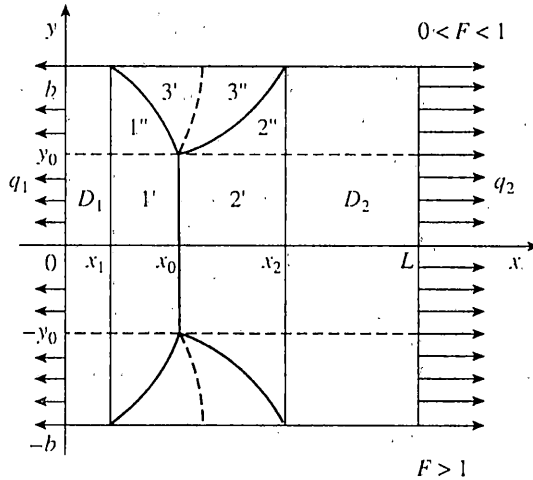
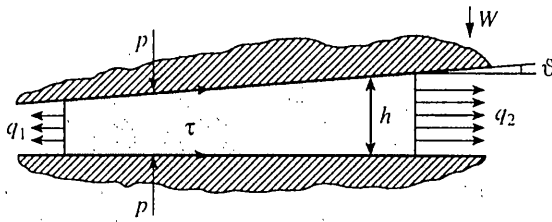
Граничные условия при отсутствии нагрузок ($\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$) на прямоугольном контуре в этих случаях непрерывны и имеют вид: $p = 2\tau_s$. Возводя в квадрат левые и правые части каждой из полученных систем уравнений и сложив результаты, для определения давления p получаем нелинейное уравнение в частных производных первого порядка следующего вида:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 = \left[\frac{2\tau}{h} \right]^2 \quad (1.7)$$

В случае применения гипотезы "полной пластичности", получаем [6, 7]: $u \neq 0, v \neq 0, \sigma_x = \sigma_y = \sigma_s - p$ и уравнения равновесия (1.6) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Граничные условия для p при отсутствии нагрузок теперь имеют вид $p = \sigma_s$. Возводя в квадрат левые и правые части первого и второго уравнения полученной системы и сложив результаты, приходим снова к уравнению (1.7). Таким образом, давления p определяются одним и тем же уравнением и в подобластях, где обе компоненты



скорости течения отличны от нуля и возможно применение гипотезы "полной пластичности" $\sigma_x = \sigma_y$, так и в подобластях, где, например, $v=0$, $\sigma_x = 2\tau_S - p$, $\sigma_y = (\sigma_x - p)/2$ и применение гипотезы "полной пластичности" $\sigma_x = \sigma_y$ означает равенство всех трех нормальных напряжений $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, превращая при $\sigma_S = \text{const}$ обрабатываемый материал в несжимаемую жидкость.

Учитывая этот факт, для решения задач свободного осаживания тонкого пластического слоя между поверхностями при отсутствии нагрузок на контуре предлагается использовать метод неопределенных граничных условий [1], состоящий из двух этапов для уточнения модели напряженно-деформированного состояния. На вспомогательном этапе решения на контуре области D_0 задаются непрерывные, но неопределенные граничные условия $p = n\sigma_S$, где n может быть равно либо 1, либо $2/\sqrt{3}$ и вводится вспомогательная функция обобщенного давления

$$\bar{Z} = \int \frac{p}{n\sigma_S} \frac{dp}{2\tau} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.7) теперь имеет вид

$$\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{h^2(x, y, t)} \quad (1.9)$$

При нулевых граничных условиях $\bar{Z} = 0$ на контуре области D_0 решение уравнения (1.9) определяется видом функции h и формой области D_0 .

В подобластях области D_0 , в которых решение уравнения (1.9) показывает $\partial\tilde{Z}/\partial y = 0$ (или $\partial\tilde{Z}/\partial x = 0$) должна быть использована одномерная модель А. Нádai при $v = 0$ (или $u = 0$), а применение гипотезы "полной пластичности" допустимо только для тех подобластей области D_0 , в которых $\partial\tilde{Z}/\partial x \neq 0$, $\partial\tilde{Z}/\partial y \neq 0$ и $u \neq 0$, $v \neq 0$.

2. Постановка задачи. Слой пластического вещества сжимается между двумя сближающимися со скоростью W жесткими практически недеформируемыми плитами, наклоненными одна к другой под углом ϑ и в начальный момент времени $t = 0$ ограничен прямоугольным контуром $x = 0$, $x = L$, $y = \pm b$ (фигура). Прямоугольные координаты x , y введены в плоскости основания. На стороне $x = 0$ действует натяжение q_1 и на ней $\sigma_x = q_1$. К стороне $x = L$ приложено натяжение q_2 и на ней $\sigma_x = q_2$. На сторонах $y = \pm b$ нагрузка отсутствует и на них $\sigma_y = 0$.

Текущая толщина h деформируемого слоя определяется выражением

$$h = h_0 - Wt + \gamma x = \gamma(x + \lambda), \quad \gamma = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \lambda = (h_0 - Wt) \operatorname{ctg} \vartheta$$

где h_0 — толщина слоя на линии $x = 0$ в начальный момент $t = 0$. Предполагается, что $\gamma \ll 1$. При $\gamma = 0$ приходим к задаче осаивания тонкого слоя между параллельными плитами при действии продольных натяжений. Разработанный метод может быть применен и к задачам осаивания тонкого пластического слоя штампом с криволинейным контуром для текущей толщины $h(x)$, являющейся функцией одной координаты x , при условии $dh/dx \ll 1$.

Относительно напряжений трения τ , следуя А. Нádai [5], считаем, что τ определяется законом Кулона $\tau = \mu p$ (μ — коэффициент трения), пока оно меньше предела текучести на сдвиг τ_s , либо напряжение трения равно пределу текучести на сдвиг и имеется участок прилипания (закон Прандтля) $\tau = \tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$.

3. Метод решения задачи. Применяя метод декомпозиции, изложенный в [2], проводим прежде всего неизвестные линии $x = x_1$, $x = x_2$, на которых, по предположению, прекращается действие продольных натяжений и на которых $\sigma_x = 0$. Таким образом из области течения D выделяется область D_0 , на контуре которой нагрузки отсутствуют и согласно метода неопределенных граничных условий задаются неизвестные граничные условия в виде $p = n\sigma_s$, а обобщенное давление \tilde{Z} вводится формулой (1.8). Решая уравнение (1.9) одним из известных методов [12–15] при непрерывных граничных условиях $\tilde{Z} = 0$ на контуре области D_0 , на вспомогательном этапе исследования убеждаемся, что в подобластях 1 и 2 справедлива модель А. Нádai, верная и в областях D_1, D_2 : $v = 0$, $\sigma_x = 2\tau_s - p$, $\sigma_y = (\sigma_x - p)/2 = \tau_s - p$.

В подобластях 3, 4 справедлива гипотеза "полной" пластичности $\sigma_x = \sigma_y = q = \sigma_s - p$ и следовательно на отрезках $x_1 \leq x \leq x_2$ линий $y = \pm b$, где $\sigma_y = 0$ должно выполняться граничное условие $p = \sigma_s$. Таким образом, для получения непрерывных граничных условий на всем контуре области D_0 неизвестные линии $x = x_1$, $x = x_2$ должны проходить так, чтобы и на них было $p = \sigma_s$. Для n получаем значение $n = 1$, а обобщенное давление $\tilde{Z} = Z$ вводится по формуле:

$$Z = \int_{\sigma_s}^p \frac{dp}{2\tau} \quad (3.1)$$

Уравнение (1.7) теперь имеет вид

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{h^2} \quad (3.2)$$

После нахождения обобщенного давления Z из (3.2), истинные контактные давле-

ния p_+ в зонах трения по закону Кулона и давления p_- в зонах трения по закону Прандтля определяются, согласно (1.8), по следующим формулам:

$$p_+ = \sigma_s \exp(2\mu Z), \quad p < \tau_s / \mu$$

$$p_- = \frac{\tau_s}{\mu} [1 + \ln(\sqrt{3}\mu) + 2\mu Z], \quad p \geq \frac{\tau_s}{\mu} \quad (3.3)$$

Ввиду симметрии процесса, рассматриваются решения при $y \geq 0$ для подобластей 1, 2, 3 выделенной области D_0 .

4. Обобщенное и контактные давления. Решая уравнение (3.2) при нулевых граничных условиях $Z = 0$ на контуре области D_0 , в каждой из подобластей 1, 2, 3 находим следующие значения обобщенного давления Z :

$$Z^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{x + \lambda}{x_1 + \lambda}, \quad Z^{(2)} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{x_2 + \lambda}{x + \lambda} \quad (4.1)$$

$$Z^{(3)} = \frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{b - y}{x + \lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{b - y}{x + \lambda} \right)^2} \right]$$

Истинные контактные давления p_+ в зонах кулонова трения и давления p_- на участках прилипания по закону Прандтля находим, подставив (4.1) в (3.3). При этом в подобластях 1 и 2 области D_0 окрестности линий $x = x_1$, $x = x_2$ оказываются зонами трения по закону Кулона. Поскольку давления p определяются одним и тем же уравнением (1.7) и в областях D_1 , D_2 и в области D_0 , то согласно факту из теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [15] о возможности в случае двух независимых переменных продолжения их решений вблизи границы вдоль характеристик на односвязные области, прилегающие к границам и целиком состоящие из проекций характеристик, мы можем продолжить значения $p_+^{(1)}$, $p_+^{(2)}$ из подобластей 1 и 2 на области D_1 , D_2 до линии $x = 0$, на которой, согласно модели А. Надаи, $p = 2\tau_s - q_1$ и до линии $x = L$, на которой $p = 2\tau_s - q_2$, получив следующие соотношения:

$$\sigma_s \left(\frac{\lambda}{x_1 + \lambda} \right)^{2\mu/\gamma} = 2\tau_s - q_1, \quad \sigma_s \left(\frac{x_2 + \lambda}{L + \lambda} \right)^{2\mu/\gamma} = 2\tau_s - q_2$$

Отсюда получаем значения x_1 , x_2 :

$$x_1 = \lambda \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} - \lambda, \quad x_2 = (L + \lambda) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{\gamma/2\mu} - \lambda \quad (4.2)$$

Объединим теперь область D_1 с подобластью 1, а область D_2 с подобластью 2 области D_0 и будем именовать эти расширенные области областями 1 и 2, а подобласть 3 назовем областью 3. После необходимых вычислений для давлений в областях 1, 2, 3 получим

$$p_+^{(1)} = (2\tau_s - q_1) \left(1 + \frac{x}{\lambda} \right)^{2\mu/\gamma}, \quad p_+^{(2)} = (2\tau_s - q_2) \left(\frac{L + \lambda}{x + \lambda} \right)^{2\mu/\gamma}$$

$$p_+^{(3)} = \sigma_s \left[\frac{b - y}{x + \lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{b - y}{x + \lambda} \right)^2} \right]^{2\mu/\gamma} \quad (4.3)$$

$$p_-^{(1)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left\{ 1 + \ln \left[\sqrt{3}\mu \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right) \right] + \frac{2\mu}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{x}{\lambda} \right) \right\}$$

$$p_-^{(2)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left\{ 1 + \ln \left[\sqrt{3}\mu \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right) \right] + \frac{2\mu}{\gamma} \ln \frac{L+\lambda}{x+\lambda} \right\}$$

$$p_-^{(3)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left\{ 1 + \ln(\sqrt{3}\mu) + \frac{2\mu}{\gamma} \ln \left[\frac{b-y}{x+\lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{b-y}{x+\lambda} \right)^2} \right] \right\}$$

Участок прилипания, на котором действуют давления $p_-^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) расположен при этом полностью внутри области D_0 . Его границы определяются из условия $p = \tau_s/\mu$ и в областях 1, 2, 3 проходят, соответственно, по прямым:

$$x = \lambda \left[\sqrt{3}\mu \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right) \right]^{-\gamma/2\mu} - \lambda$$

$$x = (L + \lambda) \left[\sqrt{3}\mu \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right) \right]^{-\gamma/2\mu} - \lambda$$

$$y = b + \frac{x + \lambda}{2} \left[(\sqrt{3}\mu)^{\gamma/2\mu} - (\sqrt{3}\mu)^{-\gamma/2\mu} \right]$$

Линии пересечения областей 1–2, 1–3, 2–3 определяются как следы ребер поверхности контактного давления $p(x, y)$ из уравнений $p^{(1)} = p^{(2)}$, $p^{(1)} = p^{(3)}$, $p^{(2)} = p^{(3)}$. Чтобы характеризовать расположение областей 1, 2, 3, вводится параметр $F = (x_2 - x_1)/2b$, который с учетом (4.2) имеет вид

$$F = \frac{x_2 - x_1}{2b} = \frac{1}{2b} \left[(L + \lambda) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} - \lambda \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} \right] \quad (4.4)$$

Линиями пересечения областей 1–3 и 2–3 являются параболы

$$y = b + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} - \frac{(x + \lambda)^2}{2\lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{\gamma/2\mu} \quad (4.5)$$

$$y = b - \frac{L + \lambda}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{\gamma/2\mu} + \frac{(x + \lambda)^2}{2(L + \lambda)} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} \quad (4.6)$$

Анализ (4.4)–(4.6) показывает, что при $0 < F < 1$ границы областей 1, 2, 3 пересекаются в одной точке (x_0, y_0) , где

$$x_0 = \sqrt{\lambda(L + \lambda)} \left(\frac{2\tau_s - q_2}{2\tau_s - q_1} \right)^{\gamma/4\mu} - \lambda$$

$$y_0 = b - \frac{x_2 - x_1}{2} = b(1 - F)$$

При этом области 1 и 2 соприкасаются по отрезку $|y| \leq y_0$ линии $x = x_0$. Кривые пересечения областей 1–3 и 2–3 проходят от точки (x_0, y_0) до точек (x_1, b) и (x_2, b) на линии $y = b$.

При $F = 1$ области 1 и 2 соприкасаются в одной точке $(x_0, 0)$ на оси $y = 0$.

При $F > 1$ области 1 и 2 вообще не соприкасаются между собой, параболы (4.5) и (4.6) пересекают ось $y = 0$ в точках с абсциссами

$$x_3 = \lambda \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_S} \right)^{-\gamma/2\mu} \sqrt{1 + \frac{2b}{\lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_S} \right)^{\gamma/2\mu}} - \lambda$$

$$x_4 = (L + \lambda) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_S} \right)^{\gamma/2\mu} \sqrt{1 - \frac{2b}{L + \lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_S} \right)^{-\gamma/2\mu}} - \lambda$$

При $F = 0$ области 3 и 4 в очаге деформации отсутствуют, имеются только области 1 и 2, разделенные линией $x = x_0$.

5. Скорости течения. Скорости u, v находятся из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{W - \gamma u}{h} \quad (5.1)$$

$$u \partial p / \partial y = v \partial p / \partial x$$

с граничными условиями: $v = 0, u = 0$ на линиях пересечения областей 1–2, 1–3 и 2–3.

Учитывая (4.3), из второго уравнения (5.1) находим, что в областях 1 и 2 при любых значениях параметра F всегда $v = 0$. Для определения u в случае $0 < F < 1$ разделим области 1 и 2 на зоны 1', 2' для $0 \leq y \leq y_0$ и 1'', 2'' для $y_0 \leq y \leq b$. В случае $F = 0$ в областях 1 и 2 остаются только зоны 1', 2', а при $F \geq 1$ только зоны 1'', 2''.

Решая уравнение (5.1), получаем следующие выражения компоненты u в соответствующих зонах областей 1 и 2:

$$u^{(1',2')} = \frac{W}{\gamma} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda(L + \lambda)}}{x + \lambda} \left(\frac{2\tau_S - q_2}{2\tau_S - q_1} \right)^{\gamma/4\mu} \right] = u(x) \quad (5.2)$$

$$u^{(1'')} = \frac{W}{\gamma} \left[1 - \frac{\lambda}{x + \lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_S} \right)^{-\gamma/2\mu} \sqrt{1 + \frac{2(b-y)}{\lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_S} \right)^{\gamma/2\mu}} \right] = u(x, y)$$

$$u^{(2'')} = \frac{W}{\gamma} \left[1 - \frac{L + \lambda}{x + \lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_S} \right)^{\gamma/2\mu} \sqrt{1 - \frac{2(b-y)}{L + \lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_S} \right)^{-\gamma/2\mu}} \right] = u(x, y)$$

В области 3 из (5.1), учитывая (4.3), находим соотношение: $u^{(3)} = v^{(3)}(b-y)/(x+\lambda)$, а для определения $v^{(3)}$ получаем неоднородное линейное уравнение в частных производных первого порядка

$$(b-y) \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x} + (x+\lambda) \frac{\partial v^{(3)}}{\partial y} = \frac{W}{\gamma} \quad (5.3)$$

которому соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{b-y} = \frac{dy}{x+\lambda} = \gamma \frac{dv^{(3)}}{W} \quad (5.4)$$

Два первых интеграла системы (5.4) будут

$$\Psi_1 \equiv (x + \lambda)^2 + (b - y)^2 = C_1^2 \quad (5.5)$$

$$\Psi_2 \equiv \gamma \frac{v^{(3)}}{W} + \arccos \frac{x + \lambda}{\sqrt{(x + \lambda)^2 + (b - y)^2}} = C_2$$

Как показано в работах [13, 14] с помощью перехода к новым ортогональным координатам r, ψ по формулам

$$x = \frac{2r\psi}{r^2 + 1} - \lambda, \quad y = b - \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \psi$$

первый интеграл (5.5) представляет собой уравнение линии тока $\psi = \text{const}$ в виде дуги окружности, по касательной к которой направлен вектор скорости течения частиц материала. При этом в случае $0 < F \leq 1$ область 3 разделяется на зоны 3' и 3'' дугой окружности

$$(x + \lambda)^2 + (b - y)^2 = \frac{(x_1 + x_2 + 2\lambda)^2}{4} = \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} + \frac{L + \lambda}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{\gamma/2\mu} \right]^2$$

а в случае $F > 1$ разделяется на зоны 3', 3'', 3''' дугами окружностей

$$(x + \lambda)^2 + (b - y)^2 = (x_1 + \lambda + b)^2 = \left[\lambda \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} + b \right]^2$$

$$(x + \lambda)^2 + (b - y)^2 = (x_2 + \lambda + b)^2 = \left[(L + \lambda) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{\gamma/2\mu} + b \right]^2$$

Решение уравнения (5.3) записывается в виде функции $\Phi(\Psi_1, \Psi_2) = 0$. Произвольная функция Φ при $0 < F \leq 1$ определяется из граничных условий $v^{(3)} = 0$ на параболах (4.5) и (4.6). В случае $F > 1$ произвольная функция Φ определяется из нулевых граничных условий для скорости $v^{(3)}$ на участках парабол (4.5), (4.6) и отрезке $[x_3, x_4]$ линии $y = 0$.

После необходимых вычислений для $v^{(3')}, v^{(3'')}, v^{(3''')}$ окончательно получаем следующие выражения

$$v^{(3')} = \frac{W}{\gamma} \arccos A'$$

$$A' = \frac{2\lambda \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} + (b - y) \left[1 - \left(\frac{\lambda}{x + \lambda} \right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/\mu} \right]}{\left[1 + \left(\frac{\lambda}{x + \lambda} \right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/\mu} \right] \sqrt{(x + \lambda)^2 + (b - y)^2}} \quad (5.6)$$

$$v^{(3'')} = \frac{W}{\gamma} \arccos A''$$

$$A'' = \frac{\frac{2(x + \lambda)^2}{L + \lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/2\mu} + (b - y) \left[\left(\frac{x + \lambda}{L + \lambda} \right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/\mu} - 1 \right]}{\left[\left(\frac{x + \lambda}{L + \lambda} \right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sigma_s} \right)^{-\gamma/\mu} + 1 \right] \sqrt{(x + \lambda)^2 + (b - y)^2}}$$

$$v^{(3''')} = \frac{W}{\gamma} \arccos \frac{(x + \lambda)^2 + b(b - y)}{\sqrt{(x + \lambda)^2 + b^2} \sqrt{(x + \lambda)^2 + (b - y)^2}}$$

Подставив в (5.2) значения $x = 0$, $x = L$, а в (5.6) значение $y = b$, можно теперь получить значения величин u_1 , u_2 скоростей перетекания частиц через линии $x = 0$, $x = L$ и значение величины u_+ скорости перетекания частиц через отрезок $x_1 \leq x \leq x_2$ боковой стороны $y = b$.

Полученные результаты показывают, что линия, на которой $u = 0$, $v = 0$ проходит по отрезку $-y_0 \leq y \leq y_0$ линии $x = x_0$ и в точках $(x_0, \pm y_0)$ она разветвляется на ветви, проходящие по линиям пересечения областей 1–3, 2–3, 1–4, 2–4, пересекающих линии $y = \pm b$ в переменных точках $(x_1, \pm b)$, $(x_2, \pm b)$, положение которых зависит от величин натяжений q_1 , q_2 и значений остальных параметров.

С ростом натяжений получаем: $x_2 - x_1 \rightarrow 0$; $y_0 \rightarrow b$. Из условия $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ получаем критерий $F = 0$, при выполнении которого в D всюду $v = 0$ и подобласти 3 и 4 отсутствуют. Учитывая (4.4), критерий $F = 0$ запишется в следующем виде:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_1^+}{\sigma_S} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{q_2^+}{\sigma_S} \right) = \left(1 + \frac{L}{\lambda} \right)^{-2\mu/\gamma}$$

Анализ полученных решений показывает, что при отсутствии натяжений и для малых натяжений при $0 \leq q_1 < 0,155\sigma_S$; $0 \leq q_2 < 0,155\sigma_S$ контактные давления p терпят разрыв в угловых точках контура, но непрерывны в остальной части области течения, а напряжения σ_x , σ_y терпят разрыв на линиях пересечения областей 1–3 и 2–3, но непрерывны на линии пересечения областей 1–2 и в остальной части области D . При $0,155\sigma_S \leq q_1 < q_1^+$; $0,155\sigma_S \leq q_2 < q_2^+$ давления p всюду непрерывны, а напряжения σ_x , σ_y по-прежнему разрывны на ребрах пересечений областей 1–3 и 2–3. И только при $q_1 = q_1^+$, $q_2 = q_2^+$ напряженно-деформированное состояние всюду непрерывно в области течения D , при этом на линии $x = x_0$, на которой $u = 0$ давления и напряжения непрерывны, но их производные не определены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fomin L.F. Some analytical criteria for automation of a rolling of a thin strip // Proc. 4th ECPD Intern. Conf. on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems, Moscow, 1998. Belgrade: ECPD, 1998. P. 146–149.
2. Фомин Л.Ф. Метод декомпозиции в задаче прокатки тонкой полосы с натяжениями // Материалы Междунар. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. М.: Изд-во МГУ, 1996. Т. 2. С. 351–353.
3. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 102–113.
4. Kármán Th. Beitrag zur Theorie des Walzvorganges // ZAMM. 1925. Bd. 5. H. 2. S. 139–142.
5. Nadai A. The forces required for rolling steel strip under tension // J. Appl. Mech. 1939. V. 6. № 2. P. A54–A62.
6. Ильюшин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 265–288.
7. Ильюшин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 693–713.
8. Шевченко К.Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. М.: Высш. шк., 1970. 351 с.
9. Бровман М.Я. Применение теории пластичности в прокатке. М.: Металлургия, 1991. 265 с.

10. Бровман М.Я. Энергосиловые параметры и усовершенствование технологии прокатки. М.: Металлургия, 1995. 256 с.
11. Хáар А., Кáрман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 41–56.
12. Арутюнов Ю.С., Гонор А.Л. Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 166–171.
13. Арутюнов Ю.С. Определение усилий прессования и поля скоростей при осаживании тонкого клина прямоугольной формы в плане // Инж. ж. МТТ. 1966. № 2. С. 116–118.
14. Арутюнов Ю.С. Осаживание тонкого клина прямоугольной формы в плане // Науч. тр. ВЗМИ. 1968. Вып. 6. С. 5–15.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.04.1995