

УДК 539.3

© 2000 г. В.И. ОСТРИК, А.Ф. УЛИТКО

КОНТАКТ ДВУХ УПРУГИХ КЛИНЬЕВ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

В работе [1] изучена задача о контакте жесткого и упругого клиньев, которые до нагружения соприкасаются своими вершинами. Силы трения, возникающие в зоне контакта, не учитывались. Полученная парная система интегральных уравнений сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано, что контактные напряжения неограничены вблизи вершины упругого клина и имеют при этом логарифмическую особенность в случае угла раствора клина, не превышающего π . Численно найдено распределение контактных напряжений.

Ниже рассматривается более общая задача о контакте двух упругих клиньев с учетом сил трения, возникающих в зоне контакта. Полученное сингулярное интегральное уравнение второго рода с разностным ядром на полуоси сведено к краевой задаче Римана для аналитических функций. Коэффициент задачи допускает факторизацию в виде канонических произведений, что позволяет записать решение в явном виде. Получено явное выражение для контактных напряжений.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Пусть два упругих клина с углами полураствора α_1 и α_2 , оси которых совпадают, касаются друг друга своими вершинами (фиг. 1). Клинья сжимаются под действием напряжений, приложенных на бесконечности, с главным вектором P , направленным к вершине клина, и главным моментом, равным нулю, для каждого клина. При таком нагружении клинья деформируются и их берега входят в контакт вблизи их общей вершины. Будем считать, что силы трения, возникающие при контактном взаимодействии берегов клиньев, следуют закону Кулона. Длина зоны контакта заранее неизвестна и может быть определена в процессе решения задачи. Для того, чтобы не выходить за рамки линейной теории упругости, будем также считать углы зазора между клиньями $\varepsilon = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$ достаточно малыми.

Для каждого клина введем местную полярную систему координат. Область k -го клина зададим неравенствами $0 \leq r < \infty$, $-\alpha_k \leq \theta_k \leq \alpha_k$ ($k = 1, 2$). Граничные условия в зоне контакта $0 \leq r \leq l$ (l – длина зоны контакта) и вне ее запишем в виде

$$u_{\theta}^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1} - u_{\theta}^{(2)}|_{\theta_2=\mp\alpha_2} = \pm(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)r \quad (0 \leq r \leq l) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1} = \sigma_{\theta}^{(2)}|_{\theta_2=\mp\alpha_2} \quad (0 \leq r \leq l) \quad (1.2)$$

$$\tau_{r\theta}^{(k)}|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = \pm(-1)^k \mu_0 \sigma_{\theta}^{(k)}|_{\theta_k=\pm\alpha_k} \quad (k = 1, 2), \quad (0 \leq r \leq l) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\theta}^{(k)}|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(k)}|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (r > l) \quad (1.4)$$

где $u_{\theta}^{(k)}$ – окружные перемещения, $\sigma_{\theta}^{(k)}$ и $\tau_{r\theta}^{(k)}$ – нормальные окружные и касательные напряжения в k -м клине ($k = 1, 2$), $|\mu_0|$ – коэффициент трения.

В граничном условии (1.3) знак коэффициента μ_0 заранее неизвестен и зависит от того, в каком соотношении находятся радиальные перемещения $u_r^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1}$ и

$u_r^{(2)}|_{\theta_2=\mp\alpha_2}$ берегов клиньев в зоне контакта. Если $u_r^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1} < u_r^{(2)}|_{\theta_2=\mp\alpha_2}$ ($0 \leq r \leq l$), то $\mu_0 > 0$; если же $u_r^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1} > u_r^{(2)}|_{\theta_2=\mp\alpha_2}$ ($0 \leq r \leq l$), то $\mu_0 < 0$. Поэтому выбор знака величины μ_0 должен быть подтвержден после решения задачи выполнением соответствующего условия на радиальные перемещения.

В результате нагружения в клиньях устанавливается плоская деформация, симметричная относительно их общей оси. Общее решение уравнений равновесия, удовлетворяющее условию связи нормальных и касательных напряжений в форме уравнения (1.3), получим с помощью интегрального преобразования Меллина. Характеристики упругого поля определяются интегралами Римана – Меллина с одной неизвестной плотностью $a(s)$, являющейся изображением функции напряжения $\sigma_\theta^{(k)}/(2G_1)$ при $\theta_k = \pm\alpha_k$. В частности, на боковых гранях $\theta_k = \pm\alpha_k$ упругих клиньев будем иметь

$$u_\theta^{(k)}|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = \mp \frac{G_1}{G_k m_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{2(m_k-1)(\cos 2s\alpha_k - \cos 2\alpha_k) - (-1)^k \mu_0 [(m_k-2) \times \\ \times \sin 2s\alpha_k - (m_k s - 2m_k + 2) \sin 2\alpha_k]\} \frac{a(s)}{s(\sin 2s\alpha_k + s \sin 2\alpha_k)} r^{-s} ds \quad (1.5)$$

$$u_r^{(k)}|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = \frac{G_1}{G_k m_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{(m_k s + 2m_k - 2) \sin 2\alpha_k - (m_k - 2) \sin 2s\alpha_k - \\ - 2(-1)^k \mu_0 (m_k - 1)(\cos 2s\alpha_k + \cos 2\alpha_k)\} \frac{a(s)}{s(\sin 2s\alpha_k + s \sin 2\alpha_k)} r^{-s} ds$$

$$\left. \frac{\sigma_\theta^{(k)}}{2G_1} \right|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = \pm (-1)^k \frac{1}{\mu_0} \left. \frac{\tau_{r\theta}^{(k)}}{2G_1} \right|_{\theta_k=\pm\alpha_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds \quad (k=1, 2), \quad \left(-\frac{1}{2} \leq c < 0\right)$$

где m_k – число Пуассона, G_k – модуль сдвига k -го клина.

Длина l области контакта определяется условием равновесия

$$2 \int_0^l (\sin \beta(r) + \mu_0 \cos \beta(r)) \sigma_\theta^{(1)} \Big|_{\theta_1=\alpha_1} dr = -P, \quad \beta(r) = \alpha_1 + \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} \Big|_{\theta_1=\alpha_1} \quad (1.6)$$

2. Вывод сингулярного интегрального уравнения с разностным ядром на полуоси.

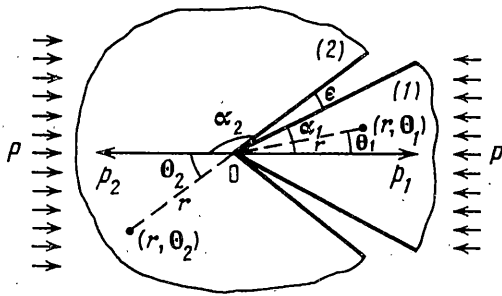
Подставляя в граничное условие (1.1) выражения для окружных перемещений из (1.5), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{M(s)}{s} a(s) r^{-s} ds = -\varepsilon r \quad (0 \leq r \leq l), \quad \varepsilon = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.1)$$

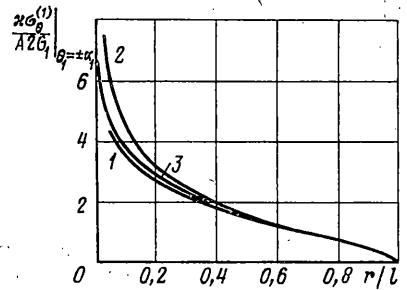
$$M(s) = \sum_{k=1}^2 G_1 (G_k m_k)^{-1} \{2(m_k-1)(\cos 2s\alpha_k - \cos 2\alpha_k) - (-1)^k \mu_0 [(m_k-2) \sin 2s\alpha_k - \\ - (m_k s - 2m_k + 2) \sin 2\alpha_k]\} (\sin 2s\alpha_k + s \sin 2\alpha_k)^{-1} \quad (2.2)$$

Обращая последнее соотношение (1.5) с учетом условий (1.4), выразим искомую плотность $a(s)$ через контактные напряжения:

$$a(s) = \int_0^l \sigma(y) y^s dy, \quad \sigma(r) = \frac{\sigma_\theta^{(k)}}{2G_1} \Big|_{\theta_k=\pm\alpha_k} \quad (0 \leq r \leq l) \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставим выражение для $a(s)$ из (2.3) в уравнение (2.1), возьмем $s = -it$ и поменяем порядок интегрирования. После замены переменных

$$r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta} \quad (2.4)$$

и введения новой неизвестной функции

$$\varphi(\eta) = \sigma(le^{-\eta})e^{-\eta} \quad (2.5)$$

получим интегральное уравнение первого рода на полуоси с разностным ядром:

$$\int_0^{\infty} k_0(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = -\varepsilon e^{-\xi} \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad k_0(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{M(-it)}{-it} e^{-it(\xi-\eta)} d\tau \quad (2.6)$$

При дифференцировании интегрального уравнения (2.6) ядро $k_0'(\xi - \eta)$ представится расходящимся интегралом. Чтобы избежать появления расходящихся интегралов, функцию $M(s)$ представим в виде

$$M(s) = \gamma_0 - \gamma_1 \operatorname{tg} s - g(s) \quad (2.7)$$

$$\gamma_0 = \mu_0 \left(\frac{m_1 - 2}{m_1} - \frac{G_1}{G_2} \frac{m_2 - 2}{m_2} \right), \quad \gamma_1 = \frac{2(m_1 - 1)}{m_1} \kappa, \quad \kappa = 1 + \frac{G_1 m_1 (m_2 - 1)}{G_2 m_2 (m_1 - 1)}$$

Функция $g(s)$, определенная равенствами (2.7), (2.2), в полосе $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} s < 0$ экспоненциально затухает при $|s| \rightarrow \infty$. Теперь ядро интегрального уравнения (2.6), после вычисления соответствующих интегралов, запишется в виде

$$k_0(\xi - \eta) = \frac{\gamma_0}{2} (\operatorname{sign}(\xi - \eta) - 1) + \frac{1}{\pi} \gamma_1 \ln \operatorname{th} \frac{\pi}{4} |\xi - \eta| - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{g(-it)}{-it} e^{-it(\xi-\eta)} d\tau \quad (2.8)$$

Таким образом, ядро интегрального уравнения (2.6) имеет логарифмическую особенность при $\eta \rightarrow \xi$. Интеграл в (2.8) допускает дифференцирование любое число раз по переменной ξ .

После выполненных преобразований интегральное уравнение (2.6) принимает вид

$$\gamma_0 \int_{\xi}^{\infty} \varphi(\eta) d\eta + \int_0^{\infty} k_1(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta = \varepsilon e^{-\xi} \quad (0 \leq \xi < \infty) \quad (2.9)$$

$$k_1(\xi - \eta) = -k_0(\xi - \eta) + \frac{\gamma_0}{2} (\operatorname{sign}(\xi - \eta) - 1)$$

Дифференцируя уравнение (2.9), приходим к сингулярному интегральному уравнению

второго рода с разностным ядром на полуоси

$$\gamma_0 \varphi(\xi) - \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = \varepsilon e^{-\xi} \quad (0 \leq \xi < \infty) \quad (2.10)$$

$$k(\xi - \eta) = -\frac{\gamma_1}{2} \operatorname{csch} \frac{\pi}{2} (\xi - \eta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} g(-i\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau$$

3. Сведение интегрального уравнения (2.10) к краевой задаче Римана и ее решение. Продифференцируем уравнение (2.10) и распространим его на всю числовую ось, положив $\varphi(\xi) = 0$ при $\xi < 0$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_0 \varphi'(\xi) - \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < 0 \\ \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, & -\infty < \xi < 0 \end{cases} = \\ = \begin{cases} -\varepsilon e^{-\xi}, & 0 \leq \xi < \infty \\ 0, & -\infty < \xi < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

При этом, ввиду того, что уравнение $(\operatorname{sh} 2\alpha t + \tau \sin 2\alpha)/\tau = 0$ не имеет корней в полосе $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Im} \tau \leq 0$, контур интегрирования в интеграле $\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \tau g(-i\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau$ можно сместить на действительную ось, положив $c = 0$.

Применяя к уравнению (3.1) интегральное преобразование Фурье, получаем для функций

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = -\frac{m_1}{2(m_1-1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta \quad (3.2)$$

аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости, при $z = t$ ($\operatorname{Im} t = 0$) соотношение

$$itM(-it)\Phi^+(t) + \frac{2(m_1-1)}{m_1} \Phi^-(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-it}$$

Таким образом приходим к краевой задаче Римана для полуплоскости:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + h(t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (3.3)$$

$$G(t) = \frac{1}{i\lambda(t)} \prod_{j=1}^2 (\operatorname{sh} 2\alpha_j t + t \sin 2\alpha_j), \quad h(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} A \frac{G(t)}{1-it}$$

$$A = -\frac{1}{\pi} \frac{m_1}{m_1-1} (\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$$

Решение задачи (3.3) определяется полюсами функции $G(t)$, или корнями уравнения

$$\begin{aligned} \lambda(t) \equiv \sum_{j=1}^2 \kappa_j \left\{ \operatorname{ch} 2\alpha_j t - \cos 2\alpha_j + (-1)^j \mu_0 \left[i \frac{m_j-2}{2(m_j-1)} \operatorname{sh} 2\alpha_j t - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(i \frac{m_j}{2(m_j-1)} t + 1 \right) \sin 2\alpha_j \right] \right\} (\operatorname{sh} 2\alpha_{3-j} t + t \sin 2\alpha_{3-j}) = 0, \quad \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \kappa - 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4) для определенности будем считать, что $\alpha_2 > \alpha_1$.

Уравнение (3.4), кроме двухкратного корня $t = 0$, имеет конечное множество простых чисто мнимых корней (при $G_1 \neq G_2$) и счетное множество простых комплексных корней, причем комплексные корни имеют вид $t = \pm\sigma + it$. При $G_1 = G_2$ корень $t = -i$ становится двухкратным. В случае $\alpha_2 > \pi/2$ в полосах $-1 < \text{Im } t < 0$ и $0 < \text{Im } t < 1$ имеется по одному мнимому корню; в случае $\alpha_2 < \pi/2$ в указанных полосах не содержится ни одного корня уравнения.

Корни уравнения (3.4) разобьем на два счетных множества. Корни первого множества (все они комплексные) из IV квадранта комплексной плоскости обозначим через $t_n^{(1)}$ ($n = 1, 2, \dots$), ($\text{Re } t_n^{(1)} > 0$, $\text{Im } t_n^{(1)} < 0$), а корни этого множества из I квадранта — через $t_n^{\prime(1)}$ ($n = 1, 2, \dots$), ($\text{Re } t_n^{\prime(1)} > 0$, $\text{Im } t_n^{\prime(1)} > 0$). Асимптотическое поведение корней первого множества следующее:

$$t_n^{(1)} = -\frac{\pi i}{\alpha_1} \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\alpha_1} \ln q_1 n + o(1),$$

$$t_n^{\prime(1)} = \frac{\pi i}{\alpha_1} \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\alpha_1} \ln q_1 n + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

$$q_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} \frac{q_0 \sin 2\alpha_1}{2\kappa - i\mu_0((m_1 - 2)/(m_1 - 1) - (\kappa - 1)(m_2 - 2)/(m_2 - 1))},$$

$$q_0 = 2(\kappa - 1) + i\mu_0 \left(\frac{m_1}{m_1 - 1} + (\kappa - 1) \frac{m_2 - 2}{m_2 - 1} \right)$$

Корни второго множества, в которое входят все мнимые корни, из IV квадранта комплексной плоскости, включая мнимую отрицательную полуось, обозначим через $t_n^{(2)}$ ($\text{Re } t_n^{(2)} \geq 0$, $\text{Im } t_n^{(2)} < 0$):

$$t_n^{(2)} = -i\eta_n^{(2)} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N + 1), \quad t_n^{(2)} = \xi_n^{(2)} - i\eta_n^{(2)} \quad (n = 2N + 2, \dots)$$

а корни из I квадранта, включая мнимую положительную полуось, — через $t_n^{\prime(2)}$ ($\text{Re } t_n^{\prime(2)} \geq 0$, $\text{Im } t_n^{\prime(2)} > 0$)

$$t_n^{\prime(2)} = i\eta_n^{\prime(2)} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N'), \quad t_n^{\prime(2)} = \xi_n^{\prime(2)} + i\eta_n^{\prime(2)} \quad (n = 2N' + 1, \dots)$$

Асимптотическое поведение корней второго множества следующее:

$$t_n^{(2)} = -\frac{\pi i}{\alpha_2} (n - N - 1) + \frac{1}{2\alpha_2} \ln q_2 (n - N - 1) + o(1)$$

$$(3.6)$$

$$t_n^{\prime(2)} = \frac{\pi i}{\alpha_2} (n - N' - 1/2) + \frac{1}{2\alpha_2} \ln q_2 (n - N' - 1/2) + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

$$q_2 = -\mu_0 \frac{\pi}{\alpha_2} \frac{\kappa}{q_0} \frac{m_1}{m_1 - 1} \sin 2\alpha_2$$

Комплексные корни уравнений $\text{sh } 2\alpha_j t + t \sin 2\alpha_j = 0$ ($\alpha_j \neq \pi/2$, $j = 1, 2$) обозначим $\pm x_n^{(j)} \pm iy_n^{(j)}$ ($x_n^{(j)} > 0$, $y_n^{(j)} > 0$), $n = 1, 2, \dots$. Асимптотика этих корней следующая:

$$z_n^{(j)} = x_n^{(j)} + iy_n^{(j)} = \frac{\pi i}{\alpha_j} \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\alpha_j} \ln \left(\frac{2\pi n}{\alpha_j} \sin 2\alpha_j \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Уравнение $\text{sh } 2\alpha_2 t + t \sin 2\alpha_2 = 0$ при $\alpha_2 > \pi/2$ имеет два мнимых корня $z_0 = iy_0$, $\bar{z}_0 = -iy_0$, причем $1/2 < y_0 < 1$.

Для решения краевой задачи (3.3) требуется факторизовать функцию $G(z)$, т.е. представить ее в виде

$$G(z) = X^+(z)/X^-(z) \quad (3.8)$$

где $X^+(z)$ и $X^-(z)$ – функции, аналитические и не обращающиеся в нуль соответственно в верхней ($\text{Im } z \geq 0$) и нижней ($\text{Im } z \leq 0$) полуплоскостях. Факторизацию функции $G(z)$ произведем путем ее разложения в бесконечное произведение. Мероморфная функция $G(z)$ представляется в виде $G(z) = G_1(z)/G_2(z)$, где $G_1(z)$ и $G_2(z)$ – целые функции, имеющие порядок роста, равный 1 при $|z| \rightarrow \infty$; нули функций $G_1(z)$, $G_2(z)$ простые. Тогда канонические произведения для функций $G_1(z)$, $G_2(z)$ имеют род, равный 1 [2]. Выделяя в бесконечном произведении для функции $G(z)$ множители с нулями и полюсами из верхней полуплоскости, получаем разложение функции $X^-(z)$ в бесконечное произведение

$$X^-(z) = \frac{1}{1-z/z_0} \prod_{n=1}^{N'} \frac{(1-z/t_n^{(1)})(1+z/\bar{t}_n^{(1)})(1+iz/\eta_{2n-1}^{(2)})(1+iz/\eta_{2n}^{(2)})}{(1-z/z_n^{(1)})(1+z/\bar{z}_n^{(1)})(1-z/z_n^{(2)})(1+z/\bar{z}_n^{(2)})} \times \\ \times \prod_{n=N'+1}^{\infty} \frac{(1-z/t_n^{(1)})(1+z/\bar{t}_n^{(1)})(1-z/t_{n+N'}^{(2)})(1+z/\bar{t}_{n+N'}^{(2)})}{(1-z/z_n^{(1)})(1+z/\bar{z}_n^{(1)})(1-z/z_n^{(2)})(1+z/\bar{z}_n^{(2)})} \quad (3.9)$$

Асимптотическая оценка функции $X^-(z)$ на бесконечности в нижней полуплоскости получена по методике [2] с привлечением асимптотических формул (3.5)–(3.7) и имеет вид

$$X^-(z) = O(|z|^p), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{Im } z \leq 0) \quad (3.10)$$

$$p = \frac{1}{2} - 2p_1 - 2p_2 \quad (0 < p < 1), \quad p_j = \frac{\arg q_j}{2\pi} \quad (j = 1, 2)$$

Решение краевой задачи (3.3) при условии, что функция $\Phi^+(z)$ из (3.2) затухает на бесконечности, а функция $X^-(z)$ имеет оценку (3.10), получаем, используя [3], в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{\sqrt{2\pi} Ai X^+(z)}{4X^-(-i)(z+i)} \quad (\text{Im } z \geq 0) \quad (3.11)$$

4. Распределение контактных напряжений. Результаты вычислений. Обращая первое соотношение (3.2) и учитывая выражения (3.11), (3.8), имеем

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt = \frac{Ai}{4X^-(-i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t)X^-(t)}{t+i} e^{-i\xi t} dt \quad (4.1)$$

Сходимость последнего интеграла обеспечивается оценкой (3.10). Вычисляя интеграл (4.1) по теории вычетов и переходя к функции $\sigma(r)$ (2.3) с помощью замен (2.5), (2.4), определяем нормальные контактные напряжения

$$\frac{\sigma_{\theta}^{(1)}}{A2G_1} \Big|_{\theta = \pm\alpha_1} = \begin{cases} \frac{\pi}{\mu_0} \frac{m_1 - 1}{m_1} \frac{1}{1 - G_1/G_2}, & G_1 \neq G_2 \\ \frac{\pi}{2} \left(-\mu_1 \ln \frac{r}{l} + \mu_2 + i\mu_1 \frac{X^-(-i)}{X^-(-i)} \right), & G_1 = G_2 \end{cases} + \\ + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (t_k(t_k + i)\lambda'(t_k))^{-1} \left(\prod_{j=1}^2 (\text{sh } 2\alpha_j t_k + t_k \sin 2\alpha_j) \right) \frac{X^-(t_k)}{X^-(-i)} \left(\frac{r}{l} \right)^{it_k - 1} \quad (4.2)$$

$$\mu_1 = \{\alpha_1 + (\kappa - 1)\alpha_2 + \mu_0[\alpha_1 \operatorname{ctg} 2\alpha_1 - (\kappa - 1)\alpha_2 \operatorname{ctg} 2\alpha_2]\}^{-1}$$

$$\mu_2 = \mu_1^2 \sum_{j=1}^2 \kappa_j \{\alpha_j / 2 + (-1)^j \mu_0 [\alpha_j^2 \operatorname{cosec}^2 2\alpha_j - m_1(2m_j - 1)(2m_1 - 1)m_j]^{-1} \operatorname{ctg} 2\alpha_j\}$$

где t_k ($k = 1, 2, \dots$) – корни уравнения (3.4) (за исключением $t = -i$) из нижней полуплоскости. Касательные контактные напряжения $\tau_{\theta}^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1}$ пропорциональны нормальным $\sigma_{\theta}^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1}$ и определяются равенством (1.3).

Найденное распределение контактных напряжений (4.2) позволяет сделать вывод о том, что контактные напряжения в случае, когда больший из углов $\alpha_2 > \pi/2$, неограничены в окрестности вершины клина и имеют при этом степенную особенность вида $r^{-\gamma}$, где $\gamma = 1 - it_1$ ($0 < \gamma < 1$, t_1 – наименьший по модулю корень уравнения (3.4) из нижней полуплоскости). В случае $\alpha_2 < \pi/2$, $G_1 \neq G_2$ контактные напряжения конечны и в вершине клина принимают значение

$$\sigma_{\theta}^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1, r=0} = -\frac{2}{\mu_0} \frac{G_1 G_2}{G_2 - G_1} (\pi - \alpha_1 - \alpha_2) \quad (4.3)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что в этом случае контактные напряжения в вершине клина не зависят от величины приложенной нагрузки P . Наконец, в случае $\alpha_2 < \pi/2$, $G_1 = G_2$ контактные напряжения неограничены и имеют логарифмическую особенность в окрестности вершины клина.

В области контакта необходимо выполнение условия $\sigma_{\theta}^{(1)}|_{\theta_1=\pm\alpha_1} < 0$. Из этого условия, в силу соотношений (4.3), в частности вытекает, что в случае $\alpha_2 < \pi/2$ следует взять $\mu_0 > 0$ при $G_1 > G_2$ и $\mu_0 < 0$ при $G_1 < G_2$. Как отмечалось при постановке задачи, выбор знака коэффициента μ_0 должен быть подтвержден соотношением радиальных перемещений контактирующих граней клиньев. Для этого найдем радиальные перемещения $u_r^{(j)}|_{\theta_j=\pm\alpha_j}$ ($j = 1, 2$).

Подставим выражение для $a(s)$ из (2.3) во вторую формулу (1.5). После замен (2.4), (2.5), $s = -it$ и перемещения контура интегрирования на действительную ось получим

$$\left. \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} \right|_{\theta_j=\pm\alpha_j} = -\frac{G_1}{G_j m_j} e^{\xi} \int_0^{\infty} K_j(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta \quad (4.4)$$

$$K_j(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\tau) e^{-it(\xi - \eta)} d\tau \quad (4.5)$$

$$F_j(\tau) = \frac{(m_j \tau + 2i(m_j - 1) \sin 2\alpha_j - (m_j - 2) \operatorname{sh} 2\alpha_j \tau - 2i\mu_0 (-1)^j (m_j - 1) (\operatorname{ch} 2\alpha_j \tau + \cos 2\alpha_j))}{\operatorname{sh} 2\alpha_j \tau + \tau \sin 2\alpha_j} \quad (j=1, 2)$$

Применяя к равенству (4.4) преобразование Фурье, с помощью соотношений (3.2), (3.8), (3.11) найдем

$$\left. \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} \right|_{\theta_j=\pm\alpha_j} = \frac{\pi}{2} \frac{G_1}{G_j m_j} \frac{Ae^{\xi}}{X^{-}(-i)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_j(t)G(t)X^{-}(t)}{t+i} e^{-i\xi t} dt \quad (j=1, 2) \quad (4.6)$$

Вычисляя интеграл по теории вычетов и интегрируя полученное выражение по r при

условии, что $u_r^{(j)} = 0$ при $r = 0$, получаем

$$\frac{u_r^{(j)}}{Al} \Big|_{\theta_j = \pm \alpha_j} = \begin{cases} \left[\frac{\pi}{\mu_0} \frac{m_1 - 1}{m_1} \frac{G_1}{G_j} \frac{1}{1 - G_1/G_2} \left(\frac{m_j - 2}{m_j} + 2(-1)^{j+1} \mu_0 \frac{m_j - 1}{m_j} \operatorname{ctg} 2\alpha_j \right) \frac{r}{l}, & G_1 \neq G_2 \\ \frac{\pi}{2} \frac{G_1}{G_j m_j} \left[-\mu_1^{(j)} \frac{r}{l} \ln \frac{r}{l} + \mu_2^{(j)} \frac{r}{l} + \mu_1^{(j)} \left(1 + \frac{iX'^-(-i)}{X^-(-i)} \right) \frac{r}{l} \right], & G_1 = G_2 \end{cases}$$

$$- \frac{\pi}{2} \frac{G_1}{G_j m_j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sh} 2\alpha_{3-j} t_k + t_k \sin 2\alpha_{3-j}) \lambda_j(t_k) X^-(t_k)}{i t_k^2 (t+i) \lambda'(t_k) X^-(-i)} \left(\frac{r}{l} \right)^{it_k} \quad (4.7)$$

$$\mu_1^{(j)} = \mu_1 [m_j - 2 + 2(-1)^{j+1} \mu_0 (m_j - 1) \operatorname{ctg} 2\alpha_j]$$

$$\mu_2^{(j)} = \mu_1 [m_j / 2 - (m_j - 2) \alpha_j \operatorname{ctg} 2\alpha_j + 2(-1)^{j+1} \mu_0 (m_j - 1) \alpha_j + \mu_1^{(j)} \mu^{(j)}]$$

$$\mu^{(j)} = \sum_{k=1}^2 \kappa_j \{ \alpha_k \alpha_j \operatorname{ctg} 2\alpha_j + (-1)^{k+1} \mu_0 [\alpha_k \operatorname{ctg} 2\alpha_k - \alpha_{3-j} \alpha_k \operatorname{ctg} 2\alpha_{3-j} \operatorname{ctg} 2\alpha_k - \alpha_k^2] \} -$$

$$-\mu_0 (\kappa - 1) \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{ctg} 2\alpha_1 \operatorname{ctg} 2\alpha_2$$

$$\lambda_j(t) = (m_j t + 2i(m_j - 1)) \sin 2\alpha_j - (m_j - 2) \operatorname{sh} 2\alpha_j t - 2i(-1)^j \mu_0 (m_j - 1) \times$$

$$\times (\operatorname{ch} 2\alpha_j t + \cos 2\alpha_j) \quad (j = 1, 2)$$

В каждом конкретном примере при расчете контактных напряжений (4.2) необходимо проверить, что в зоне контакта выполняется условие $u_r^{(1)}|_{\theta_1 = \pm \alpha_1} < u_r^{(2)}|_{\theta_2 = \pm \alpha_2}$, если μ_0 выбрано положительным, или же условие $u_r^{(1)}|_{\theta_1 = \pm \alpha_1} > u_r^{(2)}|_{\theta_2 = \pm \alpha_2}$ в противном случае.

Результаты вычислений контактных напряжений (4.2) в случае углов полураствора клиньев $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 2\pi/3$ ($m_1 = m_2 = 10/3$) представлены на фиг. 2. Кривая 1 отвечает значениям $\kappa = 1,5$, $\mu_0 = 0,3$. Для сравнения построены кривая 2, соответствующая контакту без трения ($\mu_0 = 0$, $\kappa = 1,5$), и кривая 3, соответствующая контакту упругого и абсолютно жесткого клиньев ($\kappa = 1$) с учетом сил трения ($\mu_0 = 0,3$). В указанных случаях особенности контактных напряжений в окрестности вершины клина имеют вид $r^{-0,375}$, $r^{-0,437}$, r^0 соответственно. В последнем случае контактные напряжения ограничены и в вершине клина (при $r/l = 0$) величина $\sigma_\theta^{(1)}/(A2G_1) = 7,3$. Вычисление радиальных перемещений (4.7) в случае кривых 1, 3 подтвердило допущение о том, что $\mu_0 > 0$.

Представленные результаты показывают, что вблизи общей вершины клиньев с увеличением коэффициента трения, также как и с увеличением жесткости второго клина, контактные напряжения снижаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Улитко А.Ф., Качаловская Н.Е. Контактное взаимодействие жесткого и упругого клиньев при первоначальном точечном касании в их общей вершине // Докл. НАН Украины. 1995. № 1. С. 51-54.
2. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640 с.

Сумы, Киев

Поступила в редакцию
21.01.1999