

УДК 539.3

© 2000 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, В.В. КЛИНДУХОВ

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУТОГО ОСНОВАНИЯ С НЕИДЕАЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Рассматриваются осесимметричные контактные задачи для двухслойного упругого основания (слой на полупространстве) в условиях неидеальной механической связи между слоями. Неидеальность возникает вследствие того, что между слоями, как правило, имеется тонкая прослойка из инородного материала. Это либо совокупность фрагментов локального разрушения поверхностей слоев, либо склеивающий слой материал. Неидеальность математически выражается тем, что вместо условий совпадения напряжений и перемещений на плоскости контакта слоев необходимо ставить на этой плоскости некоторые дифференциальные условия связи между напряжениями и перемещениями.

Приведены дифференциальные уравнения, описывающие эти связи между напряжениями и перемещениями для тонких упругих относительно жесткой и относительно мягкой прослоек. Для описанного двухслойного основания с прослойкой между слоями построены функции Грина (для случая жесткой и мягкой прослойки). Затем контактные задачи для такого основания сведены к интегральному уравнению первого рода с симметричным нерегулярным ядром относительно контактного давления между штампом и поверхностью основания. Путем модификации метода ортогональных многочленов и метода коллакации Мультиппа-Каландия разработаны два численно-аналитических способа приближенного решения этого интегрального уравнения.

В качестве примеров изучены случаи плоского и параболического штампов. Приведены некоторые численные результаты.

1. Пусть слой толщины H с механическими характеристиками G_1 и ν_1 через прослойку толщины $2h$ ($h \ll H$) с механическими характеристиками G_2 и ν_2 жестко соединен с полупространством с механическими характеристиками G_3 и ν_3 .

Для описания тонкой прослойки между слоями основания воспользуемся уточненными уравнениями осесимметричного деформирования тонких пластин, данными в работе [1] (формулы (1.9)), и с целью получения обобщимых результатов, оставляя главное, максимально упростим эти уравнения. В итоге, для относительно жестких прослоек ($G_2 > G_1$, $G_2 > G_3$), работающих в основном на растяжение-сжатие, получим соотношения

$$4G_2 h \Delta_* u_+ = -(1 - \nu_2)(\tau_+ - \tau_-) \quad (1.1)$$

$$\sigma_+ = \sigma_-, \quad w_+ = w_-, \quad u_+ = u_-$$

где u и w – перемещения соответственно по осям r и z в цилиндрической системе координат, τ и σ – касательное и нормальное напряжения на гранях прослойки, знак (+) придается величинам на верхней грани, а знак (–) – на нижней

$$\Delta_* = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \quad (1.2)$$

Для относительно мягких прослоек ($G_1 > G_2$, $G_3 > G_2$), работающих в основном на сдвиг, получим соотношения

$$G_2 h \Delta_*(u_+ - u_-) = -3(1 - \nu_2) \tau_+ \quad (1.3)$$

$$\sigma_+ = \sigma_-, \quad w_+ = w_-, \quad \tau_+ = \tau_-$$

Пусть, далее граница основания нагружена в круге радиуса a давлением $q(r)$. Рассмотрим следующие две задачи о равновесии основания под действием указанной нагрузки: *задача А* (жесткая прослойка) при $z = H$:

$$\sigma_z^{(1)} = -q(r) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1.4)$$

$$\sigma_z^{(1)} = 0 \quad (a < r < \infty), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty)$$

при $z = 0$ и $0 \leq r < \infty$:

$$4G_2 h \Delta_* u^{(1)} = -(1 - \nu_2)(\tau_{rz}^{(1)} - \tau_{rz}^{(3)}) \quad (1.5)$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(3)}, \quad w^{(1)} = w^{(3)}, \quad u^{(1)} = u^{(3)}$$

задача В (мягкая прослойка)

при $z = H$:

$$\sigma_z^{(1)} = -q(r) \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$\sigma_z^{(1)} = 0 \quad (a < r < \infty), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1.6)$$

при $z = 0$ и $0 \leq r < \infty$:

$$G_2 h \Delta_*(u^{(1)} - u^{(3)}) = -3(1 - \nu_2) \tau_{rz}^{(1)} \quad (1.7)$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(3)}, \quad w^{(1)} = w^{(3)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(3)}$$

Для обеих задач при $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ перемещения исчезают; верхний индекс 1 используется для величин в слое, а верхний индекс 3 используется для величин в полупространстве.

2. Краевые задачи *А* и *В* для уравнения Ламе в слое и в полупространстве могут быть решены с помощью преобразования Ханкеля. В качестве одного из результатов получим

$$w^{(1)}(r, H) = -\frac{1}{\theta_1 H} \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0\left(\frac{u\rho}{H}\right) J_0\left(\frac{ur}{H}\right) du \quad (2.1)$$

где $\theta_1 = G_1/(1 - \nu_1)$, $J_0(x)$ – функция Бесселя, функция $L(u)$ для задачи *А* имеет вид

$$L(u) = \frac{k\epsilon u A_1(u) + A_2(u)}{k\epsilon u A_3(u) + A_4(u)} \quad (2.2)$$

$$A_1(u) = N + P + (2N - 4Q - 4Qu)e^{-2u} + (P - N)e^{-4u}$$

$$A_2(u) = M + 4ue^{-2u} - Le^{-4u}$$

$$A_3(u) = N + P + (N + Q - 4Pu + 4Qu^2)e^{-2u} + (N - P)e^{-4u}$$

$$A_4(u) = M - (1 + 4u^2 + LM)e^{-2u} + Le^{-4u}$$

а в случае задачи В функция $L(u)$ имеет вид

$$L(u) = \frac{k\epsilon u B_1(u) + B_2(u)}{k\epsilon u B_3(u) + B_4(u)} \quad (2.3)$$

$$B_1(u) = R - Sue^{-2u} + Te^{-4u}$$

$$B_2(u) = 1 + n + (-2 + 4nu)e^{-2u} + (1 - n)e^{-4u}$$

$$B_3(u) = R + (U + Su^2)e^{-2u} - Te^{-4u}$$

$$B_4(u) = 1 + n + (-2n + 4u)e^{-2u} + (n - 1 - 4nu^2)e^{-4u}$$

В (2.2) и (2.3) введены следующие безразмерные комплексы и параметры:

$$\begin{aligned} L &= \frac{n\mu_1\kappa_3 - \mu_3\kappa_1}{n\mu_1\kappa_3 + \mu_3}, & M &= \frac{\mu_3\kappa_1 + n\mu_1}{n\mu_1 - \mu_3} \\ N &= \frac{2\kappa_1\mu_3^2}{(n\mu_1\kappa_3 + \mu_3)(n\mu_1 - \mu_3)}, & P &= \frac{2n\kappa_3\mu_1^2}{(n\mu_1\kappa_3 + \mu_3)(n\mu_1 - \mu_3)} \\ Q &= \frac{2\mu_3^2}{(n\mu_1\kappa_3 + \mu_3)(n\mu_1 - \mu_3)}, & R &= \frac{(\mu_3 + n\mu_1\kappa_3)(\mu_3\kappa_1 + n\mu_1)}{12n\mu_1^2\mu_3^2} \\ S &= \frac{(n\mu_1 - \mu_3)(\mu_3 + n\mu_1\kappa_3)}{12n\mu_1^2\mu_3^2}, & T &= \frac{(n\mu_1 - \mu_3)(n\mu_1\kappa_3 - \mu_3\kappa_1)}{12n\mu_1^2\mu_3^2} \\ U &= \frac{1 + \kappa_1^2}{12n\mu_1^2} - \frac{(\kappa_1 - 1)(\kappa_3 - 1)}{12\mu_1\mu_3} - \frac{n\kappa_3}{6\mu_3^2} \\ k &= \frac{\theta_2}{\theta_3}, \quad n = \frac{\theta_1}{\theta_3}, \quad \theta = \frac{G}{1 - \nu}, \quad \epsilon = \frac{h}{H}, \quad \mu = 1 - \nu, \quad \kappa = 3 - 4\nu \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь возможно перейти к рассмотрению контактных задач (для случаев жесткой и мягкой прослоек), т.е. задач о вдавлении в основание силой W гладкого жесткого штампа радиуса a (фиг. 1). Условие контакта между штампом и основанием имеет вид

$$w^{(1)} = -[\delta - f(r)] \quad (z = H, \quad 0 \leq r \leq a) \quad (2.5)$$

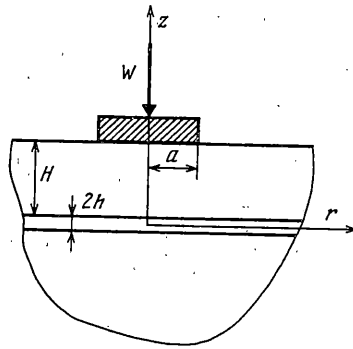
где δ – поступательное перемещение штампа по оси z , $f(r)$ – функция, описывающая форму основания штампа; (2.5) заменяет собой первое граничное условие в (1.4) и (1.6). Возникающие при этом краевые задачи (2.5), (1.4), (1.5) и (2.5), (1.6), (1.7) со смешанными граничными условиями будем по-прежнему называть задачами А и В (контактными).

Удовлетворяя условию контакта (2.5) с помощью соотношения (2.1), получим относительно контактного давления $q(r)$ следующее интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром:

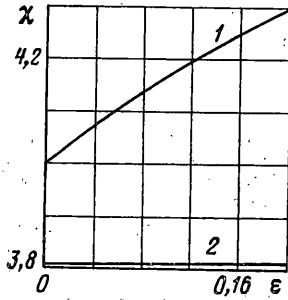
$$\int_0^a q(\rho) K\left(\frac{\rho}{H}, \frac{r}{H}\right) \rho d\rho = \theta_1 H [\delta - f(r)] \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2.6)$$

$$K(\sigma, \tau) = \int_0^\infty L(u) J_0(\sigma u) J_0(\tau u) du$$

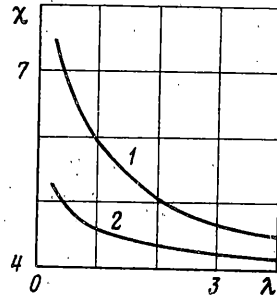
Нетрудно убедиться, что функции $L(u)$ вида (2.2) и (2.3) непрерывны при всех



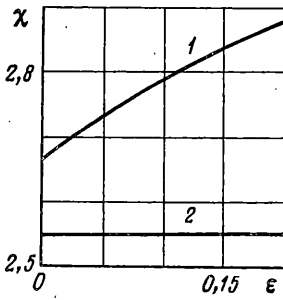
Фиг. 1



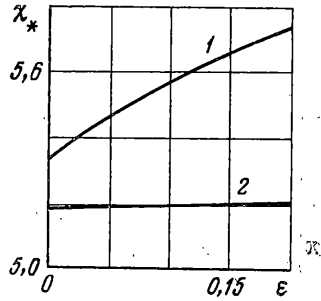
Фиг. 2



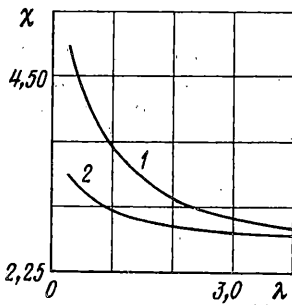
Фиг. 3



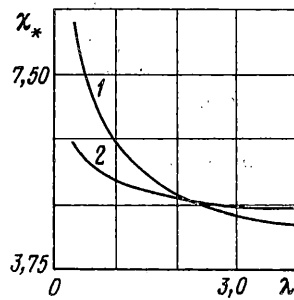
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

значениях $0 \leq u \leq \infty$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} L(u) &\rightarrow 1 + O(e^{-2u}) \quad (u \rightarrow \infty) \\ L(u) &\rightarrow C + O(u) \quad (u \rightarrow 0, C = \text{const}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

На основании первого условия (2.7) можно установить, что ядро $K(\sigma, \tau)$ имеет логарифмическую особенность при $\sigma \rightarrow \tau$.

К интегральному уравнению (2.6) необходимо добавить условие равновесия штампа

$$W = 2\pi \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \quad (2.8)$$

служащее для определения связи между вдавливающей силой W и внедрением штампа δ . В тех случаях, когда радиус a области контакта заранее неизвестен, для его определения к уравнению (2.6) и условию (2.8) добавляется еще одно условие

$$q(a) = 0 \quad (2.9)$$

Отметим, что при $\epsilon \rightarrow 0$ функции $L(u)$ для задач A и B сильно упрощаются (прослойка отсутствует) и интегральное уравнение (2.6) вырождается в уравнение, соответствующее контактной задаче о действии штампа на слой, жестко сцепленный с полупространством (A) или лежащий без трения на полупространстве (B) [2].

3. Интегральное уравнение первого рода (2.6) может быть сведено [3,4] к следующему интегральному уравнению второго рода с разностным ядром:

$$\begin{aligned} p(x) - \frac{1}{\pi H} \int_{-a}^a p(\xi) M\left(\frac{\xi-x}{H}\right) d\xi &= \theta_1 g(x) \quad (|x| \leq a) \\ M(y) &= \int_0^\infty [1 - L(u)] \cos uy dy \end{aligned} \quad (3.1)$$

причем функции $p(x)$ и $g(x)$ – четные и связаны с функциями $q(r)$ и $\delta(r) = \delta - f(r)$ соотношениями

$$\begin{aligned} q(r) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{p(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{p'(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \right] \\ g(x) &= \delta(0) + |x| \int_0^{|x|} \frac{\delta'(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Модифицируя известный метод ортогональных многочленов [5,6], изложим далее первый численно-аналитический способ приближенного решения интегрального уравнения (3.1) или с учетом первой формулы (3.2) – интегрального уравнения (2.6).

Будем искать решение интегрального уравнения (3.1) в виде ряда по четным полиномам Лежандра, а именно

$$p(x) = \theta_1 a \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_{2i}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.1), умножая почленно на $P_{2k}(x/a) dx$ и интегрируя затем от $-a$ до a , с учетом ортогональности полиномов Лежандра получим

$$\frac{2}{4k+1} a_k - \frac{1}{\pi \lambda} \sum_{i=0}^{\infty} a_i I_{ik}(\lambda) = b_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$I_{ik}(\lambda) = \int_{-1}^1 P_{2k}(x) dx \int_{-1}^1 P_{2i}(\xi) M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (3.4)$$

$$b_k = \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a g(x) P_{2k}\left(\frac{x}{a}\right) dx, \quad \lambda = \frac{H}{a}$$

Бесконечная алгебраическая система (3.4) служит для определения неизвестных коэффициентов a_i в разложении (3.3). На основании свойств (2.7) функции $L(u)$ можно показать, что при достаточной гладкости функции $\delta(r)$ эта алгебраическая система квазирегулярна при всех значениях безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$ и поэтому может решаться методом редукции [7].

Подставляя выражения (3.1) для ядра $M(y)$ во вторую формулу (3.4) и принимая во внимание соотношение [8] (2.17.7(1)):

$$\int_{-1}^1 \cos bx P_{2n}(x) dx = (-1)^n \sqrt{\frac{2\pi}{b}} J_{2n+1/2}(b) \quad (3.5)$$

представим коэффициенты $I_{ik}(\lambda)$ в виде однократных интегралов

$$I_{ik}(\lambda) = 2\pi\lambda(-1)^{i+k} \int_0^\infty [1-L(u)] J_{2i+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2k+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u} \quad (3.6)$$

что чрезвычайно важно при практическом использовании предлагаемого способа.

Подставляя (3.3) в первую формулу (3.2) и учитывая соотношения [9] (8.915(2)) и [5] (9.8, стр. 302):

$$P'_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (4n-4k-1) P_{2n-2k-1}(x)$$

$$\int_x^1 \frac{P_{2n+1}(y) dy}{\sqrt{y^2-x^2}} = \frac{(-1)^n (2n)!!}{(2n+1)!!} P_{2n+1}(\sqrt{1-x^2}) \quad (3.7)$$

найдем для функции $q(r)$ следующее выражение

$$q(r) = \frac{2\theta_1 a}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^{i-m-1} \times \right. \\ \left. \times \frac{(4i-4m-1)(2i-2m-2)!!}{(2i-2m-1)!!} P_{2i-2m-1}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \right\} \quad (3.8)$$

позволяющее получить приближенное выражение для контактного давления, лишь только найдено приближенное решение бесконечной алгебраической системы (3.4).

Практически способ применим при $\lambda \in (1/4, \infty)$; чем больше параметр λ , тем более нужно редуцировать алгебраическую систему (3.4). Обычно в указанном диапазоне изменения λ хорошая точность достигается редуцированием системы (3.4) до двух – семи уравнений. Соотношение (2.8) в силу (3.8) и условия ортогональности полиномов Лежандра примет вид

$$W = 4\theta_1 a^2 a_0 \quad (3.9)$$

а соотношение (2.9), как видно из (3.8), представимо в форме

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0 \quad (3.10)$$

4. Модифицируя известный метод коллакации Мультиппа – Каландия [10, 11], изложим второй численно-аналитический способ приближенного решения интегрального уравнения (3.1) (или интегрального уравнения (2.6)).

Введем следующие безразмерные переменные и функции

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{p(ax')}{\theta_1 a}, \quad \psi(x') = \frac{g(ax')}{a} \quad (4.1)$$

и перепишем интегральное уравнение (3.1) следующим образом:

$$\varphi(x) - \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) + M\left(\frac{\xi+x}{\lambda}\right) \right] d\xi = \psi(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (4.2)$$

(здесь и далее штрихи у x' и ξ' для простоты записи опускаем).

Построим для функции $\varphi(x)$ четный интерполяционный полином Лагранжа по нулям полинома Лежандра $P_{2N+1}(x)$. Такой полином имеет вид

$$\varphi(x) \approx \frac{\varphi(0)P_{2N+1}(x)}{xP'_{2N+1}(0)} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x_n)xP_{2N+1}(x)}{(x^2 - x_n^2)P'_{2N+1}(x_n)} \quad (4.3)$$

$$(P_{2N+1}(x_n) = 0; \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad x_0 = 0)$$

где значения $x_n (n \geq 1)$ таковы

	x_1	x_2	x_3
$N=1$	0,74597		
$N=2$	0,53847	0,90618	
$N=3$	0,40584	0,74153	0,94907

Разделив выражение $xP_{2N+1}(x) - x_nP_{2N+1}(x_n)$ на $x^2 - x_n^2$, возможно формулу (4.3) представить в виде

$$\varphi(x) \approx \sum_{i=0}^N P_{2i}(x) \left[\frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)} a_{i0} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)} a_{in} \right] \quad (4.4)$$

Значения коэффициентов a_{in} для случаев $N = 1, 2, 3$ даны в таблице.

Далее, пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, на основании (4.4) нетрудно получить следующую квадратурную формулу типа Гаусса:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi \approx 2 \left[\frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)} a_{00} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)} a_{0n} \right] \quad (4.5)$$

Вычисляя с помощью (4.5) приближенно интеграл в (4.2) и полагая затем в полученном соотношении $x = x_m$ ($P_{2N+1}(x_m) = 0$), получим относительно значений функции $\varphi(x)$ в точках x_m ($m = 0, 1, \dots, N$), следующую систему алгебраических уравнений:

$$\varphi(x_m) - \frac{1}{\pi\lambda} \left\{ \frac{\varphi(0)a_{00}}{P'_{2N+1}(0)} \left[M\left(-\frac{x_m}{\lambda}\right) + M\left(\frac{x_m}{\lambda}\right) \right] + 2 \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x_n)a_{0n}}{P'_{2N+1}(x_n)} \left[M\left(\frac{x_n - x_m}{\lambda}\right) + M\left(\frac{x_n + x_m}{\lambda}\right) \right] \right\} = \psi(x_m) \quad (4.6)$$

После решения этой системы приближенное выражение для функции $p(x)$ (решение интегрального уравнения (3.1)) получим в виде

$$p(x) = \theta_1 a \sum_{i=0}^N a_i P_{2i}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (4.7)$$

$N = 1$	in	00	10	01	11		
	a_{in}	-0,6667	1,6667	0,8333	1,6667		
$N = 2$	in	00	10	01	20	11	02
	a_{in}	-0,0083	-1,3333	-2,6444	1,8000	0,1889	-4,0389
	in	21	12	22			
	a_{in}	1,8000	2,9778	1,8000			
$N = 3$	in	00	10	01	20	11	02
	a_{in}	-0,4571	1,1429	4,7746	-1,5429	-0,6046	9,7282
	in	30	21	12	03	31	22
	a_{in}	1,8471	-0,5334	-0,9052	5,3619	1,8571	1,8271
	in	13	32	23	33		
	a_{in}	3,4384	1,8571	3,9778	1,8571		

где коэффициенты a_i совпадают по форме с квадратной скобкой в (4.4). Теперь в силу аналогии (3.3) и (4.7) нетрудно прийти к формулам (3.8) – (3.10), где только суммировать по i нужно от 0 до N .

Практически изложенный способ применим при $\lambda \in (1/4, \infty)$; чем больше параметр λ , тем меньше нужно брать уравнений в алгебраической системе (4.6) (тем меньше N). Обычно в указанном диапазоне изменения λ хорошая точность достигается при $N = 1 \div 6$.

5. Далее, в качестве примеров задач A и B рассмотрим случай, когда $v_1 = v_2 = v_3 = v$. Тогда безразмерные комплексы и параметры (2.4) сильно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\kappa(n-1)}{\kappa n+1}, \quad M = \frac{\kappa+n}{n-1}, \quad N = \frac{2\kappa}{(n-1)(\kappa n+1)} \\
 P &= \frac{2\kappa n}{(n-1)(\kappa n+1)}, \quad Q = \frac{2}{(n-1)(\kappa n+1)} \\
 R &= \frac{(\kappa n+1)(\kappa+n)}{12n\mu^2}, \quad S = \frac{(n-1)(\kappa n+1)}{12n\mu^2} \\
 T &= \frac{\kappa(n-1)^2}{12n\mu^2}, \quad U = \frac{1+\kappa^2}{12n\mu^2} - \frac{(\kappa-1)^2}{12\mu^2} - \frac{\kappa n}{6\mu^2} \\
 k &= G_2 / G_3, \quad n = G_1 / G_3
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

При этом ядро $K(\sigma, \tau)$ вида (2.6) для обеих задач будет зависеть лишь от пяти безразмерных параметров k, ϵ, n, v и λ ; ниже примем $v = 1/3$.

Рассмотрим случай плоского штампа ($\delta(r) = \delta$, радиус a области контакта фиксирован). На фиг. 2 изображены зависимость величины $\chi = W/(\theta_1 \delta a)$ от параметра ϵ (здесь и далее задача A – кривая 1 и задача B – кривая 2). Для задачи A принято $k = 2$, а для задачи B принято $k = 1/2$. Остальные параметры для обеих задач взяты такими: $n = 1, \lambda = 1/2$. На фиг. 3 изображена зависимость величины χ от параметра λ . Для задачи A принято $k = 3/2, n = 1/2$, а для задачи B принято $k = 1/3, n = 2/3$. Оставшийся параметр ϵ для обеих задач взят равным $1/5$. Знание величины χ позволяет при заданной вдавливающей силе W найти внедрение штампа δ .

Рассмотрим случай параболического штампа ($\delta(r) = \delta - r^2/2R, R$ – радиус кривизны параболы в вершине, радиус a области контакта заранее неизвестен). На фиг. 4, 5 изображены зависимости соответственно величин $\chi = W/(\theta_1 \delta a)$ и $\chi_* = 2WR/(\theta_1 a^3)$ от параметра ϵ . Параметры k, n и λ для задач A и B приняты такими же, как и при

построении фиг. 2. На фиг. 6, 7 изображены зависимости величин χ и χ_* от параметра λ . Параметры k , n и λ для задач A и B приняты такими же, как и при построении фиг. 3. Знание величины χ_* позволяет при заданной вдавливающей силе W найти радиус области контакта a , затем по величине χ может быть найдено внедрение штампа δ .

Все вычисления проведены первым способом, второй способ дает аналогичные результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС-РФФИ (грант № 95-IN-RU-492), КЦФЕ (грант № 97-0-4.3-4) и РФФИ (грант № 99-01-00038).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авилякин В.И., Александров В.М., Коваленко Е.В.* Об использовании уточненных уравнений тонких покрытий в теории осесимметричных контактных задач для составных оснований // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1010-1018.
2. *Александрова Г.П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97-106.
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. *Александров В.М.* Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102-108.
5. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *Александров В.М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1117-1131.
7. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 696 с.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
10. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
11. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.02.1999