МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. Н.А. БАЗАРЕНКО

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе используется конформное отображение прямоугольной области на заданную односвязную область D. В системе изометрических ортогональных координат u, v решается плоская задача теории упругости, которая сводится к отысканию бигармонической функции F по граничным условиям на границе L области D. При построении функции F применяется оператор-функция $E(v)$ такая, что $E(v)\psi_k(u) = \psi_k(u + iv)$ $(k = 1, 2)$.

Удовлетворяя условиям на одной части границы L при $v = v_k$, получены два операторных уравнения относительно функций $\psi_k(u)$. Произвол, входящий в $\psi_k(u)$, позволяет удовлетворить граничным условиям и на другой части границы L при $u = u_k$. Операторный метод иллюстрирован решением задачи для прямоугольника.

1. Постановка задачи. Пусть аналитическая функция комплексного переменного

$$z = f(\zeta) = x(u,v) + iy(u,v) \quad (z = x + iy, \ \zeta = u + iv) \tag{1.1}$$

конформно отображает прямоугольную область D^* $(|u| \leqslant u_0, |v| \leqslant v_0)$ в ζ-плоскости на заданную область D в z-плоскости. Рассматривается первая основная задача теории упругости (задача о плоской деформации) для цилиндрического тела, поперечным сечением которого является область D. Граничные условия на боковой (цилиндрической) поверхности тела сводятся к условиям на границе L области D и имеют вид

$$\text{при} \quad u = u_j \quad \sigma_u = \sigma_{1j}(v), \quad \tau_{uv} = \tau_{1j}(v) \quad (u_j = (-1)^j u_0) \tag{1.2}$$

$$\text{при} \quad v = v_j \quad \sigma_v = \sigma_{2j}(u), \quad \tau_{uv} = \tau_{2j}(u) \quad (v_j = (-1)^j v_0, \ j = 1,2) \tag{1.3}$$

Здесь σ_u, σ_v, τ_{uv} – компоненты тензора напряжений; σ_{kj}, τ_{kj} – функции интенсивности внешних усилий.

Разыскивается поле напряжений и смещений в области D.

Как известно, напряжения σ_u, σ_v, τ_{uv} выражаются через бигармоническую функцию F так:

$$g\sigma_u = \partial_v x\partial_v(\partial_x F) + \partial_v y\partial_v(\partial_y F), \quad g\tau_{uv} = \partial_v x\partial_v(\partial_y F) - \partial_v y\partial_v(\partial_x F) \tag{1.4}$$

$$g\sigma_v = \partial_u x\partial_u(\partial_x F) + \partial_u y\partial_u(\partial_y F), \quad g\tau_{uv} = \partial_u y\partial_u(\partial_x F) - \partial_u x\partial_u(\partial_y F) \tag{1.5}$$

$$g = (\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2, \quad \partial_x \equiv \partial/\partial x, \quad \partial_y \equiv \partial/\partial y, \quad \partial_u \equiv \partial/\partial u, \quad \partial_v \equiv \partial/\partial v$$

Из (1.4), (1.5) можно получить соотношения

$$\partial_v(\partial_x F) = \sigma_u\partial_v x - \tau_{uv}\partial_v y, \quad \partial_v(\partial_y F) = \sigma_u\partial_v y + \tau_{uv}\partial_v x \tag{1.6}$$

$$\partial_u(\partial_x F) = \sigma_v\partial_u x + \tau_{uv}\partial_u y, \quad \partial_u(\partial_y F) = \sigma_v\partial_u y - \tau_{uv}\partial_u x \tag{1.7}$$

Принимая во внимание равенства

$$\partial_v F = (\partial_x F)\partial_v x + (\partial_y F)\partial_v y \tag{1.8}$$

$$\partial_u F = (\partial_x F)\partial_u x + (\partial_y F)\partial_u y \tag{1.9}$$

и интегрируя соотношения (1.6), (1.8) и (1.7), (1.9) на линиях соответственно $u = u_j$ и $v = v_j$ $(j = 1, 2)$, с учетом граничных условий (1.2), (1.3) получим [1]:

$$\partial_u F(u,v_j) = P_j(u) \equiv (\delta_j q_1 + Y_j(u))\partial_u x(u,v_j) +$$

$$+(\delta_j p_1 + X_j(u))\partial_u y(u,v_j) \quad (\delta_1 = 0, \delta_2 = 1) \tag{1.10}$$

$$\partial_v F(u,v_j) = Q_j(u) \equiv (\delta_j p_1 + X_j(u))\partial_u x(u,v_j) - (\delta_j q_1 + Y_j(u))\partial_u y(u,v_j) \quad (j = 1,2) \tag{1.11}$$

$$\partial_u F(u_j,v) = T_j(v) \equiv \left(\delta_j p_1^* + Y_j^*(v)\right)\partial_v y(u_j,v) - \left(\delta_j q_1^* + X_j^*(v)\right)\partial_v x(u_j,v) \tag{1.12}$$

$$F(u_j,v) = R_j(v) \equiv \delta_j\left(x(u_2,v)p_1^* + y(u_2,v)q_1^* - m_{21}\right) +$$

$$+x(u_j,v)Y_j^*(v) + y(u_j,v)X_j^*(v) - M_{1j}(v) \tag{1.13}$$

$$Y_j^*(v) = \int_{v_1}^{v} Y_{1j}dv, \quad X_j^*(v) = \int_{v_1}^{v} X_{1j}dv, \quad Y_j(u) = \int_{u_1}^{u} Y_{2j}du, \quad X_j(u) = \int_{u_1}^{u} X_{2j}du \tag{1.14}$$

$$Y_{1j} = \sigma_{1j}(v)\partial_v x(u_j,v) - \tau_{1j}(v)\partial_v y(u_j,v), \quad X_{1j} = \sigma_{1j}(v)\partial_v y(u_j,v) + \tau_{1j}(v)\partial_v x(u_j,v)$$

$$Y_{2j} = \sigma_{2j}(u)\partial_u x(u,v_j) + \tau_{2j}(u)\partial_u y(u,v_j), \quad X_{2j} = \sigma_{2j}(u)\partial_u y(u,v_j) - \tau_{2j}(u)\partial_u x(u,v_j)$$

$$M_{1j}(v) = \int_{v_1}^{v} (x(u_j,v)Y_{1j} + y(u_j,v)X_{1j})dv,$$

$$M_{2j}(u) = \int_{u_1}^{u} (x(u,v_j)\,Y_{2j} + y(u,v_j)\,X_{2j})du \tag{1.15}$$

$$p_j = X_j^*(v_2), \quad q_j = Y_j^*(v_2), \quad p_j^* = Y_j(u_2), \quad q_j^* = X_j(u_2) \tag{1.16}$$

$$m_{1j} = M_{1j}(v_2), \quad m_{2j} = M_{2j}(u_2) \quad (j = 1,2) \tag{1.17}$$

Формулы (1.10)–(1.13) получены при условии, что в точке (u_1, v_1) выполняются равенства $F = \partial_x F = \partial_y F = 0$ (1.17), а функции σ_{kj}, τ_{kj} удовлетворяют уравнениям

$$p_2^* - p_1^* = q_2 - q_1, \quad q_2^* - q_1^* = p_2 - p_1, \quad m_{22} - m_{21} = m_{12} - m_{11} \tag{1.18}$$

Пусть при движении по границе L от точки A к точке B область D остается слева. Тогда главный вектор $\{X; Y\}$ и главный момент $M°$ от внешних усилий на участке AB определяется через функцию F так:

$$X = \partial_y F\big|_A^B, \quad Y = -\partial_x F\big|_A^B, \quad M° = (F - x\partial_x F - y\partial_y F)\Big|_A^B \tag{1.19}$$

Если обозначить величины $\{X; Y\}$, $M°$ на линиях $u = u_j$ и $v = v_j$ соответственно через $\{x_j; y_j\}$, m_j и $\{x_j^*; y_j^*\}$, m_j^*, то с помощью формул (1.10)–(1.13), (1.19) можно найти:

$$x_j = (-1)^j p_j, \quad y_j = -(-1)^j q_j, \quad m_j = -(-1)^j m_{1j},$$

$$x_j^* = -(-1)^j q_j^*, \quad y_j^* = (-1)^j p_j^*, \quad m_j^* = (-1)^j m_{2j} \quad (j = 1,2) \tag{1.20}$$

Отсюда следует, что соотношения (1.18) являются уравнениями равновесия цилиндрического тела.

2. Оператор-функции и их свойства. Введем в рассмотрение оператор-функцию $E(v)$, определив ее на множестве ω аналитических функций $\psi(u)$ следующим образом

$$E(v)\psi(u) = \psi(u+iv) \tag{2.1}$$

где $\psi(u) \in \omega$, $u + iv \in D_\psi$, D_ψ – область аналитичности функции $\psi(\zeta)$. Отсюда непосредственно находим оператор-функции

$$C(v) = 0,5[E(v)+E(-v)] \quad \text{и} \quad S(v) = -0,5i[E(v)-E(-v)] \tag{2.2}$$

такие, что

$$E(v) \equiv C(v)+iS(v), \quad C(v)\psi(u) \equiv \mathrm{Re}\{\psi(u+iv)\}, \quad S(v)\psi(u) \equiv \mathrm{Jm}\{\psi(u+iv)\} \tag{2.3}$$

Оператор-функции $C(\xi)$ и $S(\eta)$ коммутативны и обладают следующими свойствами:

$$C(-\xi) = C(\xi), \quad S(-\xi) = -S(\xi), \quad C(0)=1, \quad S(0)=0; \quad C^2(\xi)+S^2(\xi) \equiv 1 \tag{2.4}$$

$$C(\xi)C(\eta) - S(\xi)S(\eta) = C(\xi+\eta), \quad S(\xi)C(\eta)+C(\xi)S(\eta) = S(\xi+\eta) \tag{2.5}$$

$$\partial_v C(v) = -S(v)\cdot\partial_u, \quad \partial_v S(v) = C(v)\cdot\partial_u \tag{2.6}$$

$$C(\xi)(\varphi\cdot\psi) = (C(\xi)\varphi)C(\xi)\psi - (S(\xi)\varphi)S(\xi)\psi$$

$$S(\xi)(\varphi\cdot\psi) = (S(\xi)\varphi)C(\xi)\psi + (C(\xi)\varphi)S(\xi)\psi \quad (\varphi,\psi\in\omega) \tag{2.7}$$

Аналитическую функцию комплексного переменного $\psi(\zeta)$ в каждой внутренней точке a области аналитичности D_ψ можно разложить в сходящийся ряд Тейлора

$$\psi(\zeta) = \psi(a) + \frac{\psi'(a)}{1!}(\zeta-a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(\zeta-a)^2 + \ldots + \frac{\psi^{(n)}(a)}{n!}(\zeta-a)^n + \ldots \tag{2.8}$$

если будет выполняться условие

$$|\zeta - a| < |\zeta_* - a| \tag{2.9}$$

где $\zeta_* = u_* + iv_*$ – ближайшая к точке a особая точка функции $\psi(\zeta)$. Вводя обозначения $a = u$, $\zeta - a = iv$ и используя символическую запись А.И. Лурье [2, 3], разложение (2.8) и условие (2.9) перепишем в виде

$$\psi(u+iv) = \exp(iv\partial_u)\psi(u) \tag{2.10}$$

$$v^2 < (u-u_*)^2 + v_*^2 \tag{2.11}$$

Формула (2.10), реализующая действие показательной оператор-функции $\exp(iv\,\partial_u)$ на функцию $\psi(u)$, имеет место лишь при выполнении условия (2.11) и ее смысл сводится к следующему: нужно представить $\exp(iv\partial_u)$ в форме ряда по степеням ∂_u и далее вернуть символам ∂_u^k $(k = 1, 2, \ldots)$ значение операторов дифференцирования функции $\psi(u)$, перед которой они написаны.

Пусть в области D_ψ°, где $D_\psi^\circ \in D_\psi$, выполняются условие (2.11) и равенство (2.10). Тогда две аналитические функции $E(v)\psi(u)$ и $\exp(iv\,\partial_u)\psi(u)$, определяемые соотношениями (2.1) и (2.10), равны в точках области D_ψ° и, следовательно, в силу теоремы о единственности аналитической функции первая из них является аналитическим продолжением второй на всю область D_ψ. Для частного случая, когда ω – множество целых функций, справедливо представление

$$E(v) \equiv \exp(iv\partial_u), \quad C(v) \equiv \cos v\partial_u, \quad S(v) \equiv \sin v\partial_u$$

3. Метод решения. Бигармоническую функцию F будем разыскивать в виде $F = F_0 + xF_1 + yF_2$, где F_k $(k = 0, 1, 2)$ – гармонические функции, определяемые соотношениями

$$F_k = C(v)\psi_k(u) + S(v)\psi_k^*(u) \quad (k = 0,1,2) \tag{3.1}$$

Здесь ψ_k, ψ_k^* – произвольные аналитические функции.

Подчиняя функции F_1, F_2 уравнениям Коши – Римана, с помощью формул (2.6) находим $\psi_1^*(u) = e_1 - \psi_2(u)$, $\psi_2^*(u) = e_2 + \psi_1(u)$ (e_1, e_2 – постоянные). В итоге для функции F получаем выражение

$$F = C(v)\psi_0(u) + S(v)\psi_0^*(u) + x(u,v)F_1 + y(u,v)F_2 \tag{3.2}$$

$$F_1 = C(v)\psi_1(u) - S(v)\psi_2(u), \quad F_2 = C(v)\psi_2(u) + S(v)\psi_1(u) \tag{3.3}$$

Координаты вектора смещения $\mathbf{U}$ определяются выражениями

$$2GU_x = \varkappa F_1 - \partial_x F, \quad 2GU_y = \varkappa F_2 - \partial_y F \tag{3.4}$$

$$2G\sqrt{g}U_u = \varkappa(F_1\partial_u x + F_2\partial_u y) - \partial_u F, \quad 2G\sqrt{g}U_v = \varkappa(F_2\partial_u x - F_1\partial_u y) - \partial_v F \tag{3.5}$$

Здесь G – модуль сдвига, $\varkappa = 4 - 4\nu$, ν – коэффициент Пуассона. Интегрируя равенства (1.7) на линии $v = 0$ и учитывая при этом соотношения (3.2)–(3.5) при $v = 0$, находим

$$\varkappa\psi_1(u) = 2Gu_x(u,0) + \int Y_0(u)du, \quad \varkappa\psi_2(u) = 2Gu_y(u,0) + \int X_0(u)du$$

$$\varkappa\psi_0 = (\varkappa-1)\left(x_0\int Y_0 du + y_0\int X_0 du\right) - \varkappa\int\left(y_0X_0 + x_0Y_0\right)du - 2G\left(x_0u_x + y_0u_y\right)$$

$$\varkappa\psi_0^* = (\varkappa-1)\left(x_0\int X_0 du - y_0\int Y_0 du\right) + (\varkappa-2)\int\left(y_0Y_0 - x_0X_0\right)du +$$

$$+2G\left(x_0u_y - y_0u_x\right) - 4G\int\sqrt{g_0}\,u_v\,du \tag{3.6}$$

$$x_0 = x(u,0), \quad y_0 = y(u,0), \quad g_0 = g(u,0)$$

$$X_0 = \sigma_v(u,0)\partial_u y_0 - \tau_{uv}(u,0)\partial_u x_0, \quad Y_0 = \sigma_v(u,0)\partial_u x_0 + \tau_{uv}(u,0)\partial_u y_0 \tag{3.7}$$

Таким образом введенные выше функции $\psi_0^*(u)$, $\psi_k(u)$ выражаются через аналитические функции-координаты векторов $\mathbf{r} = \{x; y\}$, $\mathbf{U}$, $P_\nu = \{\sigma_v; \tau_{uv}\}$ на линии $v = 0$.

Формулы (3.6) позволяют также установить произвол в определении функций ψ_0^*, ψ_k, а именно функциям $\psi_1 = c_1 + c_7y_0$, $\psi_2 = c_2 - c_7x_0$, $\psi_0 = (c_3 - c_1)x_0 + (c_4 - c_2)y_0 + c_5$, $\psi_0^* = (c_4 - c_2)x_0 + (c_1 - c_3)y_0 + c_6$ (c_k – постоянные) отвечает жесткое смещение тела, так как подстановка этих функций в соотношение (3.2) дает $F = c_3x(u,v) + c_4y(u,v) + c_5$. При упомянутой подстановке использовались формулы

$$x(u,v) + iy(u,v) = f(u+iv) = E(v)f(u) = (C(v) + iS(v))(x(u,0) + iy(u,0)) =$$

$$= C(v)x(u,0) - S(v)y(u,0) + i(C(v)y(u,0) + S(v)x(u,0)) \tag{3.8}$$

Если параметр $\xi \in \mathbf{R}$, а точки $u + i(\xi + v)$ и $u + iv$ принадлежат области аналитичности функции $f(\zeta)$, то согласно формулам (2.1), (2.3) выполняются равенства

$$x(u,\xi+v) + iy(u,\xi+v) = f(u + i(\xi+v)) = E(\xi)f(u+iv) =$$

$$= (C(\xi) + iS(\xi))(x(u,v) + iy(u,v)) =$$

$$= C(\xi)x(u,v) - S(\xi)y(u,v) + i(C(\xi)y(u,v) + S(\xi)x(u,v)) \tag{3.9}$$

Учитывая свойства (2.4), из (3.9) находим

$$C(\xi)x(u,v) \mp S(\xi)y(u,v) = x(u,v \pm \xi), \quad C(\xi)y(u,v) \pm S(\xi)x(u,v) = y(u,v \pm \xi) \tag{3.10}$$

Соотношения типа (3.10) имеют место для любой пары гармонических и сопряженных функций в том числе и для функций F_1, F_2:

$$C(\xi)F_1 \mp S(\xi)F_2 = F_1(u,v \pm \xi), \quad C(\xi)F_2 \pm S(\xi)F_1 = F_2(u,v \pm \xi) \tag{3.11}$$

Используя формулы (1.10), (1.11), (3.2), граничные условия (1.3) можно записать в виде

$$\text{при } v = v_j \quad \partial_u F - P_j(u) = 0, \quad \partial_v F - Q_j(u) = 0 \quad (j = 1,2) \tag{3.12}$$

или в эквивалентной форме

$$C(\xi)(\partial_u F - P_j(u)) - S(\xi)(\partial_v F - Q_j(u)) = 0 \tag{3.13}$$

$$S(\xi)(\partial_u F - P_j(u)) + C(\xi)(\partial_v F - Q_j(u)) = 0 \quad (\forall \xi, \ j = 1,2) \tag{3.14}$$

Умножая обе части уравнения (3.14) на i и складывая с (3.13), условия (3.13), (3.14) перепишем в виде

$$E(\xi)\Psi_j(u) = \Psi_j(u + i\xi) = 0, \quad \left(\Psi_j(u) = \partial_u F - P_j(u) + i(\partial_v F - Q_j(u)), \ j = 1,2\right) \tag{3.15}$$

Поскольку равенство $\Psi_j(u + i\xi) = 0$, выполняющееся хотя бы на одной линии $\xi =$ = const, означает, что функция $\Psi_j(u) \equiv 0$, то отсюда следует эквивалентность граничных условий (3.12) условиям (3.13), (3.14). Важно отметить, что интервал возможных значений параметра ξ не может быть произвольным и определяется областью аналитичности функции $f(\zeta)$.

Преобразуя с помощью формул (2.5)–(2.7), (3.2), (3.10), (3.11) уравнения (3.13), (3.14) при $\xi = v_j - v$, находим для них следующие представления

$$\partial_u F_0(u,v) - \Phi_j(u,v) = 0, \quad \partial_v F_0(u,v) - \Phi_j^*(u,v) = 0 \quad (j = 1,2) \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \Phi_j(u,v) &= -x(u,\eta)\partial_u F_1(u,v) - y(u,\eta)\partial_u F_2(u,v) - \\ &-\partial_u x(u,v)\left(F_1(u,\eta) - \delta_j q_1 - C(\xi)Y_j(u) + S(\xi)X_j(u)\right) - \\ &-\partial_u y(u,v)\left(F_2(u,\eta) - \delta_j p_1 - S(\xi)Y_j(u) - C(\xi)X_j(u)\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \Phi_j^*(u,v) &= x(u,\eta)\partial_u F_2(u,v) - y(u,\eta)\partial_u F_1(u,v) - \\ &-\partial_u x(u,v)\left(F_2(u,\eta) - \delta_j p_1 - S(\xi)Y_j(u) - C(\xi)X_j(u)\right) - \\ &-\partial_u y(u,v)\left(\delta_j q_1 - F_1(u,\eta) + C(\xi)Y_j(u) - S(\xi)X_j(u)\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$(\xi = v_j - v, \ \eta = 2v_j - v, \ j = 1,2)$$

Система (3.16) равносильна следующей системе уравнений

$$\partial_u F_0(u,v) = \Phi_j(u,v), \quad \partial_v F_0(u,v) = \Phi_j^*(u,v) \quad (j = 1,2) \tag{3.19}$$

$$\Phi_1(u,v) = \Phi_2(u,v), \quad \Phi_1^*(u,v) = \Phi_2^*(u,v) \tag{3.20}$$

Нетрудно проверить, что соотношения (3.20) будут выполняться в любой точке (u, v) если они выполняются хотя бы на одной линии v = const. Из (3.20) при $v = 0$ находим два операторных уравнения относительно функций $\psi_j = \psi_j(u)$ $(j = 1, 2)$:

$$S(2v_0)\psi_1 + W_2\partial_u\psi_1 + W_1\partial_u\psi_2 = f_1, \quad S(2v_0)\psi_2 - W_2\partial_u\psi_2 + W_1\partial_u\psi_1 = f_2 \tag{3.21}$$

Здесь функции $W_j = W_j(u), f_j = f_j(u)$ имеют вид

$$g_0 W_1 = \partial_u x_0 S(2v_0) y_0 + \partial_u y_0 S(2v_0) x_0, \quad g_0 W_2 = \partial_u x_0 S(2v_0) x_0 - \partial_u y_0 S(2v_0) y_0$$

$$2f_1 = p_1 + C(v_0)(X_2 - X_1) + S(v_0)(Y_1 + Y_2), \quad 2f_2 = -q_1 + C(v_0)(Y_1 - Y_2) + S(v_0)(X_1 + X_2) \tag{3.22}$$

а величины $q_1, p_1, x_0, y_0, g_0, X_j(u), Y_j(u)$ определяются формулами (1.14), (1.15), (3.7). Заметим, что при $f_1 = f_2 = 0$ однородному решению $\psi_1(u) = c_7 y(u, 0)$, $\psi_2(u) = -c_7 x(u, 0)$ (c_7 – постоянная) отвечает функция $F = 0$.

Если область D имеет ось симметрии, то совместив эту ось с осью ox всегда можно построить такое конформное отображение (1.1), что $y(u, 0) = 0$, $W_1 = 0$, $W_2 = y(u, 2v_0)/\partial_u x(u, 0)$, при этом система (3.21) разделяется на два независимых уравнения

$$S(2v_0)\psi_1 + W_2 \partial_u \psi_1 = f_1, \quad S(2v_0)\psi_2 - W_2 \partial_u \psi_2 = f_2 \tag{3.23}$$

4. Решение операторным методом задачи для прямоугольной области [4]. Рассмотрим случай, когда функция $f(\zeta) = A\zeta$, а область D – прямоугольник размера $2Av_0 \times 2A\pi$ ($A = \text{const}$, $u_0 = \pi$). Пусть функции $\sigma_{2j}(u)$, $\tau_{2j}(u)$ ($j = 1, 2$) заданы рядами Фурье

$$\sigma_{2j} = \sigma_0^j / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^j \cos nu + \sigma_n^{jj} \sin nu)$$

$$\tau_{2j} = \tau_0^j / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n^j \cos nu + \tau_n^{jj} \sin nu) \tag{4.1}$$

Учитывая (4.1) по формулам (1.14) находим величины $X_j(u)$, $Y_j(u)$:

$$A^{-1} X_j(u) = -(u+\pi)\tau_0^j / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n^{jj} \cos nu - \tau_n^j \sin nu - (-1)^n \tau_n^{jj}) / n$$

$$A^{-1} Y_j(u) = (u+\pi)\sigma_0^j / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^j \sin nu - \sigma_n^{jj} \cos nu + (-1)^n \sigma_n^{jj}) / n \tag{4.2}$$

Далее по формулам (3.22) находим функции $W_j(u), f_j(u)$ и согласно (3.23) получаем операторные уравнения

$$S(2v_0)\psi_1(u) + 2v_0 \partial u \psi_1(u) = f_1(u), \quad S(2v_0)\psi_2(u) - 2v_0 \partial u \psi_2(u) = f_2(u) \tag{4.3}$$

$$2A^{-1} f_1(u) = p + \tilde{p} w + \sum_{n=1}^{\infty} ((\tau_n^{22} - \tau_n^{11}) \operatorname{ch} nv_0 \cos nu + (\sigma_n^{11} + \sigma_n^{22}) \operatorname{sh} nv_0 \sin nu) / n$$

$$2A^{-1} f_2(u) = -q - \tilde{q} w + \sum_{n=1}^{\infty} ((\sigma_n^{22} - \sigma_n^{11}) \operatorname{ch} nv_0 \cos nu - (\tau_n^{11} + \tau_n^{22}) \operatorname{sh} nv_0 \sin nu) / n$$

$$p = A^{-1} p_1 + w_0 \tilde{p} + v_0(\sigma_0^1 + \sigma_0^2)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\tau_n^{11} - \tau_n^{22}) / n, \quad \tilde{p} = v_0(\tau_0^1 - \tau_0^2)/2$$

$$q = A^{-1} q_1 + w_0 \tilde{q} + v_0(\tau_0^1 + \tau_0^2)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sigma_n^{22} - \sigma_n^{11}) / n, \quad \tilde{q} = v_0(\sigma_0^2 - \sigma_0^1)/2$$

$$(w = u / v_0, \quad w_0 = \pi / v_0, \quad W_1(u) \equiv 0, \quad W_2(u) \equiv 2v_0)$$

Решая уравнения (4.3), получим

$$2A^{-1}\psi_1(u) = \sum_{n=1}^{\infty} [((\tau_n^2 - \tau_n^1) \operatorname{ch} nv_0 - (\sigma_n^{11} + \sigma_n^{22}) \operatorname{sh} nv_0) \cos nu +$$

$$+ ((\tau_n^{22} - \tau_n^{11}) \operatorname{ch} nv_0 + (\sigma_n^1 + \sigma_n^2) \operatorname{sh} nv_0) \sin nu] / \Delta_n^+ + pw/4 + \tilde{p} w^2 / 8 +$$

$$+v_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{n,2}\,\mathrm{sh}(\delta_{n,2}w)+B_{n,2}\,\mathrm{ch}(\delta_{n,2}w)) \qquad (4.4)$$

$$2A^{-1}\psi_2(u)=\sum_{n=1}^{\infty}[((\sigma_n^2-\sigma_n^1)\,\mathrm{ch}\,nv_0+(\tau_n^{11}+\tau_n^{22})\,\mathrm{sh}\,nv_0)\cos nu+$$

$$+((\sigma_n^{22}-\sigma_n^{11})\,\mathrm{ch}\,nv_0-(\tau_n^1+\tau_n^2)\,\mathrm{sh}\,nv_0)\sin nu]/\Delta_n^-+qw^3/8+\tilde{q}w^4/32+$$

$$+1,5Cw^2/v_0+v_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{n,1}\,\mathrm{ch}(\delta_{n,1}w)+B_{n,1}\,\mathrm{sh}(\delta_{n,1}w))$$

Здесь C, A_{nk}, B_{nk} – произвольные комплексные постоянные, $\Delta_n^+=\mathrm{sh}\,2nv_0+2nv_0$, $\Delta_n^-=\mathrm{sh}\,2nv_0-2nv_0$, а числа δ_{nk} – корни уравнений $\sin 2\,\delta_{nk}+(-1)^k\,2\delta_{nk}=0$ $(k=1{,}2)$.

В формулах (4.4) и далее в тексте принята такая нумерация, что выполняются соотношения

$$\bar{\delta}_{2r-1,k}=\delta_{2r,k}=x_{rk}+iy_{rk},\quad \bar{A}_{2r-1,k}=A_{2r,k},\quad \bar{B}_{2r-1,k}=B_{2r,k}\quad (x_{rk},y_{rk}>0)$$

Заметим, что корни уравнения более общего вида

$$\sin z^{(r)}=\rho z^{(r)}\quad (z^{(r)}=x^{(r)}+iy^{(r)},\ \ x^{(r)},y^{(r)}>0,\ \ r=1,2\ldots)$$

можно отыскивать методом итераций по улучшенной схеме [5]:

$$b_n^{(r)}=-\arcsin(|\rho|\,y_{n-1}^{(r)}/\mathrm{sh}\,y_{n-1}^{(r)}),\quad x_n^{(r)}=a_r+b_n^{(r)}$$

$$y_n^{(r)}=\mathrm{arch}(|\rho|\,x_n^{(r)}/\cos b_n^{(r)}),\quad b_0^{(r)}=-\mathrm{arch}(|\rho|\,\mathrm{arch}\,a_r/\sqrt{a_r^2-\rho^{-2}}$$

$$x_0^{(r)}=a_r+b_0^{(r)},\quad y_0^{(r)}=\mathrm{arch}(|\rho|\,x_0^{(r)}/\cos b_0^{(r)})$$

$$a_r=2\pi r+0{,}5\pi\,\mathrm{sign}\,\rho\quad (n,r=1,2\ldots)$$

Подставляя функции $\psi_i(u)$ в формулы (3.3) найдем функции $F_j(u,v)$. Имеем

$$2A^{-1}F_1=pw/4+q(t^3-3wt^2)/8+\tilde{p}(w^2-t^2)/8+\tilde{q}(wt^3-w^3t)/8-3Cwt/v_0-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{4}\partial_u U_{ns}(u)H_{ns}(v)+v_0^{-1}\sum_{k=1}^{2}(A_{nk}\,\mathrm{sh}(\delta_{nk}w)+B_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w))\cos(\varepsilon_k-\delta_{nk}t)\right]$$

$$2A^{-1}F_2=pt/4+q(w^3-3wt^2)/8+\tilde{p}wt/4+\tilde{q}(w^4-6w^2t^2+t^4)/32+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{4}\partial_v H_{ns}(v)U_{ns}(u)+v_0^{-1}\sum_{k=1}^{2}(A_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w)+B_{nk}\,\mathrm{sh}(\delta_{nk}w))\sin(\varepsilon_k-\delta_{nk}t)\right]+ \qquad (4.5)$$

$$+1{,}5\,C(w^2-t^2)/v_0$$

$$H_{n,1}=b_n\,\mathrm{ch}\,n(v_0-v)-a_n\,\mathrm{ch}\,n(v_0+v),\quad H_{n,2}=b_n\,\mathrm{ch}\,n(v_0+v)-a_n\,\mathrm{ch}\,n(v_0-v)$$

$$H_{n,3}=b_n\,\mathrm{sh}\,n(v_0-v)-a_n\,\mathrm{sh}\,n(v_0+v),\quad H_{n,4}=b_n\,\mathrm{sh}\,n(v_0+v)-a_n\,\mathrm{sh}\,n(v_0-v)$$

$$U_{n,1}=(\tau_n^1\sin nu-\tau_n^{11}\cos nu)/n^2,\quad U_{n,2}=(\tau_n^{22}\cos nu-\tau_n^2\sin nu)/n^2$$

$$U_{n,3}=(\sigma_n^{11}\sin nu+\sigma_n^1\cos nu)/n^2,\quad U_{n,4}=(\sigma_n^{22}\sin nu+\sigma_n^2\cos nu)/n^2$$

$$(a_n=2nv_0/(\Delta_n^+\Delta_n^-),\quad b_n=\mathrm{sh}\,2nv_0/(\Delta_n^+\Delta_n^-),\quad t=v/v_0,\quad \varepsilon_k=k\pi/2)$$

Используя соотношения (3.2), (3.19), выразим величины $\partial_u F$, $\partial_v F$, F через функции

$\Phi_1(u, v)$, $\Phi_1^*(u, v)$, $F_j(u, v)$. Имеем

$$\partial_u F = \Phi_1 + A\partial_u(uF_1 + v F_2), \quad \partial_v F = \Phi_1^* + A\partial_v (uF_1 + v F_2)$$

$$F = \int\limits_{u_1}^{u} \partial_u F(u,v)du + \int\limits_{v_1}^{v} \partial_v F(u_1,v)dv = 2A(v_0 + v)F_2(u,v) +$$

$$+ A\int\limits_{u_1}^{u} (F_1(u,v) - F_1(u,\eta) + C(\xi)Y_1(u) - S(\xi)X_1(u))du - A\int\limits_{v_1}^{v} (F_2(u_1,v) + F_2(u_1,\eta) -$$

$$- S(\xi)Y_1(u_1) - C(\xi)X_1(u_1))dv \tag{4.6}$$

$$(\eta = -2v_0 - v, \quad \xi = -v_0 - v, \quad u_1 = -\pi, \quad v_1 = -v_0)$$

Наконец, подставляя (4.2), (4.5) в (4.6) получаем выражение для бигармонической функции

$$A^{-2}F(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^{4} V_{ns}(v)U_{ns}(u) + \sum_{k=1}^{2}(A_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w) + B_{nk}\,\mathrm{sh}(\delta_{nk}w))\Phi_{nk}(t) + \right.$$

$$+ (-1)^n(\sigma_n^1 / n + (u+\pi)\sigma_n^{11} - (v_0 + v)\tau_n^{11})/n] + \sigma_0^1((u+\pi)^2 - (v_0+v)^2)/4 -$$

$$- \tau_0^1(u+\pi)(v_0+v)/2 + C(1+t)^2(2-t) + v_0(1+t)^2 \times \tag{4.7}$$

$$\times \{(p + qw(2-t) + \tilde{p}w)/4 + \tilde{q}[w^2(2-t) + 0,2(1+t)^3 - (1+t)^2 + t]/8\}$$

Здесь функции $V_{ns}(v)$, $\Phi_{nk}(t)$ $(k = 1,2)$ определяются формулами

$$V_{n,1} = a_n n(v_0 - v)\,\mathrm{sh}\,n(v_0 + v) - b_n n(v_0 + v)\,\mathrm{sh}\,n(v_0 - v)$$

$$V_{n,2} = a_n n(v_0 + v)\,\mathrm{sh}\,n(v_0 - v) - b_n n(v_0 - v)\,\mathrm{sh}\,n(v_0 + v)$$

$$V_{n,3} = a_n n(v_0 - v)\,\mathrm{ch}\,n(v_0 + v) - b_n n(v_0 + v)\,\mathrm{ch}\,n(v_0 - v) - H_{n,3}(v)$$

$$V_{n,4} = a_n n(v_0 + v)\,\mathrm{ch}\,n(v_0 - v) - b_n n(v_0 - v)\,\mathrm{ch}\,n(v_0 + v) - H_{n,4}(v)$$

$$\Phi_{nk}(t) = C_{nk}\tilde{\Phi}_{nk}(t), \quad \overline{\Phi}_{2r-1,k}(t) \equiv \Phi_{2r,k}(t) \equiv h_{rk}(t) + ig_{rk}(t)$$

$$\tilde{\Phi}_{nk}(t) = t\sin(\varepsilon_k - \delta_{nk}t) - \cos(\varepsilon_k - \delta_{nk}t)\sin^2(\varepsilon_k - \delta_{nk})/\delta_{nk}$$

$$\overline{C}_{2r-1,k} = C_{2r,k} = a_{rk} + ib_{rk} \quad (r = 1,2\ldots)$$

Из условий нормировки функций $h_{rk}(t)$, $g_{rk}(t)$

$$\int\limits_{-1}^{1} h_{rk}^2(t)dt = 1, \quad \int\limits_{-1}^{1} g_{rk}^2(t)dt = 1 \quad (k = 1,2; \; r = 1,2\ldots)$$

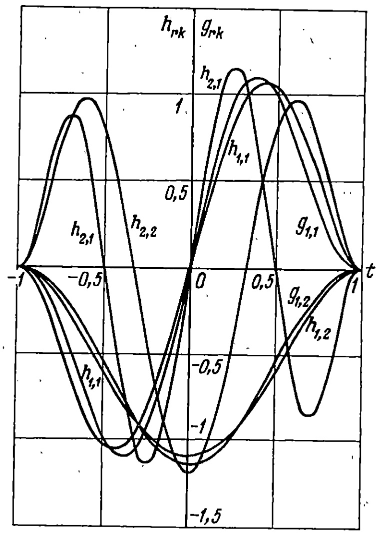
находим следующие выражения для нормирующих множителей $C_{2r,k}$:

$$C_{2r,k} = \left(\sqrt{1+\varphi_{rk}} - i\sqrt{1-\varphi_{rk}}\right)\Big/\sqrt{J_{2r,2r-1}^{(k)}} \quad (r = 1,2\ldots) \tag{4.8}$$

$$\varphi_{rk} = \mathrm{Jm}\left\{J_{2r,2r}^{(k)}\right\}\Big/\left|J_{2r,2r}^{(k)}\right|, \quad J_{nn}^{(k)} = \int\limits_{-1}^{1} \tilde{\Phi}_{nk}^2(t)dt = -\tfrac{2}{3} - \sin^{-2}(\varepsilon_k - \delta_{nk})$$

$$\underset{(m\neq n)}{J_{mn}^{(k)}} = \int\limits_{-1}^{1} \tilde{\Phi}_{mk}(t)\tilde{\Phi}_{nk}(t)dt = 32(-1)^k\delta_{mk}\delta_{nk}\cos(\varepsilon_k - \delta_{nk})\cos(\varepsilon_k - \delta_{mk}) \times$$

$$\times\ (\delta_{mk}^2 - \delta_{nk}^2)^{-2}(\cos 2\delta_{mk} + \cos 2\delta_{nk})^{-1} \quad (m,n = 1,2\ldots) \tag{4.9}$$



r	$x_{r,1}$	$y_{r,1}$	$x_{r,2}$	$y_{r,2}$
1	3,748 838 139	1,384 339 141	2,106 196 115	1,125 364 306
2	6, 949 979 857	1,676 104 942	5,356 268 699	1,551 574 373
3	10,119 258 85	1,858 383 840	8,536 682 427	1,775 543 674
4	13,277 273 63	1,991 570 820	11,699 177 61	1,929 404 497
5	16,429 870 50	2,096 625 735	14,854 059 91	2,046 852 462

r	$a_{r,1}$	$b_{r,1}$	$a_{r,2}$	$b_{r,2}$
1	0,950 620 5532	−1,247 635 186	0,850 359 757 2	−1,172 949 249
2	1,018 494 543	−1,224 688 972	0,997 341 229 1	−1,245 026 239
3	1,026 859 929	−1,176 260 344	1,026 326 925	−1,200 449 219
4	1,017 256 766	−1,131 913 279	1,023 253 219	−1,153 314 403
5	1,001 740 925	−1,093 624 662	1,009 883 576	−1,112 052 532

В таблице приводятся корни $\delta_{2r,k} = x_{rk} + iy_{rk}$ и нормирующие множители $C_{2r,k} = a_{rk} + ib_{rk}$, а на фиг. 1 графики функций $h_{rk}(t)$, $g_{rk}(t)$.

Напряжения σ_v, τ_{uv}, определяемые через полученную здесь бигармоническую функцию F, удовлетворяют граничным условиям (1.3). Распоряжаясь постоянными C, A_{nk}, B_{nk} удовлетворим теперь граничным условиям (1.2). Как известно, эти условия эквивалентны заданию значений функции F и ее нормальной производной $\partial_u F$ при $u = u_j$ $(j = 1,2)$. В силу (1.12), (1.13) имеем

$$F(u_j, v) = R_j(v), \quad \partial_u F(u_j, v) = T_j(v) \quad (j = 1,2)$$

Отсюда, учитывая (4.6), (4.7), находим уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} A_{nk}\delta_{nk}\,\mathrm{sh}(\delta_{nk}w_0)\Phi_{nk}(t) = f_{(v)}^{(4)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} A_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w_0)\Phi_{nk}(t) = f_{(v)}^{(1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} B_{nk}\delta_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w_0)\Phi_{nk}(t) = f_{(v)}^{(3)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} B_{nk}\,\mathrm{sh}(\delta_{nk}w_0)\Phi_{nk}(t) = f_{(v)}^{(2)} \qquad (4.10)$$

$$f_{(v)}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sigma_n^1/n^2 + (v_0+v)\tau_n^{11}/n - \sum_{s=1}^{4} V_{ns}(v)U_{ns}(\pi)\right] - v_0(1+t)^2\{(p - v_0\sigma_0^1)/4 +$$

$$+\tilde{q}[w_0^2(2-t)+0,2(1+t)^3-(1+t)^2+t]/8\} + C(1+t)^2(t-2)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{v\int_{v_1}^{v}(\sigma_{12}+\sigma_{11})dv - \int_{v_1}^{v} v(\sigma_{12}+\sigma_{11})dv\right\} \qquad (4.11)$$

$$f_{(v)}^{(2)} = \pi(1+t)^2[q(t-2)-\tilde{p}]/4 + \frac{1}{2}\left\{v\int_{v_1}^{v}(\sigma_{12}-\sigma_{11})dv - \int_{v_1}^{v} v(\sigma_{12}-\sigma_{11})dv\right\}$$

$$v_0^{-1}f_{(v)}^{(3)} = (v_0+v)\tau_0^1/2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{4}\partial_u U_{ns}(\pi)V_{ns}(v) + \sigma_n^{11}/n\right] +$$

$$+(1+t)^2[q(t-2)-\tilde{p}]/4 - \frac{1}{2}\int_{v_1}^{v}(\tau_{11}+\tau_{12})dv$$

$$v_0^{-1}f_{(v)}^{(4)} = w_0\tilde{q}(1+t)^2(t-2)/4 + \frac{1}{2}\int_{v_1}^{v}(\tau_{11}-\tau_{12})dv$$

Постоянную C можно определить с помощью формул (1.19), (4.6), (4.7), вычисляя главный момент M° на участке границы L от точки $A(u_1, v_2)$ до точки $B(u_1, \mathring{v}_1)$. С учетом (1.17) получим

$$M^\circ = m_{11} = -F(u_1,v_2) + u_1\partial_u F(u_1,v_2) + v_2\partial_v F(u_1,v_2) \qquad (4.12)$$

Из (4.12) находим

$$C = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[(\sigma_n^2-\sigma_n^1)/n^2 + v_0(\tau_n^{11}+\tau_n^{22})/n] - A^{-2}(m_{11}+m_{12})/8 +$$

$$+A^{-1}v_0(q_2-q_1)(w_0-0,6/w_0)/16$$

Функции $f_{(v)}^{(s)}$ $(s=\overline{1,4})$ удовлетворяют соотношениям

$$f_{(v_j)}^{(s)} = \partial_v f_{(v_j)}^{(k)} = 0, \quad \partial_v f_{(v_j)}^{(r)} = 0 \quad (k,j=1,2;\ r=3,4) \qquad (4.13)$$

причем равенства $\partial_v f_{(v_j)}^{(r)} = 0$ имеют место лишь в том случае, когда в вершинах прямоугольника D внешние касательные усилия взаимно равны.

Умножая обе части равенств (4.10) на функции $h_{rk}(t)$ (или $g_{rk}(t)$) и затем интегрируя, получим четыре независимые системы алгебраических уравнений относительно постоянных $\tilde{A}_{nk}, \tilde{B}_{nk}$ $(k=1,2;\ n=1,2,\ldots)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{nk}I_{nr}^{(k)}\,\mathrm{th}(\delta_{nk}w_0) = b_{rk}^{(4)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{nk}I_{nr}^{(k)}/\delta_{nk} = b_{rk}^{(1)} \quad (r=1,2\ldots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_{nk}I_{nr}^{(k)} = b_{rk}^{(3)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_{nk}\,\mathrm{th}(\delta_{nk}w_0)I_{nr}^{(k)}/\delta_{nk} = b_{rk}^{(2)} \qquad (4.14)$$

$$I_{nr}^{(k)} = \frac{1}{2}C_{nk}\left(C_{2r,k}J_{n,2r}^{(k)} + C_{2r-1,k}J_{n,2r-1}^{(k)}\right), \quad b_{rk}^{(s)} = \int_{-1}^{1} f_{(v)}^{(s)}h_{rk}(t)dt \qquad (4.15)$$

$$\tilde{A}_{nk} = A_{nk}\delta_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w_0), \quad \tilde{B}_{nk} = B_{nk}\delta_{nk}\,\mathrm{ch}(\delta_{nk}w_0) \quad (s=\overline{1,4};\ r=1,2\ldots)$$

Системы уравнений (4.15) хорошо решаются методом урезания и выгодно отличаются от аналогичных систем (*), полученных в работах [6, 7] с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Последнее замечание обосновывается тем, что для элементов c_{nr} и $\overset{*}{c}_{nr}$ матриц упомянутых систем имеют место оценки $|c_{nr}| < M_r / n^{3,5}$ и $|c_{nr}^*| < M_r^* / n^2$ (r – фиксировано).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидов С.П.* Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979. 432 с.
2. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1955. 492 с.
3. *Агарев В.А.* Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 203 с.
4. *Власов В.В.* Применение метода начальных функций к плоской задаче теории упругости для прямоугольной области // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 114-125.
5. *Ворович И.И., Малкина О.С.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите // Тр. 6-ой Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966, С. 251–254.
6. *Аксентян О.К, Ворович И.И.* Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057–1074.
7. *Базаренко Н.А., Ворович И.И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. С. 1035–1052.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
23.08.1999