МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. В.А. ЕРЕМЕЕВ

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрено выполнение свойства эллиптичности статических краевых задач нелинейной теории упругости, которые состоят из условий сильной эллиптичности уравнений равновесия и условий дополнительности (Шапиро – Лопатинского) для краевых условий. Показано, что условие дополнительности эквивалентно требованию устойчивости однородного нелинейно-упругого полупространства с определенными свойствами. В качестве примера исследовано выполнение условия дополнительности для материала Адамара.

Выполнение условий эллиптичности уравнений равновесия нелинейной теории упругости (требования сильной эллиптичности, неравенства Адамара и других) играет большую роль в задачах устойчивости упругих трехмерных тел, распространении волн в предварительно-напряженных средах, при исследовании разрывных решений нелинейной теории упругости, теории фазовых превращений в упругих телах при больших деформациях. Исследованию свойств эллиптичности и разработке эффективных методов проверки эллиптичности уравнений равновесия большое внимание уделено в работах [1–13]. Вместе с тем из общей теории эллиптических систем уравнений в частных производных [14–17] известно, что составляющей частью исследования эллиптичности краевой задачи является проверка условия дополнительности (условия Шапиро – Лопатинского, коэрцитивности, или накрывания), налагаемого на краевые условия.

Эллиптичность краевой задачи позволяет сделать вывод о фредгольмовости оператора, порождаемого линеаризованной краевой задачей теории упругости и судить о регулярности ее решений. Кроме того, в ряде задач со свободными (неизвестными) границами надлежащим образом обобщенное условие дополнительности вместе со свойством эллиптичности уравнений в объеме тела позволяет сделать вывод о гладкости свободной границы [17, 18], что важно, например, при анализе регулярности фазовой границы.

Фредгольмовость оператора линеаризованной теории упругости (в частности, наличие конечномерного ядра и коядра) важна для использования теории ветвления решений нелинейных уравнений [19], обеспечивая, например, конечное число мод выпучивания, соответствующих критической нагрузке.

Уравнения состояния нелинейно-упругого тела имеют вид [3]:

$$W = W(\mathbf{C}), \quad \mathbf{D} = dW/d\mathbf{C}$$

где W – объемная плотность потенциальной энергии деформации, $\mathbf{D}$ – тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$ – градиент деформации, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точек тела в деформированном состоянии, grad – оператор градиента в лагранжевых координатах.

Рассмотрим положение равновесия нелинейно-упругого тела, бесконечно мало отличающееся от некоторого известного состояния, которое будем называть основным напряженно-деформированным состоянием. Все величины, относящиеся к этому состоянию, будем обозначать индексом (0) внизу. Линеаризованная краевая задача, описывающая малое отклонение от основного состояния, в геометрии отсчетной конфигурации дается соотношениями [3]:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{P}=0, \quad \mathbf{P}=\frac{d}{d\alpha}\mathbf{D}(\mathbf{C}_0+\alpha\,\mathrm{grad}\,\mathbf{w})\big|_{\alpha=0}\\&\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{\sigma_1}=\varphi, \quad \mathbf{w}\big|_{\sigma_2}=0\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь div – оператор дивергенции в лагранжевых координатах, $\mathbf{P}$ – линеаризованный тензор напряжений Пиолы, зависящий линейным образом от градиента вектора малых добавочных перемещений $\mathbf{w}$ и от координат точек тела в отсчетной конфигурации $\mathbf{r}$: $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathrm{grad}\,\mathbf{w})$, $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к границе тела σ в отсчетной конфигурации. Граница σ предполагается состоящей из двух непересекающихся частей σ_1, σ_2, на которых заданы два основных типа краевых условий: силовые и кинематические. В (1) φ представляет собой возмущение поверхностной нагрузки ($\varphi =$ $= \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathrm{grad}\,\mathbf{w})$). Например, в случае "мертвой" нагрузки $\varphi = 0$, для нагрузки, описывающей действие равномерного гидростатического давления интенсивности p:

$$\varphi=-p(\det\mathbf{C}_0)\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}_0^{-T}\cdot(\mathbf{E}\,\mathrm{tr}(\mathbf{C}_0^{-1}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{w})-(\mathrm{grad}\,\mathbf{w})^T\cdot\mathbf{C}_0^{-T})$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Краевая задача (1) позволяет судить об устойчивости основного напряженно-деформированного состояния. А именно, если краевая задача (1) не имеет нетривиальных решений, то, следуя [3], будем считать основное состояние устойчивым в малом. В противном случае будем говорить о потере устойчивости основного напряженно-деформированного состояния равновесия. Те значения параметров нагружения или деформации, при которых система (1) допускает нетривиальные решения, будем называть критическими, а сами решения – модами выпучивания.

Рассмотрим выполнение условий эллиптичности краевой задачи (1). Будем предполагать выполненным условие сильной эллиптичности уравнений равновесия (строгое неравенство Адамара) в каждой точке тела [3]:

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{\eta}>0$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ – произвольные ненулевые векторы.

Используя результаты теории эллиптических систем уравнений в частных производных [14]–[17], сформулируем условие дополнительности для краевых условий в (1). С этой целью поставим в соответствие уравнениям (1) некоторые краевые задачи в полупространстве для системы уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть $\mathbf{r}_0$ – произвольная точка на границе σ. Заморозим коэффициенты системы (1) в точке $\mathbf{r}_0$, т.е. положим $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}_0, \mathrm{grad}\,\mathbf{w})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{r}_0, \mathbf{w}, \mathrm{grad}\,\mathbf{w})$. Кроме того, оставим в уравнениях равновесия и силовых граничных условиях только главные члены, т.е. те слагаемые, которые содержат частные производные от вектора перемещений максимального порядка (второго для уравнений равновесия и первого для краевых условий). Полученные выражения для $\mathbf{P}$ и φ обозначим через $\mathbf{P}^0$ и φ^0. Нетрудно проверить, что для простого нелинейно-упругого тела тензор $\mathbf{P}^0$ равен $\mathbf{P}$.

Сформулируем две краевые задачи в полупространстве, отвечающие двум типам краевых условий

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{P}^0(\mathbf{r}_0,\ \mathrm{grad}\,\mathbf{w})=0 \quad (\text{при } x_3>0)\\&\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{P}^0(\mathbf{r}_0,\ \mathrm{grad}\,\mathbf{w})=\varphi^0((\mathbf{r}_0,\ \mathrm{grad}\,\mathbf{w})) \quad (\text{при } x_3=0)\end{aligned}\tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{P}^0(\mathbf{r}_0,\ \mathrm{grad}\,\mathbf{w})=0 \quad (\text{при } x_3>0), \quad \mathbf{w}=0 \quad (\text{при } x_3=0)\tag{3}$$

В (2), (3) введены декартовы координаты x_1, x_2, x_3 и соответствующие им координатные орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ таким образом, что $\mathbf{i}_3 = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$, а внутренность тела соответствует положительным значениям координаты x_3.

Используя преобразование Фурье по координатам x_1, x_2, системы (2), (3) сводятся к однородным краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными комплексными коэффициентами на полуоси $x_3 \geqslant 0$, которые имеют решения экспоненциального типа.

Как известно [14], [16], условия дополнительности краевых условий задачи (1) означает отсутствие нетривиальных решений у полученных из (2), (3) систем ОДУ, убывающих при $x_3 \to \infty$.

Используя данное выше определение устойчивости в малом для основного напряженно-деформированного состояния равновесия и свойства материала, нетрудно видеть, что выполнение приведенного выше условия дополнительности в некоторой точке границы $\mathbf{r}_0$ эквивалентно требованию устойчивости в малом в классе возмущений, затухающих на бесконечности, однородного упругого полупространства, свойства которого совпадают со свойствами материала в точке $\mathbf{r}_0$, а основное однородное напряженно-деформированное состояние для полупространства совпадает с основным состоянием тела в проверяемой точке $\mathbf{r}_0$.

Таким образом, дано физическое истолкование условия дополнительности краевых условий нелинейной теории упругости, заключающееся в определении областей в пространстве деформаций или напряжений, для которых упругое полупространство с указанными выше свойствами устойчиво.

Следует отметить, что в отличие от условия эллиптичности уравнений равновесия, выполнение которого налагает ограничения на форму определяющих соотношений нелинейно-упругого тела (и, возможно, деформацию материала), выполнение условия дополнительности, вообще говоря, зависит от вида оператора граничных условий.

В качестве примера рассмотрим задачу о потере устойчивости упругого полупространства из материала Адамара с уравнением состояния вида [4]:

$$W = \mu(I_1 - 3) + \Phi(J), \quad \mathbf{D} = 2\mu\mathbf{C} + J\Phi'\mathbf{C}^{-T} \tag{4}$$

где $I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)$ – первый инвариант меры деформации Коши – Грина, $J = \det \mathbf{C}$, Φ – известная функция, $\mu > 0$ – упругая постоянная, штрихом обозначена производная по J.

Функция Φ должна удовлетворять соотношениям

$$\Phi(1) = 0, \quad \Phi'(1) + 2\mu = 0$$

которые получаются из условий обращения в нуль потенциальной энергии деформации и напряжений при отсутствии деформаций.

Условие сильной эллиптичности для материала Адамара сводится к легко проверяемому неравенству [4] $\Phi''(J) \geqslant 0$.

Начальная деформация имеет вид $X_1 = \lambda_1 x_1, X_2 = \lambda_2 x_2, X_3 = \lambda_3 x_3$, где X_1, X_2, X_3 – эйлеровы декартовы координаты, x_1, x_2, x_3 – лагранжевы декартовы координаты, выбранные так, что полупространство занимает область $x_3 > 0$. Градиент деформации $\mathbf{C}_0$ определяется формулой

$$\mathbf{C}_0 = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$$

Будем считать, что на поверхности полупространства $x_3 = 0$ напряжения отсутствуют или задано равномерное гидростатическое давление p. Это приводит к уравнению, связывающему главные растяжения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$2\mu\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\Phi'(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = -p\lambda_1\lambda_2 \tag{5}$$

Линеаризованный тензор напряжений Пиолы для уравнения состояния (4) выражается формулой

$$\mathbf{P} = 2\mu[\operatorname{grad}\mathbf{w} + (L+K)\operatorname{tr}(\mathbf{C}_0^{-1}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{w})\mathbf{C}_0^{-T} - L\mathbf{C}_0^{-T}\cdot(\operatorname{grad}\mathbf{w})^T\cdot\mathbf{C}_0^{-T}]$$

$$L = \Phi'(J)J/2\mu, \quad K = \Phi''(J)J^2/2\mu, \quad J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Линеаризованные уравнения равновесия для материала Адамара даются соотношениями

$$\Delta w_k + \frac{K}{\lambda_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\lambda_3}\frac{\partial w_3}{\partial x_3}\right] = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad w_k = \mathbf{w}\cdot\mathbf{i}_k \tag{6}$$

Краевые условия при учете уравнения (5) могут быть преобразованы к виду

$$\frac{1}{\lambda_3}\frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial w_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{1}{\lambda_3}\frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{2}{\lambda_3}\frac{\partial w_3}{\partial x_3} + \left(\frac{K}{\lambda_3^2} - 1\right)\left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\lambda_3}\frac{\partial w_3}{\partial x_3}\right] = 0 \tag{7}$$

Можно показать, что система уравнений (6) имеет экспоненциально затухающие при $x_3 \to \infty$ решения

$$w_1 = \exp(-i\xi_1 x_1 - i\xi_2 x_2)\left[C_1 e^{-\tau_1 x_3} + i\frac{\xi_1}{\tau_2}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}C_3 e^{-\tau_2 x_3}\right]$$

$$w_2 = \exp(-i\xi_1 x_1 - i\xi_2 x_2)\left[C_2 e^{-\tau_1 x_3} + i\frac{\xi_2}{\tau_2}\frac{\lambda_3}{\lambda_2}C_3 e^{-\tau_2 x_3}\right] \tag{8}$$

$$w_3 = \exp(-i\xi_1 x_1 - i\xi_2 x_2)\left[C_3 e^{-\tau_2 x_3} - i\frac{\lambda_3}{\tau_1}\left(\frac{\xi_1}{\lambda_1}C_1 + \frac{\xi_2}{\lambda_2}C_2\right)e^{-\tau_1 x_3}\right]$$

$$\tau_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad \tau_2 = \frac{[\xi_1^2(1 + K/\lambda_1^2) + \xi_2^2(1 + K/\lambda_2^2)]^{1/2}}{[1 + K/\lambda_3^2]^{1/2}}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования, ξ_1, ξ_2 – действительные постоянные.

Подставляя выражения (8) в краевые условия (7), можно получить условие существования нетривиальных решений краевой задачи (6), (7), которое вместе с уравнением (5) определяет значения главных растяжений λ_1, λ_2, λ_3, при которых нарушаются условия Шапиро – Лопатинского. Это условие имеет громоздкий вид и здесь не приводится.

Более обозримые выражения получаются в случае плоской задачи. Для плоской деформации ($\lambda_2 = 1$) система (6) имеет решения

$$w_1 = e^{-i\xi_1 x_1}\left[i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}C_1 e^{-\tau_1 x_3} + \frac{i}{A}C_2 e^{-\tau_2 x_3}\right]$$

$$w_3 = e^{-i\xi_1 x_1}\left[C_1 e^{-\tau_1 x_3} + C_2 e^{-\tau_2 x_3}\right]$$

$$\tau_1 = \xi_1, \quad \tau_2 = \xi_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}A, \quad A = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + K}{\lambda_3^2 + K}}$$

где C_1, C_2 – новые постоянные интегрирования.

Здесь нарушение условий Шапиро – Лопатинского происходит в том случае, если главные растяжения λ_1, λ_3 помимо уравнения (5) связаны соотношением

$$\frac{4\lambda_3^2}{\lambda_1^2+\lambda_3^2}-\frac{2}{\lambda_1^2}A+\left(\frac{K}{\lambda_3^2}-1\right)\frac{1}{\lambda_1}\left[\frac{1}{A}-A\right]=0$$

Отметим, что исследования поверхностной неустойчивости были начаты в [20]. Обзор результатов о потере устойчивости упругих полуплоскости и полупространства для различных материалов содержится в [21]. В частности, в случае плоской задачи для гармонического (полулинейного) материала потеря устойчивости происходит при значении главного удлинения λ_1 в направлении оси x_1, равном 0,5, для неогуковского материала при $\lambda_1 \approx 0{,}54$.

В случае осесимметричной деформации выпучивание полупространства из неогуковского материала происходит при $\lambda_1 \approx 0{,}66$ [22], для материала Бартенева – Хазановича при $\lambda_1 = \sqrt[3]{3}$ [23]. Нарушение условия дополнительности при достижении критических значений деформации для полупространства ранее отмечалось при исследовании закритического поведения толстой круглой плиты [22].

Следует заметить, что значения деформаций, при которых теряет устойчивость упругое полупространство и, следовательно, нарушается условие дополнительности, достаточно велики, достигая 50%, что реально только для высокоэластичных материалов типа резины.

Автор благодарит Зубова Л.М. за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99–01–01019).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Критерий эллиптичности уравнений равновесия нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 23–34.
2. *Гурвич Е.А.* Условие Адамара в нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 45–51.
3. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Эффективный способ проверки условия Адамара для нелинейно-упругой сжимаемой среды // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 296–305.
5. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 21–31.
6. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Об условиях существования продольных волн в анизотропной нелинейно-упругой среде // Докл. РАН. 1994. Т. 334. 2. С. 156–158.
7. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О необходимых и достаточных признаках эллиптичности уравнений равновесия нелинейно-упругой среды // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 209–223.
8. *James R.D.* Phase transformations and non-elliptic free energy functions // New Perspectives in Thermodynamics / Ed. J. Serrin. Berlin: Springer. 1986. P. 223–239.
9. *Knowles J.K., Sternberg E.* On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics for a special material // J. Elast. 1975. V. 5. № 3–4. P. 341–361.
10. *Knowles J.K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1977. V. 63. № 4. P. 321–341.
11. *Knowles J.K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics // J. Elast. 1980. V. 10. № 3. P. 255–293.
12. *Zee L., Sternberg E.* Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyperelastic solids // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1983. V. 83. № 1. P. 53–90.
13. *Rosakis P.* Ellipticity and deformation with discontinuous gradients in finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1990. V. 109. № 1. P. 1–37.
14. *Агранович Н.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.

15. *Волевич Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68. Вып. 3. С. 373–416.
16. *Егоров Ю.В., Шубин М.А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. Дифференциальные уравнения с частными производными. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1987. 262 с.
17. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
18. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука, 1990. 536 с.
19. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
20. *Biot M.A.* Mechanics of incremental deformations. New York: Willey, 1965. 506 с.
21. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986. 511 с.
22. *Зеленин А.А., Зубов Л.М.* Поведение толстой круглой плиты после потери устойчивости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 642–650.
23. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 181–190.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.01.2000