

УДК 539.3

© 2000 г. К.Ф. ЧЕРНЫХ

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В [1] был предложен сравнительно простой и хорошо обозримый вариант теории, близкий по структуре к предложенному автором [2, 3] для нелинейной плоской задачи. Вводится закон упругости, близкий к редуцированному стандартному, широко использованному в нелинейной плоской задаче. Рассматривается ряд задач, в том числе эллиптическая полость и дисковая трещина.

1. Приведем исходные комплексные зависимости [1]. Осесимметричной деформации тел вращения отвечает в цилиндрических координатах закон перемещения

$$z = r(\dot{r}, \dot{x}_3)e^{i\theta}, \quad x_3 = x_3(\dot{r}, \dot{x}_3) \quad (1.1)$$

Здесь и ниже значком  $\cdot$  снабжаются величины, отнесенные к исходной (недеформированной) конфигурации тела.

С использованием комплексных координат

$$\xi = \dot{r} + i\dot{x}_3, \quad w = r + ix_3 \quad (1.2)$$

была построена комплексная версия теории, со следующими основными зависимостями:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}} - i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}} + i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} \right)$$

$$T_r = t_{rr} + t_{33} + i(t_{23} - t_{32}), \quad T_3 = t_{22} - t_{33} + i(t_{23} + t_{32})$$

При этом имеем:

однородное уравнение равновесия

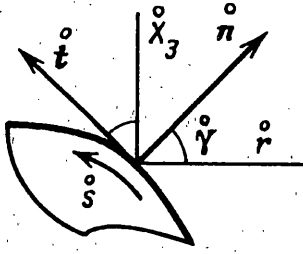
$$\frac{\partial [{}^r\{F^{-1}J\Sigma\}_r]}{\partial \xi} + \frac{\partial [{}^3\{F^{-1}J\Sigma\}_3]}{\partial \bar{\xi}} + \{F^{-1}J\Sigma\}_{\theta\theta} = 0 \quad (1.3)$$

закон упругости для изотропного сжимаемого материала

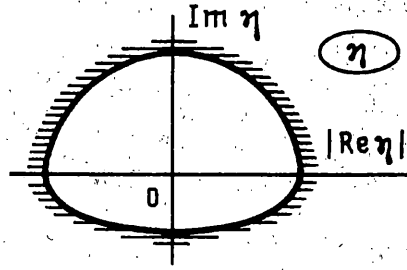
$$\{F^{-1}J\Sigma\}_r = \frac{\partial w}{\partial \xi} \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial | \partial w / \partial \xi |}$$

$$\{F^{-1}J\Sigma\}_3 = \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial | \partial w / \partial \bar{\xi} |}$$

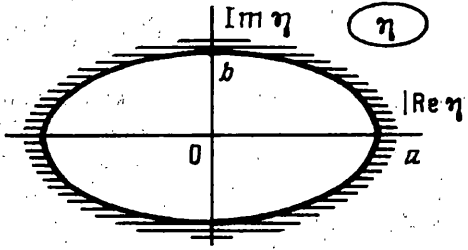
$$\{F^{-1}J\Sigma\}_{\theta\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial (r/\dot{r})} \quad (1.4)$$



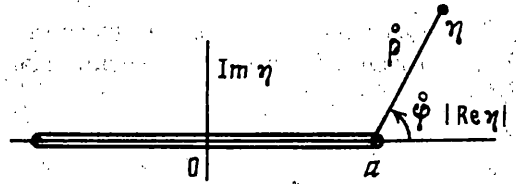
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

силовое (статическое) граничное условие (фиг. 1):

$$\{F^{-1}J\Sigma\}_r e^{i\dot{\gamma}} + \{F^{-1}J\Sigma\}_3 e^{-i\dot{\gamma}} = [\sigma_{nn}(\dot{s}) + i\sigma_{nt}(\dot{s})] e^{i\dot{\gamma}} \quad (1.5)$$

условие жесткого края

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - 1 \right) e^{i\dot{\gamma}} - \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{-i\dot{\gamma}} = 0 \quad (1.6)$$

После нахождения определяющих функций  $\partial w / \partial \xi$ ,  $\partial w / \partial \bar{\xi}$  условные напряжения подсчитываются по формулам

$$\dot{\Sigma}_r \equiv \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial | \partial z / \partial \xi |}$$

$$\dot{\Sigma}_3 \equiv \dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{33} + i2\dot{\sigma}_{r3} = \frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|^{-1} \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right|^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial | \partial w / \partial \xi |} \quad (1.7)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = \partial \Phi / \partial (r / \dot{r})$$

При этом для сжимаемого изотропного материала

$$\Phi = \Phi \left( \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right|, \frac{r}{\dot{r}} \right) \quad (1.8)$$

Наконец, для главных кратностей удлинений и условных напряжений имеют место

следующие компактные выражения: ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$ )

$$\lambda_1 = \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right|, \quad \lambda_2 = \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right| - \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right|, \quad \lambda_\theta = \frac{r}{\dot{r}}$$

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w / \partial \xi|} + \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w / \partial \bar{\xi}|} \right), \quad \dot{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w / \partial \xi|} - \frac{\partial \Phi}{\partial |\partial w / \partial \bar{\xi}|} \right) \quad (1.9)$$

$$\dot{\sigma}_\theta = \dot{\sigma}_{\theta\theta} = \partial \Phi / \partial (r / \dot{r})$$

Угол поворота вокруг касательной к координатной линии  $\dot{r} = \text{const}$  подсчитывается по формуле

$$e^{i\omega} = \frac{\overline{\partial w}}{\partial \xi} \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|^{-1} \quad (1.10)$$

2. Примем аналог редуцированного стандартного материала для плоской задачи [2.3], определяемый здесь упругим потенциалом

$$\Phi = \sigma^* \left| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right|^2 + \alpha \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right|^2 \quad (2.1)$$

где  $\sigma^*$ ,  $\alpha$  – упругие постоянные. При этом из (1.9) следует

$$\dot{\sigma}_1 - \sigma^* = \sigma^* \frac{(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)}{2} + \alpha \frac{(\lambda_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)}{2}$$

$$\dot{\sigma}_2 - \sigma^* = \sigma^* \frac{(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)}{2} - \alpha \frac{(\lambda_1 - 1) - (\lambda_2 - 1)}{2}$$

При отсутствии деформации  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  и  $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = \sigma^*$ , т.е.  $\sigma^*$  – предварительное всестороннее (в плоскости  $\dot{x}_3$ ) растяжение. Из выражений (1.4) следует

$$\{F^{-1}J\Sigma\}_2 = 2\sigma^* \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \{F^{-1}J\Sigma\}_3 = 2\alpha \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}}, \quad \{F^{-1}J\Sigma\}_{\theta\theta} = 0 \quad (2.2)$$

Подстановка этих выражений в уравнение равновесия (1.3) дает

$$\sigma^* \dot{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \dot{r} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \alpha \dot{r} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \dot{r} \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} = 0 \quad (2.3)$$

Если ввести новые комплексные переменные соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \frac{\dot{r}}{r_*} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \equiv \frac{\dot{r}}{r_*} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \quad (2.4)$$

( $r_*$  – положительная постоянная с размерностью длины), то из (2.3) получаем уравнение

$$\sigma^* \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\eta} \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = 0$$

которому отвечают выражения

$$w = \int \Phi(\eta) d\eta + \int \overline{\Psi(\eta)} d\bar{\eta},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \Phi(\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}} = \overline{\Psi(\eta)} \quad (2.5)$$

При этом граничные условия (1.5)–(1.6) принимают вид

$$\sigma^* \Phi(\eta) e^{i\dot{\gamma}} + \alpha \Psi(\eta) e^{i\dot{\gamma}} = \frac{1}{2} [\sigma_{nn}^{\circ}(\dot{s}) + i \sigma_{ni}^{\circ}(\dot{s})] \quad (2.6)$$

$$(\Phi(\eta) - 1) e^{i\dot{\gamma}} - \Psi(\eta) e^{i\dot{\gamma}} = 0 \quad (2.7)$$

Далее из (1.7), (1.10) и (2.5) находим

$$\dot{\Sigma}_r \equiv \dot{\sigma}_{\rho\rho} + \dot{\sigma}_{33} = \frac{2\sigma^*}{i/r_*} |\Phi(\eta)| \quad (2.8)$$

$$\dot{\Sigma}_3 \equiv \dot{\sigma}_{r\rho} - \dot{\sigma}_{33} + i2\dot{\sigma}_{\rho 3} = \frac{2\alpha}{i/r_*} \overline{\Phi(\eta)\Psi(\eta)} |\Phi(\eta)|^{-1}$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = 0$$

$$e^{i\omega} = \overline{\Phi(\eta)} |\Phi(\eta)|^{-1} \quad (2.9)$$

Наконец, из соотношений (2.4) и (1.2) следует соотношение

$$r_* \eta = \int \operatorname{Re} \xi d\xi \quad (2.10)$$

В [3.4] было показано, что истинные напряжения (напряжения Коши) непригодны для рассмотрения сингулярных проблем и обладают недостатками общего характера. Поэтому в статье они не рассматриваются.

3. Рассмотрим (недеформированное) пространство с осесимметричной полостью, сечение которой проходящей через ось симметрии полости плоскостью показано на фиг. 2. Строго говоря, на фиг. 2 следовало бы показать половину контура отверстия (при  $\dot{r} \geq 0$ ). Но симметрия рассматриваемых задач позволяет рассматривать плоскость с отверстием.

Итак, считая, что дислокация Вольтерра и сосредоточенные силы отсутствуют, примем

$$\Phi(\eta) = \frac{\dot{r}}{r_*} [a_0 + \Phi_0(\eta)], \quad \Phi_0(\eta) = \frac{a_{-2}}{\eta^2} + \frac{a_{-3}}{\eta^3} + \dots$$

$$\Psi(\eta) = \frac{\dot{r}}{r_*} [b_0 + \Psi_0(\eta)], \quad \Psi_0(\eta) = \frac{b_{-2}}{\eta^2} + \frac{b_{-3}}{\eta^3} + \dots \quad (3.1)$$

Подставляя эти выражения в соотношения (2.8), (2.9) и устремляя  $\eta$  к бесконечности, находим

$$a_0 = |a_0| = \frac{\dot{\sigma}_{rr}^{\infty} + \dot{\sigma}_{33}^{\infty}}{2\sigma^*}, \quad b_0 = \frac{\dot{\sigma}_{rr}^{\infty} - \dot{\sigma}_{33}^{\infty} - i2\dot{\sigma}_{r3}^{\infty}}{2\alpha} \quad (3.2)$$

Пусть

$$\eta = \kappa(\chi) = R(\chi + \kappa_0(\chi))$$

$$\kappa_0(\chi) = \frac{c_{-1}}{\chi} + \frac{c_{-2}}{\chi^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{\chi^n} \quad (3.3)$$

функция, конформно отображающая внешность единичной окружности плоскости на

рассматриваемую область плоскости. На единичной окружности ( $\chi = \sigma = e^{i\theta}$ ) имеем [3]:

$$\bar{\sigma} = \sigma^{-1}, \quad \sigma = \overline{\sigma^{-1}}, \quad e^{i\dot{\gamma}} = \frac{\sigma \chi'(\sigma)}{|\sigma \chi'(\sigma)|}, \quad e^{-i\dot{\gamma}} = \frac{\overline{\sigma \chi'(\sigma)}}{|\sigma \chi'(\sigma)|} \quad (3.4)$$

Введем также функции

$$\begin{aligned} \Phi_0^\vee(\chi) &= \Phi_0[\kappa(\chi)], \quad \Psi_0^\vee(\chi) = \Psi_0[\kappa(\chi)] \\ \Phi^\vee(\chi) &= \frac{\dot{r}}{r_*} [a_0 + \Phi_0^\vee(\chi)], \quad \Psi^\vee(\chi) = \frac{\dot{r}}{r_*} [b_0 + \Psi_0^\vee(\chi)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теперь с помощью соотношений (3.1), (3.3) и (3.5) записываем однородное статическое граничное условие (2.6) в виде

$$\begin{aligned} \sigma^* \Phi_0^\vee(\sigma) \sigma \chi'(\sigma) + \alpha \Psi_0^\vee(\sigma) \sigma \chi'(\sigma) &= \\ = -R[\sigma^* a_0 \sigma \chi'_0(\sigma) + \alpha \bar{b}_0 \sigma^{-1}] - \overline{R[\alpha b_0 \sigma \chi'_0(\sigma) + \sigma^* \bar{a}_0 \sigma^{-1}]} \end{aligned}$$

Используя предложенный автором [5, 3] метод расчленения граничных условий (альтернативный методу интегралов типа Коши), приравняем первое слагаемое левой части первому слагаемому правой, а второе – второму. В результате проделанного получаем, уходя с контура в область (т.е. заменяя  $\sigma$  на  $\chi$ ):

$$\begin{aligned} \sigma^* \Phi_0^\vee(\chi) &= -\frac{R}{\chi \chi'(\chi)} \left[ \sigma^* a_0 \chi \chi'_0(\chi) + \frac{\alpha \bar{b}_0}{\chi} \right] \\ \alpha \Psi_0^\vee(\chi) &= -\frac{R}{\chi \chi'(\chi)} \left[ \alpha b_0 \chi \chi'_0(\chi) + \frac{\sigma^* \bar{a}_0}{\chi} \right] \end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений в (3.1) дает

$$\begin{aligned} \sigma^* \Phi^\vee(\chi) &= \frac{\dot{r}}{r_*} \frac{R}{\chi \chi'(\chi)} \left[ \sigma^* a_0 \chi - \frac{\alpha \bar{b}_0}{\chi} \right] \\ \alpha \Psi^\vee(\chi) &= \frac{\dot{r}}{r_*} \frac{R}{\chi \chi'(\chi)} \left[ \alpha b_0 \chi - \frac{\sigma^* \bar{a}_0}{\chi} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Остается вернуться на плоскость  $\eta$ . Если возврат затруднен, можно провести рассмотрение и на плоскости  $\chi$ . Далее, для определения напряжений следует использовать соотношения (2.8).

4. Рассмотрим отвечающую эллипсоидальной выемке плоскость с эллиптическим отверстием (фиг. 3), для которой [3]:

$$\begin{aligned} \eta = \kappa(\chi) &= R(\chi + m\chi^{-1}), \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \\ \chi &= \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4R^2 m}}{2R}, \quad \chi^{-1} = \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 - 4R^2 m}}{2Rm} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\chi \chi'(\chi) = R(\chi - m\chi^{-1}) = \sqrt{\eta^2 - 4R^2 m}$$

Отсюда и из (3.6) находим

$$\begin{aligned}\sigma^* \Phi(\eta) &= \frac{\dot{r}}{r_*} \left[ \frac{\sigma^* a_0 - \alpha \bar{b}_0 / m}{2} - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4R^2 m}} + \frac{\sigma^* a_0 + \alpha \bar{b}_0 / m}{2} \right] \\ \alpha \Psi(\eta) &= \frac{\dot{r}}{r_*} \left[ \frac{\alpha b_0 - \sigma^* \bar{a}_0 / m}{2} - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4R^2 m}} + \frac{\alpha b_0 + \sigma^* \bar{a}_0 / m}{2} \right]\end{aligned}\quad (4.2)$$

Для определения напряжений остается подставить полученные функции в соотношения (2.8). При этом следует также использовать соотношение (2.10).

Наиболее интересен случай вырожденного эллипсоида ( $b = 0$ ) – дисковая трещина (фиг. 4). Для нее согласно (4.1)–(4.2):

$$b = 0, \quad R = a/2, \quad m = 1$$

$$\begin{aligned}\sigma^* \Phi(\eta) &= \frac{\dot{r}}{r_*} \left[ \frac{\sigma^* a_0 - \alpha \bar{b}_0}{2} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - a^2}} + \frac{\sigma^* a_0 + \alpha \bar{b}_0}{2} \right] \\ \alpha \Psi(\eta) &= \frac{\dot{r}}{r_*} \left[ \frac{\alpha b_0 - \sigma^* \bar{a}_0}{2} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - a^2}} + \frac{\alpha b_0 + \sigma^* \bar{a}_0}{2} \right]\end{aligned}\quad (4.3)$$

Рассмотрим асимптотику напряжений в окрестности правого конца разреза ( $\dot{r} = a$ ). Там, прежде всего

$$\eta \sim a, \quad \sqrt{\eta^2 - a^2} \sim \sqrt{2a\dot{\rho}} e^{i\dot{\phi}/2}$$

Кроме того будем считать, что на бесконечности реализуется всестороннее равномерное растяжение  $\dot{\sigma}^\infty$ , так что согласно (3.2) и (4.3)

$$\dot{\sigma}_{rr}^\infty = \dot{\sigma}_{33}^\infty = \dot{\sigma}^\infty; \quad a_0 = \dot{\sigma}^\infty / \sigma^*, \quad b_0 = 0$$

$$\sigma^* \Phi(\eta) \sim \frac{\dot{r}}{2r_*} \dot{\sigma}^\infty \left( \frac{a}{2\dot{\rho}} \right)^{1/2} e^{-i\dot{\phi}/2}, \quad \alpha \Psi(\eta) \sim -\frac{\dot{r}}{2r_*} \dot{\sigma}^\infty \left( \frac{a}{2\dot{\rho}} \right)^{1/2} e^{-i\dot{\phi}/2}$$

Отсюда и из (2.8) следуют выражения для условных напряжений

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma}_r &\equiv \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{33} \sim \dot{\sigma}^\infty \left( \frac{a}{2\dot{\rho}} \right)^{1/2} \\ \dot{\Sigma}_3 &\equiv \dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{33} + i2\dot{\sigma}_{r3} \sim -\dot{\sigma}^\infty \left( \frac{a}{2\dot{\rho}} \right)^{1/2} e^{i\dot{\phi}}\end{aligned}$$

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{rr} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{23} \end{array} \right\| \sim \dot{\sigma}^\infty \left( \frac{a}{2\dot{\rho}} \right)^{1/2} \left\| \begin{array}{l} \sin^2 \dot{\phi} / 2 \\ \cos^2 \dot{\phi} / 2 \\ \sin \dot{\phi} / 2 \cos \dot{\phi} / 2 \end{array} \right\| \quad (4.4)$$

весьма похожие по своей структуре на таковые в плоской задаче [3].

Заметим что совершенно аналогично можно при использовании условия жесткого края (2.7) получить решения задач для эллиптического жесткого включения и жесткого диска.

Работа выполнена при поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" (N 00-15-960027) и гранта РФФИ (N 99-01-00686).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черных К.Ф.* Осесимметричная деформация нелинейно-упругого тела вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 22-29.
2. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости и ее применение к физически и геометрически нелинейной теории трещин // Успехи механики. 1989. Т. 12. № 4. С. 51-57.
3. *Черных К.Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996. 287 с.
4. *Новожилов В.В., Черных К.Ф.* Об "истинных" мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73-79.
5. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
23.03.1999