МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. В.А. БАБЕШКО

СРЕДЫ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ
(случай совокупностей включений и трещин)

Рассматривается задача о локализации вибрационного процесса совокупностями параллельно ориентированных плоских жестких включений и полостей-трещин, описываемых теорией Гриффитса [1]. Этот вид неоднородностей является наиболее частым объектом, сопутствующим слоисто-неоднородным геологическим структурам, в том числе имитатором разломов и включений, является основным предвестником утраты прочностных свойств конструкции, началом ее хрупкого разрушения, одними из распространенных несовершенств в материалах с дефектами.

В настоящей работе получены общие соотношения, при выполнении которых имеет место локализация волнового процесса в упругой среде, а также в других средах, в которых имеет место распространение волновых процессов и которые наделены плоско-параллельными неоднородностями.

Исследования открывают возможность принципиально нового метода вибрационного возбуждения зон, содержащих неоднородности, на энергосберегающей резонансной основе, когда направленные сейсмические антенны подчинены дополнительным требованиям, диктуемым условиями локализации [2]. Заметим, что развиваемая теория позволяет исследовать "ловушечные волны", возникающие в задачах акустики.

Предпринята попытка совершенствования классификации таких объектов, ранее названных "вирусами" вибропрочности, в основе которой лежат возможности используемого математического аппарата, развитого специально для их исследования [3, 4].

Работы в этой области инициированы с одной стороны оригинальными теоретическими исследованиями академика И.И. Воровича [5, 6], с другой – теоретическими и экспериментальными исследованиями математиков и геофизиков СО РАН.

Обнаруженный высокочастотный резонанс в полуограниченных деформируемых средах с неоднородностями [7] позволил с еще одной стороны подойти к изучению волновых процессов в сложных, отличающихся от линейно акустических, средах. В последних, как известно, нет понятия статических деформаций, а объекты, локализующие волновые процессы, называются открытыми резонаторами. Из желания дистанцироваться по этой и другим причинам от названия наших объектов открытыми резонаторами, они были названы "вирусами" вибропрочности, что более детально объяснено в [4].

1. Рассматривается упругое пространство, которое параллельными горизонтальными сечениями мысленно делится на слои, верхний и нижний из которых являются полупространствами. В каждом сечении расположена плоская неоднородность. Расположив плоскость x_1ox_2 параллельно плоскостям неоднородностей, приходим к задаче, когда внутри упругого пространства в сечениях $x_3 = h_{1l}$ ($l = 1, 2, \ldots, L$) имеются жесткие включения с носителями S_{1l}, а в сечениях $x_3 = h_{2l}$ ($l = 1, 2, \ldots, N$) – полости-трещины с носителями S_{2l}. Может оказаться, что некоторые h_{1l} и h_{2l} совпадают.

Множества, представляющее собой объединение носителей в сечениях $x_3 = h_{kl}$, могут представлять собой совокупность одно или многосвязных областей.

Согласно принятым в [4] обозначениям, такая совокупность неоднородностей названа "вирусом" вибропрочности и обозначается $V(S_{1l}, T_{2n})$, $l \leqslant L$, $n \leqslant N$. Уточним это обозначение применительно к исследуемой задаче. Введем определение

Определение 1. Вирус, состоящий из L параллельных включений в упругом пространстве, будем называть вирусом класса 1 и L-уровневым, вида S, и обозначать

$$V(1/h_1;\ S_1/\ldots/h_L;\ S_L) \tag{1.1}$$

Аналогично вирус, состоящий из L параллельных трещин в упругом пространстве, будем называть вирусом класса 2 и L-уровневым, вида S и обозначать

$$V(2/h_1;\ S_1/\ldots/h_L;\ S_L)$$

Вирус, состоящий из L параллельных включений и M параллельных трещин в упругом пространстве, будем называть смешанным вирусом класса (1, 2) и K, ($K \leqslant L + M$)-уровневым, вида S и обозначать $V(1/h_{11};\ S_{11}/h_{12};\ S_{12}/\ldots/h_{1L};\ S_{1L}//2/h_{21};\ S_{21}/h_{22};\ S_{22}/\ldots/h_{2M};\ S_{2M})$.

Если некоторая область S_{kl} является неограниченной плоскостью, то она обозначается в формуле знаком ∞. Уровень равен количеству разнящихся h_{kl}, повторяющиеся считаются один раз.

Определение вируса 1 класса предполагает, что для некоторого $l = p$ множество S_p может быть всей плоскостью. В этом случае вместо S_p в обозначении "вируса" (1.1) ставится значек ∞, т.е. пространство этим множеством делится жесткой границей на две части.

Условимся также в случае, если $h_1 = 0$, то в обозначение "вируса" вносится непосредственно 0. Таким образом, чтобы записать верхнее и нижнее полупространства с одним неограниченным горизонтальным включением (жесткая граница полупространства) и одним ограниченным жестким включением ($h_1 = 0$, $S_1 = \infty$; $h_2 \neq 0$, S_2), надо использовать соответственно обозначение $V(1/0;\ \infty/h_2;\ S_2)$, $h_2 > 0$; или $h_2 < 0$. Это 2-уровневый "вирус".

Если вместо полупространства взят слой с одним жестким включением и жестко закрепленными границами, то это 3-уровневый "вирус", и запись следующая $V(1/0;\ \infty/h_2;\ S_2/h_3;\ \infty)$, $h_2 > 0$. Определение предполагает, что дополнительно должно даваться описание множеств S_l в сечениях h_l, и требований к областям.

Одновременно надо помнить, что в области S_l контакта жесткого включения со средой задаются три компоненты перемещений. Совершенно аналогично описываются "вирусы" 2 класса, покажем на аналогичных примерах.

Чтобы записать верхнее и нижнее полупространство с одной горизонтальной трещиной, т.е. полупространство со свободной границей и одной внутренней горизонтальной трещиной при $h_2 \neq 0$, надо использовать обозначение $V(2/0;\ \infty/h_2;\ S_2)$. Это 2-уровневый "вирус".

Если вместо полупространства взят слой со свободной границей с одной трещиной, то это 3-уровневый "вирус", и запись следующая: $V(2/0;\ \infty/h_1;\ S_1/h_2;\ \infty)$, $h_1 > 0$. В областях S_l, в связи с тем, что рассматривается трещина, задаются три компоненты напряжений.

Приведенное выше описание "вирусов" 1 и 2 классов позволяет достаточно просто описать смешанные "вирусы" (1, 2)-класса. Упругое полупространство с действующим на поверхности жестко сцепленным штампом в области S_{11} – это "вирус" $V(1/0,\ S_{11}//2/0;\ S_{21})$. Это одноуровневый "вирус". Здесь S_{21} есть дополнение S_{11} до всей плоскости или $S_{21} = R_2/S_{11}$, здесь R_2 – плоскость.

Если это слой, сцепленный с жестким основанием при $h_2 < 0$, и описанным выше штампом, то с принятыми обозначениями $V(1/0, S_{11}/h_2, \infty//2/0; S_{21})$. Это двухуровневый "вирус".

Может оказаться, что в некоторой области границы одновременно задаются частично компоненты перемещений, частично напряжений. Этот факт должен быть описан отдельно. Например, "вирус", описывающий полупространство, лежащее без трения на жестком основании, обозначается так $V(1/0, \infty//2/0; \infty)$. Отдельно должно быть указано, что вертикальное перемещение и касательные напряжения на границе отсутствуют.

Система обозначений введена в описанной выше форме в связи с тем, что в случае процесса разрушения материала, начинающегося в зонах неоднородностей, плоскости, их содержащие, останутся неизменными, а области S_{kl} и условия в них могут измениться.

Сформулируем два типа задач теории "вирусов" вибропрочности.

Определение 2. Параметрами в задачах теории "вирусов" будем называть частоту ω колебания среды, $0 \leqslant \omega < \infty$ (включается статический случай), механические и физические (модули, плотности, электрические, тепловые и др. параметры) характеристики среды и внешние воздействия на систему – поверхностные и объемные напряжения, и перемещения.

Прямая задача. Задан "вирус" вибропрочности определенного класса с фиксированными множествами h_l, S_l. Требуется найти значения остальных параметров задачи, в том числе и внешних воздействий, обеспечивающих локализацию волнового процесса "вирусом".

Первая обратная задача. У "вируса" определенного класса с заданными h_l и заданными остальными параметрами задачи, в том числе и внешними воздействиями, требуется найти множества S_l, при которых волновой процесс локализуется "вирусом".

Вторая обратная задача. У "вируса" определенного класса с заданными параметрами задачи, в том числе и внешними воздействиями, требуется найти множества h_l и S_l, при которых волновой процесс локализуется "вирусом".

Под волновым процессом при нулевой частоте понимается случай статической задачи, а под локализацией – рост деформаций в определенной зоне.

Возвращаясь к поставленной в начале п. 1 задаче, объектом исследования в принятых обозначениях является "вирус"

$V(1/h_{11}; S_{11}/h_{12}; S_{12}/.../h_{1L}; S_{1L}//2/h_{21}; S_{21}/h_{22}; S_{22}/.../h_{2M}; S_{2M})$.

Задача состоит в выяснении условий, которым обязаны удовлетворять параметры задачи, с тем, чтобы "вирус" локализовал волновой процесс в своей окрестности в случае прямой задачи, и в определении h_{kl}, S_{kl} – в случае обратной.

Один из путей исследования этих задач состоит в установлении соотношений, связывающих в условиях локализации волнового процесса, все перечисленные параметры.

С этой целью сформулированная смешанная краевая задача динамической теории упругости сводится к системе интегральных уравнений с соблюдением всех требований корректной постановки задач колебания в неограниченных областях [8].

2. Применим для исследования проблемы метод, развитый в [2], гл. XI, сохранив принятые там обозначения.

Будем считать, что на границы включений действуют перемещения с амплитудами w_{ls} ($l = 1, 2, ..., L$, $s = 1, 2, 3$) и частотой ω, а на границы трещин соответственно напряжения с амплитудами w_{ls} ($l = L + 1, L + 2, ..., L + M$, $s = 1, 2, 3$). Для простоты, считаем, что все h_{kl} различны.

Обозначим двумерное преобразование Фурье заглавными буквами и положим

$$Q_{ls}(\alpha_1, \alpha_2) = \iint\limits_{S_{kl}} q_{ls}(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \qquad (2.1)$$

где α_p ($p = 1, 2$) – параметры преобразования Фурье. Повторив подход, изложенный в [2], после достаточно емких преобразований приходим к системе интегральных уравнений следующего вида:

$$\sum_{l=1}^{L+M}\sum_{s=1}^{3}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)} D^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)K_{ls}(\alpha_1,\ \alpha_2)Q_{ls}d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= w_{pn}(x_1,x_2),\quad u^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2 \tag{2.2}$$

$$x_1,x_2\subset S_p\quad (n=1,2,3;\ p=1,2,\ldots,L+M)$$

Здесь q_{ls} ($l = 1, 2, \ldots, L$, $s = 1, 2, 3$) – скачки компонент напряжений, а для $l = L + 1$, $L + 2, \ldots, L + M$, $s = 1, 2, 3$ – скачки компонент перемещений при пересечении областей S_{kl}.

Для диагональных элементов матрицы-функции $K_{ls}(\alpha_1, \alpha_2)$ имеют место асимптотические оценки

$$K_{ls}(\alpha_1,\alpha_2)=cu^{-1}[1+O(u^{-1})]D(\alpha_1,\alpha_2),\quad K_{ls}(\alpha_1,\alpha_2)=cu[1+O(u^{-1})]D(\alpha_1,\alpha_2)$$

Участвующие в представлении (2.2) параметры упорядочим по следующему правилу: обозначим через q_l ($l = 1, 2, \ldots, 3L$) скачки компонент напряжений (нормальной и двух касательных) при переходе по вертикали областей S_{1l}, занятых включениями, а затем для $l = 3L + 1, 3L + 2, \ldots, 3L + 3M$ – скачки компонент перемещений (нормальной и двух касательных) при таком же переходе по вертикали зон трещин, т.е. областей S_{2l}.

Для дальнейшего введем векторное пространство $\mathbf{Q} = \{q_l\} \subset H = H^{-1/2} \oplus H_0^1$ – прямую суммы двух векторных пространств:

$$\{q_l\}\subset H^{-1/2}=\ldots\sum_{l=1}^{3L}\oplus H^{-1/2}(S_l),\quad \{q_l\}\subset H_0^1=\sum_{l=3L+1}^{3L+3M}\oplus H_0^1(S_l) \tag{2.3}$$

Включения означают, что компоненты векторов в своих областях принадлежат указанным пространствам.

Переходя в уравнении (2.2) к векторному представлению, систему интегральных уравнений можно представить в операторном виде, задав оператор на H со значениями в L_2:

$$\mathbf{KQ}(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}D^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2)d\alpha_1 d\alpha_2=\mathbf{f}(x_1,x_2)$$

$$(x_1,x_2\subset S) \tag{2.4}$$

Здесь $D(\alpha_1, \alpha_2)$ – целая функция; $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ – матрица-функция, элементами которой являются блоки $K_{ls}(\alpha_1, \alpha_2)$ с элементами – целыми функциями; $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ – многомерный вектор, компонентами которого являются элементы Q_{ls}, расположенные в определенной последовательности. В этой же последовательности формируется вектор $\mathbf{f}(x_1, x_2)$, состоящий из компонент w_{nq}.

Справедлива теорема.

Теорема 1. Операторное уравнение (5) эквивалентно уравнению второго рода с вполне непрерывным в H оператором.

3. Обозначим для заданной частоты ω через $\zeta_m(\alpha_1, \alpha_2)$ и $z_m(\alpha_1, \alpha_2)$ ($m = 1, 2, \ldots, M$) вещественные одномерные нулевые множества функций $D(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\operatorname{Det}\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ представляющие собой аналитические кривые соответственно. В случае несовпадения количества вещественных нулевых множеств добавим до числа M ближайшие к вещественной оси комплексные.

Построим функцию

$$D_1(\alpha_1,\alpha_2)=\prod_{m=1}^{N}\langle u-\zeta_m(\alpha_1,\alpha_2)\rangle,\quad D_0(\alpha_1,\alpha_2)=D(\alpha_1,\alpha_2)D_1^{-1}(\alpha_1,\alpha_2) \tag{3.1}$$

Для матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)$ построим представление

$$\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{K}_1(\alpha_1,\alpha_2) \tag{3.2}$$

Здесь матрица-функция $\mathbf{K}_1(\alpha_1,\alpha_2)$ – полиномиальная и ее определитель в качестве нулей имеет значения $z_m(\alpha_1,\alpha_2)$ ($m=1,2,\ldots,M$).

Элементами матрицы-функции $\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2)$ являются целые функции, ее определитель не имеет вещественных нулевых множеств.

Различные способы построения представления (3.2) изложены в работах [9, 10] и цитируемых в них.

Рассмотрим теперь систему интегральных уравнений вида (11), в которой заменены $\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)$, $D(\alpha_1,\alpha_2)$ на $\mathbf{K}_0(\alpha_1,\alpha_2)$, $D_0(\alpha_1,\alpha_2)$, а также введена новая неизвестная $\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)$; обозначим систему в виде

$$\mathbf{K}_0\mathbf{Q}_0(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{f}(x_1,x_2) \tag{3.3}$$

Система интегральных уравнений (3.3) подобна интегральным уравнениям смешанных статических задач теории упругости и для ее исследования можно применять методы, развитые в [2, 9, 10] и других работах, в которых исследуются статические смешанные задачи или применяется метод фиктивного поглощения.

В том случае, когда в качестве ζ_m и z_m принимаются наряду с вещественными также и комплексные нули, т.е. M – велико, систему (3.3) можно решать асимптотическими методами и строить приближенное решение.

Построив обратный оператор $\mathbf{K}_0^{-1}$, можем выписать решение операторного уравнения в виде

$$\mathbf{Q}_0(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{f}(x_1,x_2)$$

Основной результат исследования, полученный по аналогии со случаем одной неоднородности, дается теоремой.

Теорема 2. Пусть для заданного "вируса" параметры задачи таковы, что имеет место равенство

$$\mathbf{Q}_0(\alpha_1,\alpha_2)=0,\quad \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}=z_m(\alpha_1,\alpha_2)\quad (m=1,2,\ldots,M)$$

Тогда "вирус" локализует волновой процесс в своей окрестности.

Примеры решения некоторых обратных задач этой теории даны в [7].

Настоящую работу автор посвящает 80-летию своего учителя, академика И.И. Воровича, который стоял у истока также и этого научного направления.

Работа выполнена при поддержке грантов: ФЦП "Интеграция", проект № 368; РФФИ(98-01-04091, 98-05-03980, 99-01-00787, 0-01-96024), Юг. Минобразования-990848; Американского Фонда гражданских исследований и развития для независимых государств бывшего Советского Союза, проект REC-004. Мнение Фонда может не совпадать с выводами статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентрации напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 224 с.
2. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. *Бабешко В.А.* "Вирусы" вибропрочности // Изв. СКНЦ ВШ. 1994. Спец. вып. С. 90–91.

4. *Бабешко В.А.* Динамика сред при наличии совокупности неоднородностей или дефектов и теория вирусов вибропрочности // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки, 1998. № 1. С. 24–26.
5. *Ворович И.И.* Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
6. *Ворович И.И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
7. *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 74–83.
8. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
9. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
10. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
2.03.2000