МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. Б.Е. ПОБЕДРЯ

МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Обсуждаются постулаты механики сплошной среды. Рассматриваются классические модели: идеальная и вязкая жидкости, упругое тело, а также некоторые сравнительно новые модели: композит, связанные модели с учетом температурных, электромагнитных и диффузионных полей.

1. Введение. Как и любая другая ветвь математики, механика сплошной среды исследует общие черты представляемых ею явлений с помощью введения различных моделей. Подобно тому, как в геометрии вводятся понятия шара, конуса, параллелепипеда и т.д., не заботясь о том, существуют ли реально такие объекты в природе, в механике сплошной среды (МСС) оперируют с такими моделями как упругое тело, идеальная жидкость совершенный газ и т.п., хотя вопрос о целесообразности применения названных моделей к реальным объектам решает инженер в каждом конкретном случае.

Короче говоря, механика сплошной среды занимается математическим моделированием процессов деформирования. Описание подходов к такому моделированию дано, например, в основополагающих работах [1–4]. Целью настоящей работы является ознакомление широкого круга читателей с подходами в моделировании процессов деформирования, влекущих введение новых моделей.

2. Геометрия сплошной среды. Сплошная среда (континуум) вводится для описания дискретных физических объектов с тем, чтобы воспользоваться мощным аппаратом математического анализа. Однако после постановки задачи МСС требуется привлечение компьютерной техники для ее решения. Для этого задачу требуется превратить в алгебраическую, т.е. провести процесс дискретизации. Для анализа полученного решения приходится вновь континуализировать задачу [5].

Таким образом, процессы дискретизации и континуализации при решении задачи МСС повторяются несколько раз на различных уровнях. Частично такими проблемами занимается бурно развивающийся раздел механики – вычислительная механика.

Для описания событий, происходящих в сплошной среде, выбирается некоторая система отсчета. Чаще всего это инерциальная система отсчета $\mathbb{R}^1 \times \Omega$. Одновременное пространство $\mathbb{R}^1$ называется временным $0 \leqslant t \leqslant \infty$, а пространство Ω – координатным. Геометрические свойства и размерность пространства Ω выбираются в зависимости от цели предпринимаемого исследования.

Предположим, что существуют двумерные создания, живущие в плоскости листа. Чтобы сделать операцию на сердце такому созданию, двумерный хирург должен сначала рассечь тело пациента. Трехмерные люди могут коснуться его сердца, не производя никаких разрезов. Если такие двумерные создания живут на "гофрированной" двумерной поверхности, которую сжали с обеих сторон двумя жесткими плитами, то они будут испытывать "напряженное состояние", от которого нельзя освободиться никакими силами, действующими в плоскости деформированного гофра. Ведь гофр может разгрузиться только в трехмерном пространстве, которое для двумерных созданий является математической абстракцией.

Точно также в реальном трехмерном мире возникают напряжения (например, при сварке [6]), от которых можно освободиться только выходя, вообще говоря, в шестимерное евклидово пространство. Поэтому, чтобы изучать такое напряженное состояние нужно в качестве Ω рассматривать шестимерное евклидово пространство $\mathbb{R}^6$ или трехмерное риманово пространство $\mathbb{V}^3$.

Однако чаще всего за координатное пространство Ω принимается трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, в котором может быть всегда введена прямоугольная декартова система координат, благодаря чему любая точка этого пространства ("вмещающего ящика") описывается радиус-вектором $\mathbf{r} = x_i\mathbf{k}_i$, где $\mathbf{k}_i$ – векторы ортонормированного базиса. Координаты x_i называются пространственными или эйлеровыми координатами (в качестве таких координат могут быть, разумеется, выбраны и криволинейные координаты).

Определим тело B (сплошную среду) как трехмерное дифференцируемое многообразие. Это означает, что B представляет собой любое множество, для которого задано взаимно однозначное отображение на связную область изменения трех переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 с точностью до произвольного преобразования этих переменных в новые переменные $\xi^{1'},\ \xi^{2'},\ \xi^{3'}$:

$$\xi^{i'} = \xi^{i'}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3)\ (i'=1,\ 2,\ 3) \qquad (2.1)$$

где функции $\xi^{i'}$ непрерывно дифференцируемы достаточное число раз. При этом выполняются условия теоремы о неявных функциях и из (2.1) следует

$$\xi^{i} = \xi^{i}(\xi^{1'},\ \xi^{2'},\ \xi^{3'})\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

Точки такого многообразия называются частицами X, а величины ξ^i ($i = 1, 2, 3$) материальными координатами этих частиц (т.е. их наименованием). Телу B в каждый момент времени t может быть поставлена область во "вмещающем ящике" трехмерного евклидова пространства (гладкий гомеоморфизм). Такая область называется конфигурацией тела в момент t.

Движением тела B естественно назвать однопараметрическое семейство конфигураций $\Xi(t)$, где t – время. (Это означает, что в каждый момент времени t имеется "фотография" тела B во "вмещающем ящике".)

Таким образом, конфигурация тела B в момент времени t представляет собой множество мест x, которые занимают составляющие это тело частицы X: $x = \Xi(B, t) = \{\Xi(X, t), X \in B\}$.

При этом предполагается, что отображение $B \to \Xi(B, t)$ является гомеоморфизмом, т.е. оно биективно. Следовательно, две различные частицы в одно и то же время не могут находиться в одном месте. Этот факт в МСС носит название гипотезы непроницаемости.

Конфигурация в момент времени $t = t_0$ называется отсчетной конфигурацией $x_0 = \Xi(B, t_0)$. Координаты ящика $x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0$, соответствующие отсчетной конфигурации, могут также служить наименованием частицы X. Их называют лагранжевыми координатами. В отличие от материальных координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 они связаны с выбором параметра $t = t_0$. Конфигурация, соответствующая текущему моменту времени t, называется актуальной.

Место, занимаемое частицей X в отсчетной конфигурации, описывается радиус-вектором $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t_0) = x_i^0\mathbf{k}_i \qquad (2.2)$$

а в актуальной конфигурации – радиус-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t_0) = x_i\mathbf{k}_i \qquad (2.3)$$

где x_i – эйлеровы координаты. В соотношениях (2.2) и (2.3), как и всюду далее, принимается условие суммирования: если индекс, изображающийся малой латинской буквой, встречается в мономе дважды, то по нему производится суммирование от 1 до 3.

Вектором перемещения $\mathbf{u}$ частицы X называется разность векторов (2.2) и (2.3):

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \tag{2.4}$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими частицами в отсчетной конфигурации $\Xi(t_0)$ определяется величиной ds_0, квадрат которой равен

$$ds_0^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 \tag{2.5}$$

Квадрат расстояния между этими же частицами в актуальной конфигурации $\Xi(t)$ будет равен ds^2:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \tag{2.6}$$

Полуразность величин (2.6) и (2.5) определяет так называемый тензор деформации $\underset{\sim}{\varepsilon}$ с компонентами ε_{ij}:

$$\tfrac{1}{2}(ds^2 - ds_0^2) = \tfrac{1}{2}(d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i \cdot \frac{d\mathbf{r}}{\partial \xi^j} d\xi^j - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i} d\xi^i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^j} d\xi^j\right) = \varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.2)–(2.4) и (2.7) следует связь между вектором перемещений $\mathbf{u}$ и компонентами тензора деформаций ε_{ij}:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{d\mathbf{r}_0}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j}\right) \tag{2.8}$$

Диагональные составляющие тензора деформаций ε_{11}, ε_{22} и ε_{33} описывают относительные удлинения (укорочения) волокон, состоящих из частиц, а недиагональные ε_{12}, ε_{23} и ε_{31} – изменения углов между волокнами в результате деформирования.

Деформации называются малыми, если перемещения невелики и выполняются условия

$$|\partial \mathbf{u} / \partial \xi^i| \ll 1 \tag{2.9}$$

так что последним слагаемым в правой части (2.8) можно пренебречь

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j \tag{2.10}$$

На соотношения Коши (2.10) можно смотреть как на систему шести дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для определения трех компонент вектора перемещений по заданным компонентам малых деформаций.

Для односвязной области необходимым и достаточным условием такой разрешимости является выполнение условий совместности деформаций

$$\eta^{il} \equiv \frac{1}{g} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \varepsilon_{km,jn} = 0$$

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = -\epsilon^{213} = -\epsilon^{132} = -\epsilon^{321} = 1$$

где $\epsilon^{ijk} / \sqrt{g}$ – компоненты тензора Леви – Чивиты [7].

Если принимается во внимание соотношение (2.9), то модель МСС называется геометрически линейной. В противном случае она называется геометрически нелинейной.

Вектором скорости $\mathbf{v}$ называется вектор

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt = d\mathbf{u} / dt \tag{2.11}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций v_{ij} равны

$$v_{ij} = \frac{d}{dt}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^j}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i}\right) \tag{2.12}$$

3. Постулаты механики сплошной среды. Частица X станет материальной, если ей приписать некоторый положительный скаляр, называемый плотностью $\rho(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$. Свойства построенного континуума устанавливаются с помощью некоторого набора постулатов, которые формулируются для любого объема $V \subset \mathbb{R}^3$ и поверхности Σ, ограничивающей этот объем. Масса m объема определяется интегралом

$$m = \int\limits_V \rho dV \tag{3.1}$$

Первый постулат МСС называется законом сохранения масс. Он утверждает, что масса любого объема (3.1) не изменяется со временем

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0$$

Его дифференциальным следствием является уравнение неразрывности

$$d\rho / dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{3.2}$$

Вторым постулатом МСС является закон об изменении количества движения. Для его формулировки требуется введение понятия силы. Едва ли во всех естественных науках есть более распространенное и менее поддающееся определению понятие. Поэтому мы не будем останавливаться на нем подробно. Заметим только, что Гёрц сформулировал все законы механики, вовсе не используя понятия силы. Однако механика Герца не получила широкого распространения. В МСС силы делятся на массовые $\mathbf{F}$ и поверхностные $\mathbf{S}^{(n)}$, отнесенные к поверхности Σ отсчетной конфигурации с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho \mathbf{v} dV = \int\limits_V \rho \mathbf{F} dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{S}^{(n)} d\Sigma \tag{3.3}$$

Для простоты рассмотрим прямоугольную декартову систему координат. Тогда плотность поверхностных сил выражается через векторы напряжения $\mathbf{S}_i$:

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{S}_i n_i, \quad \mathbf{S}_i = \sigma_{ij}\mathbf{k}_j$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Дифференциальным следствием постулата (3.3) являются уравнения движения сплошной среды

$$\rho d\mathbf{v} / dt = \mathbf{S}_{i,i} + \rho \mathbf{F} \tag{3.4}$$

которые могут быть записаны в компонентах

$$\rho dv_j / dt = \sigma_{ij,i} + \rho F_j$$

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j = V^j \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{F} = f^j \mathbf{e}_j = F^j \mathbf{E}_j$$

Если инерционным членом в уравнениях движения можно пренебречь, то получим уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,i} + \rho F_j = 0 \tag{3.5}$$

Третий постулат МСС носит название постулата об изменении момента количества движения (или кинетического момента). Он записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}dV=\int_V \mathbf{r}\times\rho\mathbf{F}dV+\int_\Sigma \mathbf{r}\times\rho\mathbf{S}^{(n)}d\Sigma \tag{3.6}$$

Его дифференциальным следствием является симметричность тензора напряжений $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$.

Если скалярно умножить уравнения движения (3.4) на вектор скорости и проинтегрировать левую и правую части этих уравнений по объему, то получим формулировку теоремы живых сил [1]:

$$dK=\delta A^{(e)}+\delta A^{(i)} \tag{3.7}$$

где кинетическая энергия K определяется следующим образом

$$K\equiv\frac{1}{2}\int_V \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dV \tag{3.8}$$

В левой части (3.7) стоит полный дифференциал выражения (3.8). В правой части (3.7) введены выражения

$$\begin{aligned}
&\delta A^{(e)}=\delta A_1^{(e)}+\delta A_2^{(e)}\\
&\delta A_1^{(e)}\equiv dt\int_V \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dV=\int_V \rho\mathbf{F}\cdot d\mathbf{u}dV\\
&\delta A_2^{(e)}\equiv dt\int_\Sigma \mathbf{S}^{(n)}\cdot\mathbf{v}d\Sigma=\int_\Sigma \mathbf{S}^{(n)}\cdot d\mathbf{u}d\Sigma\\
&\delta A^{(i)}\equiv -dt\int_V \sigma_{ij}v_{ij}dV=-\int_V \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}dV
\end{aligned} \tag{3.9}$$

В отличие от символа d символ δ в выражениях (3.9), например, в записи $\delta A^{(i)}$, означает, что $\delta A^{(i)}$, вообще говоря, полным дифференциалом не является.

4. Термодинамика. Процессом в МСС называется изменение со временем некоторой величины или совокупности величин. Например, процесс деформации – это изменение со временем тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$.

Неизотермическим процессом называется изменение со временем температурного поля $T(t)$. При рассмотрении неизотермических процессов к постулатам механики требуется добавить еще постулаты феноменологической термодинамики.

Среди всех параметров, характеризующих поведение системы: скоростей, деформаций, напряжений, плотности, температуры и т.д., существует некоторое минимальное число параметров, зная которые, можно вычислять все остальное. Такие параметры называются термодинамическими параметрами состояния. Определение этих параметров входит в описание модели среды.

Первый закон термодинамики утверждает, что существует некоторая функция термодинамических параметров состояния, называемая внутренней энергией E (т.е. имеющая размерность ML^2T^{-2}, где M – размерность массы, L – размерность длины, T – размерность времени), для которой можно сформулировать для каждого объема соотношение

$$dE+dK=\delta Q+\delta A^{(e)} \tag{4.1}$$

Изменение притока тепла выражается следующим образом:

$$\delta Q\equiv -dt\int_\Sigma q^{(n)}d\Sigma+dt\int_V \rho q dV,\quad q^{(n)}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=q_i n_i$$

Здесь $\mathbf{q}=q_i\mathbf{k}_i$ – вектор теплового потока, а q – плотность массового источника тепла.

Можно ввести в определение e – плотность внутренней энергии

$$E = \int\limits_V \rho e dV$$

Воспользовавшись теоремой живых сил (3.7), выражение (4.1) можно переписать в виде

$$dE = \delta Q - \delta A^{(i)}$$

Тогда первый закон термодинамики (четвертый постулат МСС) можно записать следующим образом

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho e dV = \int\limits_V (\rho q - \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) dV - \int\limits_\Sigma q^{(n)} d\Sigma \tag{4.2}$$

Дифференциальным следствием первого закона термодинамики (4.2) является

$$\rho de / dt = \rho q - q_{i,i} + \sigma_{ij} v_{ij} \tag{4.3}$$

Второй закон термодинамики утверждает о существовании второй функции термодинамических параметров состояния – энтропии S и формулируется в виде

$$TdS = \delta Q + W^* dt, \quad W^* \geqslant 0 \tag{4.4}$$

где T – температура, W^* – функция диссипации или рассеивания. Если $W^* = 0$, модель МСС называется обратимой. Вводя плотности энтропии s и рассеивания w^*:

$$S = \int\limits_V \rho s dV, \quad W^* = \int\limits_V w^* dV$$

второй закон термодинамики (пятый постулат МСС) (4.14) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho s dV = \int\limits_V \frac{q}{T} dV - \int\limits_\Sigma \frac{q^{(n)}}{T} d\Sigma + \int\limits_V \left(\frac{w^*}{T} - \frac{q_{,i} T_{,i}}{T^2}\right) dV \tag{4.5}$$

Дифференциальным следствием постулата (4.5) является уравнение притока тепла

$$\rho T ds / dt = \rho q - q_{i,i} + w^* \tag{4.6}$$

Температура $T > 0$ всегда считается термодинамическим параметром состояния. Любая комбинация функций состояния и термодинамических параметров состояния будет также функцией состояния. Например, вводя функцию свободной энергии Гельмгольца F и ее плотность f: $F = E - TS, f = e - Ts$, из (4.3) и (4.5) получим

$$\rho df + \rho s dT = -(\delta a^{(i)} + w^* dt) \tag{4.7}$$

$$-\delta a^{(i)} = \sigma_{ij} v_{ij} dt = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{4.8}$$

5. Теория определяющих соотношений. Основной этап в моделировании процессов деформирования заключается в выборе определяющих соотношений. Многие параметры МСС представляют собой энергетически двойственные величины. Одни из них называются обобщенными перемещениями или основными величинами (таковы деформации, температура, градиент температуры, относительное изменение объема, электрическая напряженность и т.п.). Другие называются обобщенными силами или потоками основных величин (это напряжения, энтропия, вектор теплового потока, давление, электрическая индукция и т.п.). И те и другие величины, вообще говоря, являются процессами, т.е. изменяются со временем. Определяющие соотношения задают операторную связь между процессами, характеризующимися основными величинами и процессами их потоков. Если эти соотношения инвариантны относительно преобразований времени, то они называются склерономными. Если такой инвариантности нет, то определяющие соотношения называются реономными. Определяющие соотношения описываются так называемыми материальными функциями, которые показывают, чем один материал отличается от другого в рамках выбранной модели. Материальные функции имеют различную физическую и геометрическую природу. Это могут быть константы или ядра интегральных операторов. Это могут быть скаляры, векторы или тензоры различного ранга. Материальные функции находятся экспериментально, и исследователь, строящий модель, должен указать принципиальные схемы экспериментов, из которых их можно найти. Иначе теория может оказаться "неадекватной", т.е. такой, которую невозможно использовать на практике при изучении реальных тел. Улучшение экспериментальной техники и повышение искусства экспериментатора может превратить некую неадекватную модель в адекватную. Определяющие соотношения адекватных теорий, как правило, должны быть независимы от выбора инерциальной системы отсчета. Они должны быть инвариантны относительно некоторой группы симметрии, связанной с геометрическими свойствами исследуемой модели. Если операторные определяющие соотношения являются линейными, то говорят о физической линейности модели. В противном случае рассматриваемая модель физически нелинейна.

Рассмотрим некоторые примеры определяющих соотношений.

Вектор теплового потока $\mathbf{q} = q_i \mathbf{k}_i$ связан с градиентом температуры $\operatorname{grad} T = T_{,i} \mathbf{k}_i$ законом теплопроводности Фурье

$$q_i = -\Lambda_{ij} T_{,i} \tag{5.1}$$

Материальный тензор $\underset{\sim}{\Lambda}$ называется тензором теплопроводности. Его ранг равен двум, сумме рангов тензоров, которых он связывает (векторы – это тензоры первого ранга [7]). Компоненты этого тензора Λ_{ij} и являются материальными функциями.

Другой пример. В приборах, регистрирующих температуру, часто используется так называемый пироэлектрический эффект, который описывается с помощью определяющих соотношений

$$P_i = p_i \theta \tag{5.2}$$

где $\mathbf{P} = P_i \mathbf{k}_i$ – вектор плотности поляризации, θ – перепад температуры – скаляр (тензор нулевого ранга). Так что материальный вектор $\mathbf{p} = p_i \mathbf{k}_i$ – пироэлектрический вектор (тензор первого ранга).

В преобразователях, микрофонах, стабилизаторах частоты, громкоговорителях, виброметрах и др. часто используется прямой пьезоэлектрический эффект

$$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \tag{5.3}$$

и обратный пьезоэлектрический эффект

$$\varepsilon_{jk} = d_{ijk} E_i \tag{5.4}$$

где $\mathbf{E} = E_i \mathbf{k}_i$ – вектор электрической напряженности, а напряжения и деформации были введены нами ранее. Материальный тензор, связывающий в (5.3) и (5.4) тензор второго ранга и вектор, является тензором третьего ранга и называется тензором пьезоэлектрических модулей d_{ijk}. Заметим, что, если среда изотропная, т.е. ее свойства одинаковы для всех направлений, то материальный тензор должен выражаться через комбинацию единичных тензоров. Компоненты таких тензоров обозначаются с помощью символов Кронекера δ_{ij} : $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Тогда тензор теплопроводности, входящий в соотношения (5.1), должен выражаться следующим образом

$$\Lambda_{ij} = \Lambda \delta_{ij} \tag{5.5}$$

где Λ – коэффициент теплопроводности. Материальные функции, описывающиеся определяющими соотношениями (5.2) – (5.4), представить через "дельты Кронекера" нельзя. Поэтому пироэлектрический и пьезоэлектрический эффекты в изотропной среде отсутствуют. Если материальные функции зависят от координат, среда называется однородной. Если материальные функции являются разрывными функциями координат, неоднородная среда называется композитом.

6. Простейшие модели МСС. Идеальной жидкостью называется обратимая среда ($W^* = 0$), в которой тензор напряжений пропорционален единичному тензору $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, где p – давление, а внутренняя энергия e зависит от параметров состояния: энтропии s и плотности ρ.

Из уравнения неразрывности (3.2) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Поэтому из (4.8) получаем

$$\delta a^{(i)} = -\frac{p}{\rho}d\rho = \rho p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

В силу определения идеальной жидкости полный дифференциал плотности внутренней энергии можно записать в виде

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Поэтому имеем два определяющих соотношения

$$\partial e / \partial s = T; \quad \partial e / \partial \rho = p / \rho^2 \tag{6.1}$$

Уравнение притока тепла (4.6) для обратимой изотропной среды в силу (5.1) и (5.5) имеет вид

$$\rho T ds / dt = \rho q + \Lambda \Delta T \tag{6.2}$$

Уравнения движения (3.4) для идеальной жидкости называются уравнениями Эйлера. Согласно (5.1) они имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \mathbf{F} \tag{6.3}$$

Итак, для идеальной жидкости имеем замкнутую систему семи уравнений (6.3), (3.2), (6.1) и (6.2) для семи величин, подлежащих определению: v_i, p, ρ, T, s. Разумеется, требуется еще задать граничные условия, начальные данные и условия на бесконечности (в случае неограниченного потока).

Прикладная наука, называемая гидравликой, по существу имеет дело только с моделью идеальной жидкости. Такая жидкость в стакане при ее "перемешивании" ложкой крутиться не будет и не будет оказывать сопротивление ложке (парадокс Даламбера–Эйлера).

Идеальная жидкость называется совершенным газом, если плотность внутренней энергии e имеет вид

$$e(\rho, s) = c_v T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \exp\left(\frac{s - s_0}{c_v}\right) + \text{const}$$

где γ – показатель адиабаты ($\gamma = c_p/c_v$). Теплоемкости c_p и c_v связаны соотношением $c_p - c_v = R_0$, где R_0 – газовая постоянная. Из (6.1) для совершенного газа следует $e = c_v T + \text{const}$, $p = \rho R_0 T$.

Прикладная наука, называемая газовой динамикой, в основном изучает совершенный газ.

Большое распространение в математике и прикладных науках (сопротивлении материалов, строительной механике, теории оболочек и др.) имеет модель упругого тела. Эта модель определяется как обратимая среда, термодинамическими параметрами состояния которой являются температура и тензор деформации: $F = F(\underset{\sim}{\varepsilon}, T)$.

Свободную энергию Гельмгольца записывают иногда в виде

$$F = F(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, T), \qquad f = f(\underset{\sim}{\varepsilon}^T, T), \qquad \varepsilon_{ij}^T \equiv \varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}\theta, \quad \theta = T - T_0$$

Величина θ называется перепадом температуры и представляет собой разность между текущей температурой T и некоторой постоянной температурой T_0. Тензор $\underset{\sim}{\alpha}$ с компонентами α_{ij} называется тензором теплового расширения. Для изотропной среды $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$.

Для линейного упругого тела свободная энергия является квадратичной функцией деформаций $\rho f = \rho f_0 + C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^T\varepsilon_{kl}^T / 2$. Величины C_{ijkl} являются компонентами изотермического тензора модулей упругости.

Из соотношений (4.7) и (4.8) имеем для упругой среды

$$\rho\frac{\partial f}{\partial T}dT + \rho\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^T}(d\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}dT) + \rho s dT = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{6.4}$$

Приравнивая в (6.4) выражения при независимых приращениях термодинамических параметров состояния, получим

$$\rho\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^T} = \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\theta), \quad \rho\frac{\partial f}{dT} - \rho\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^T}\alpha_{ij} = -\rho s$$

Введем коэффициенты теплоемкости c_p и c_v:

$$c_p = \frac{\partial e_0}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 f_0}{\partial T^2} = T\frac{\partial s_0}{\partial T}, \qquad c_v = \frac{\partial e}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = T\frac{\partial s}{\partial T}$$

$$\rho c_v = \rho c_p - TC_{ijkl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}$$

и принимая допущение $\ln(1 + \theta/T_0) \approx \theta/T_0$, получим выражение для энтропии упругого тела

$$\rho s = \rho c_v\frac{\theta}{T_0} + \beta_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}$$

Адиабатические модули упругости C_{ijkl}^a связаны с изотермическими следующим образом:

$$C_{ijkl}^a = C_{ijkl} + \frac{T_0}{\rho c_v}\beta_{ij}\beta_{kl}$$

Тогда уравнение притока тепла для упругого тела может быть записано в одном из двух видов

$$\rho c_v\frac{dT}{dt} = \rho q + (\Lambda_{ij}T_{,j})_{,i} - T\frac{d}{dt}(\alpha_{ij}\sigma_{ij})$$

$$\rho c_p\frac{dT}{dt} = \rho q + (\Lambda_{ij}T_{,j})_{,i} - T\frac{d}{dt}(\beta_{ij}\sigma_{ij}) \tag{6.5}$$

Таким образом, замкнутая система уравнений связанной задачи термоупругости состоит из уравнения (6.5) и уравнений движения Ламе

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j}-(\beta_{ij}\theta)_{,j}+\rho F_i \qquad (6.6)$$

относительно переменных u_i, T. Разумеется, и здесь требуется добавить граничные условия и начальные данные. Заметим, что последним слагаемым в правой части (6.5) в большинстве случаев можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми. Тогда задача называется несвязанной, и можно сначала найти распределение температуры, решив задачу теплопроводности, а затем решать уравнения Ламе (6.6), считая температуру заданной.

Еще одной классической моделью МСС является модель вязкой жидкости. Эта модель характеризуется тем, что вся ее работа внутренних сил диссипирует. Если рассматривается ньютоновская изотропная вязкая жидкость, т.е. определяющие соотношения задаются в виде

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\tau_{ij},\qquad \tau_{ij}=\eta_1\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\delta_{ij}+2\eta_2 v_{ij} \qquad (6.7)$$

где η_1, η_2 – коэффициенты вязкости, то функция рассеивания w^* имеет вид

$$w^*=\eta_1(\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2+2\eta_2 v_*^2,\qquad v_*^2=v_{ij}v_{ij} \qquad (6.8)$$

где тензор скоростей деформаций определен в (1.12).

Уравнения движения (3.4) для этого случая называются уравнениями Навье – Стокса и имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\frac{1}{\rho}(\eta_1+\eta_2)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\eta_2\Delta\mathbf{v} \qquad (6.9)$$

а уравнение притока тепла (4.6) в соответствии с (6.8) и (5.1) запишется так

$$\rho T ds/dt=\rho q+\Lambda\Delta T+\eta_1(\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2+2\eta_2 v_*^2 \qquad (6.10)$$

где плотность энтропии s и давление p находятся из соотношений

$$\partial f/\partial T=-s,\qquad \partial f/\partial\rho=p/\rho^2 \qquad (6.11)$$

если задана свободная энергия Гельмгольца как функция двух параметров состояния: температуры T и плотности ρ ($f=f(T,\rho)$).

Тогда замкнутая система уравнений для модели вязкой жидкости состоит из уравнений Навье – Стокса (6.9), уравнения неразрывности (3.2), двух определяющих соотношений (6.11) и уравнения притока тепла (6.10) относительно семи неизвестных: $\mathbf{v}$, p, ρ, T, s. Для постановки задачи, разумеется, требуется и в этом случае предусмотреть необходимые граничные условия и начальные данные.

7. Усложненные модели. Если связь между напряжениями и скоростями деформаций является нелинейной в отличие от (6.7), то вязкая жидкость называется неньютоновской.

Модели, в которых учитываются эффекты релаксации (уменьшение напряжений со временем при постоянных напряжениях) и ползучести (увеличение деформаций при постоянных напряжениях), называются моделями вязкоупругих тел. Определяющие соотношения таких моделей являются реономными. Для физически линейного случая они описываются дифференциальными операторами по времени либо линейными интегральными операторами. В последнее время стали рассматриваться дифференциальные операторы дробного порядка (фрактальные операторы вязкоупругости).

Модели теории пластичности (физически нелинейные) характеризуются тем, что для них операторы определяющих соотношений при активных процессах (нагружении) отличаются от операторов при пассивных процессах (разгрузке). Другими словами, в теории пластичности операторные соотношения являются разрывными.

Кроме температурного поля на механические характеристики среды могут оказывать влияние и другие поля, например, электромагнитное поле. Например, в электромагнитной гидродинамике учитываются силы Лоренца, возникающие за счет взаимодействия вектора скорости жидкости $\mathbf{v}$, вектора электрической напряженности $\mathbf{E}$ и вектора магнитной индукции $\mathbf{H}$. Тогда уравнения Навье – Стокса (6.8) примут вид

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{F}-\operatorname{grad}p+(\eta_1+\eta_2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}+\eta_2\Delta\mathbf{v}+\rho_e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)+\frac{1}{c}(\mathbf{j}\times\mathbf{H}) \tag{7.1}$$

где ρ_e – плотность электрических зарядов, а $\mathbf{j}$ – вектор силы тока. (Если жидкость идеальная, то в уравнении (7.1) следует положить $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$.) Уравнение притока тепла (6.10) для модели магнитной гидродинамики примет вид

$$\rho T\frac{ds}{dt}=\rho q+\Lambda\Delta T+\eta_1(\operatorname{div}\mathbf{v})^2+2\eta_2 v_u^2+\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

Рассмотрим другую связанную модель – термоэлектроупругость. Для такой модели определяющие соотношения можно записать следующим образом:

$$\rho s=\frac{\rho c_p}{T_0}\theta+\alpha_{ij}\sigma_{ij}+p_iE_i,\quad \varepsilon_{ij}=\alpha_{ij}\theta+J_{ijkl}\sigma_{kl}+d_{kij}E_k$$

$$\frac{1}{4\pi}D_i=p_i\theta+d_{ijk}\sigma_{jk}+\frac{\varkappa_{ij}}{4\pi}E_j$$

где $\mathbf{D}=D_i\mathbf{k}_i$ – вектор электрической индукции, а $\varkappa_{ij}$ – компоненты тензора электрической проницаемости.

Если изучается многокомпонентная среда, в которой могут протекать процессы диффузии и химические реакции, то следует несколько изменить исходные постулаты МСС. Обозначая плотность каждого компонента через ρ_α ($\alpha = 1,\dots, n$), уравнение неразрывности для каждого компонента можно записать [8]:

$$\rho\frac{dc_\alpha}{dt}+\operatorname{div}\mathbf{j}_\alpha=\sum_{I=1}^{N}\nu_{\alpha I}J_I$$

где $c_\alpha=\rho_\alpha/\rho$ – массовая концентрация компонента, $\mathbf{j}_\alpha$ – вектор диффузионного потока этого компонента: $\mathbf{j}_\alpha=\rho_\alpha(\mathbf{v}_\alpha-\mathbf{v})$. Здесь $\nu_{\alpha I}$ – стехиометрические коэффициенты, а J_I – скорости химических реакций.

Модель диффузионной термопластичности вводится определяющими соотношениями, связывающими с одной стороны вектор теплового потока $\mathbf{q}$ и векторы диффузионных потоков $\mathbf{j}_\alpha$, а с другой градиенты температуры $\operatorname{grad} T$ и градиенты химических потенциалов $\operatorname{grad}\mu_\alpha$:

$$q_i=-\Lambda_{ij}T_{,j}-\sum_{\alpha=1}^{n}A_{ij}^{(\alpha)}\mu_j^{(\alpha)}$$

$$j_i^{(\alpha)}=-A_{ij}^{(\alpha)}T_{,j}-\sum_{\beta=1}^{n}D_{ij}^{(\alpha)(\beta)}\mu_{,j}^{(\beta)}$$

Кроме того следует добавить определяющие соотношения

$$\sigma_{ij}=F(\underset{\sim}{\varepsilon},T,c_\alpha),\quad s=S(\underset{\sim}{\varepsilon},T,c_\alpha),\quad \mu_\alpha=\Phi(\underset{\sim}{\varepsilon},T,c_\alpha)$$

При этом, разумеется, операторы F должны быть различными для активных и пассивных процессов.

8. Особенности моделирования композитов. Под композитами понимаются модели механики сплошной среды, для которых материальные функции, соответствующие определяющим соотношениям, являются разрывными функциями координат. Эти разрывы происходят на границах компонентов композита, а внутри каждого компонента материальные функции можно считать непрерывными функциями координат. Важной особенностью композитов является нестабильность их физико-механических свойств. Знание только средних значений того или иного параметра, характеризующего эти свойства, очень часто может дать неверную информацию о ней.

Поэтому иногда целесообразной оказывается статистическая постановка задачи, когда по статистическим характеристикам материальных свойств определяются статистические характеристики искомых величин.

К тому же определяющие соотношения композита как совокупность определяющих соотношений его компонентов часто оказываются в некотором смысле неустойчивыми, что значительно усложняет моделирование композитов.

Чтобы упростить моделирование неоднородных сред МДТТ, в механике композитов давно пользуются приемом введения так называемой приведенной среды с эффективными определяющими соотношениями. Эти соотношения определяются либо экспериментально на "представительных образцах" [2] либо теоретически.

Например, пусть заданы некоторые определяющие соотношения. Первая краевая задача для нахождения эффективных характеристик заключается в решении трех уравнений равновесия (3.6) без массовых сил

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0 \tag{8.1}$$

при выполнении специальных кинематических граничных условий

$$u_i\,|_\Sigma = u_i^\circ, \quad u_i^\circ \equiv \gamma_{ij} x_j \tag{8.2}$$

где γ_{ij} – компоненты симметричного тензора-константы. Из решения задачи (8.1), (8.2) находятся напряжения σ_{ij}. Осредняя их по объему, занимаемому телом,

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV$$

устанавливается связь

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = h_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}), \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \gamma_{ij} \tag{8.3}$$

Определяющие соотношения (8.3) и называются эффективными определяющими соотношениями композита.

Если же рассматривается вторая краевая задача также без массовых сил $\eta_{ij}(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$, $\sigma_{ij,j} = 0$ со специальными статическими граничными условиями

$$\sigma_{ij} n_j\,|_\Sigma = S_i^\circ, \quad S_i^\circ = \tau_{ij} n_j \tag{8.4}$$

где τ_{ij} – компоненты симметричного тензора-константы, то после ее решения устанавливается связь

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = H_{ij}(\underset{\sim}{\tau}), \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \tau_{ij} \tag{8.5}$$

Определяющие соотношения (8.5) также называются эффективными определяющими соотношениями.

Из граничных условий (8.2), (8.4) видно, что найденные таким образом эффективные определяющие соотношения зависят от области, занимаемой телом. Однако существуют такие среды, которые называются статистически однородными, в которых эффективные материальные функции, соответствующие определяющим соотношениям (8.3) и (8.5) для различных областей, отличаются между собой незначительно (малой величиной является отношение линейного характерного размера структуры композита к диаметру области). Для таких сред можно считать с достаточной степенью точности определяющие соотношения (8.3) и (8.5) взаимообратными.

Долгое время в механике композитов основным предметом исследования служила приведенная среда, т.е. однородная среда с определяющими соотношениями, совпадающими с эффективными определяющими соотношениями композита. Заметим, что в последнее время в математической литературе появилось направление "гомогенизация", в которой основной задачей является математическое обоснование такого инженерного подхода. Вычисляются определяющие соотношения приведенной среды и дается энергетическая оценка замены решения краевой задачи с исходными определяющими соотношениями на решение краевой задачи с определяющими соотношениями приведенной среды.

Однако такой подход не позволяет получить микронапряжения, т.е. напряжения внутри каждого компонента композита, а потому не в состоянии ответить на многие вопросы, связанные с неоднородностью композита, в частности, с проблемой адгезионной прочности.

Найти микронапряжения позволяют методы осреднения регулярных структур. С помощью таких методов удалось найти точные эффективные характеристики слоистых и некоторых однонаправленных волокнистых композитов (волокнитов) с упругими, линейно вязкоупругими компонентами и даже некоторыми упругопластическими. В последнее время удалось создать методику определения микронапряжений в композитах, не обладающих регулярной структурой.

Контакт между компонентами композита называется идеальным, если на границе их раздела остаются непрерывными векторы перемещений и напряжений. Однако на практике наблюдается отслоение одного компонента от другого, разрывы волокон и т.п.

Механический контакт композита может сопровождаться диффузионным проникновением одного компонента в другой. Этот процесс активизируется при высокой температуре. Компоненты могут также химически взаимодействовать между собой. В результате между ними образуется прослойка со свойствами, отличающимися от свойств взаимодействующих компонентов. Границы этих прослоек определить трудно, причем иногда ее размерность Хаусдорфа является дробной (фрактальной).

Особую трудность представляет моделирование композитов, компоненты которых работают в условиях сложного (непропорционального) нагружения. Хотя для расчета поведения однородных материалов, работающих в таких условиях, предложены некоторые подходы, в моделировании сложного нагружения композитов сделаны только первые шаги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с.; Т. 2. 568 с.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
6. *Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Макаров П.Р. и др.* Физическая мезомеханика и компьютерное конструктирование материалов. Новосибирск: Наука, 1995. Т. 1. 298 с.; Т. 2. 320 с.
7. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
8. *Победря Б.Е.* Модели механики сплошной среды // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 93–127.

Москва

Поступила в редакцию
20.01.2000