МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3:534.1;518.12

© 2000 г. А.В. НАСЕДКИН

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ И ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛНОВОДОВ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В рамках единого подхода изучаются спектральные задачи на сечении для упругих и электроупругих волноводов при гармонических источниках и для упругих волноводов при гармонических подвижных источниках волн. В качестве граничных условий допускаются все основные виды однородных главных и естественных механических и электрических граничных условий. Сформулированы обобщенные постановки спектральных задач для нормальных волн в волноводах. Используя конечно-элементные аппроксимации, получаем квадратичные относительно волновых чисел конечномерные задачи на собственные значения, которые затем сведены к обычным обобщенным задачам на собственные значения удвоенной размерности.

В качестве примера рассмотрена спектральная задача для упругой изотропной полосы, жестко защемленной по основанию, при гармонических и подвижных источниках. Проанализирована эффективность метода для поиска вещественных и комплексных однократных волновых чисел, а также для поиска двукратных волновых чисел. Проведены расчеты для различных типов лагранжевых конечных элементов. Отмечена эффективность квадратичных и кубических лагранжевых конечных элементов.

1. Классическая постановка спектральных задач. Рассмотрим цилиндрический волновод $\Pi = \{\mathbf{x} \mid x_1 \in \mathbf{R}; \mathbf{x}_\eta \in S\}$; $\mathbf{x}_\eta = (x_2, x_3)$ с постоянным поперечным сечением S, выполненный в общем случае из электроупругого материала с неоднородными по $\mathbf{x}_\eta$ свойствами. Для единого рассмотрения спектральных задач на сечении для упругих и электроупругих волноводов при гармонических источниках и для упругих волноводов при гармонических подвижных источниках будем исходить из уравнений, записанных в подвижной системе координат

$$x_1 = \xi_1 - wt, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3 \tag{1.1}$$

связанной с некоторой неподвижной системой координат $\xi_1\xi_2\xi_3$.

Полевые уравнения и определяющие соотношения электроупругости [1] тогда можно представить в виде

$$\rho(\partial_t - w\partial_1)^2\mathbf{u} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \cdot\cdot\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}\cdot\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \text{э}^S \cdot \mathbf{E} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{1.4}$$

Формулы (1.2)–(1.4) составляют систему дифференциальных уравнений относительно вектора механических перемещений $\mathbf{u}$ и электрического потенциала φ. В этой системе для неоднородного по сечению волновода плотность ρ, упругие модули C_{ijkl}^{E}, пьезомодули e_{ijk} и диэлектрические проницаемости $э_{ij}^{S}$ могут зависеть от $\mathbf{x}_\eta$.

Граничные условия на $\Gamma = \partial S$ подразделяются на два типа: механические и электрические.

Для формулировки механических граничных условий предположим, что существует разбиение Γ на три непересекающихся подмножества Γ_σ, Γ_u и $\Gamma_{u\sigma}$, и на этих участках заданы следующие однородные граничные условия:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_\sigma \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{x}\in\Gamma_u \tag{1.6}$$

$$u_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0, \qquad \boldsymbol{\sigma}_n - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n)\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_{u\sigma} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{n} = \{0, n_2, n_3\}$ – внешняя к Γ единичная нормаль.

Для задания электрических граничных условий считаем, что граница Γ разбивается также на два подмножества Γ_D и Γ_φ. Участки Γ_D не электродированы, и на них выполняются условия

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_D \tag{1.8}$$

Подмножество Γ_φ является объединением конечного числа не граничащих друг с другом участков $\Gamma_\varphi = \Gamma_{\varphi V}\cup(\bigcup_j \Gamma_{\varphi j})$, покрытых бесконечно тонкими электродами. На этих участках примем следующие условия

$$\varphi = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_{\varphi V} \tag{1.9}$$

$$\varphi = \Phi_j, \quad \int_{\Gamma_{\varphi j}}\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\,d\Gamma = 0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma_{\varphi j} \quad (\Phi_j = \mathrm{const}) \tag{1.10}$$

Условия (1.5)–(1.10) являются основными однородными главными, естественными и смешанными граничными условиями электроупругости [1].

Нетривиальные решения задачи (1.2)–(1.10) будем разыскивать в виде нормальных волн

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_\eta)\exp[i(\omega t - \alpha x_1)], \quad \varphi = \Phi(\mathbf{x}_\eta)\exp[i(\omega t - \alpha x_1)] \tag{1.11}$$

причем частоту колебаний ω будем считать известной величиной, а волновое число α – неизвестной.

Подстановка (1.11) в (1.2)–(1.10) приводит к классическим постановкам спектральных задач на сечении S относительно $(\alpha, \mathbf{V}, \Phi)$. Эти постановки пригодны также для волноводов в условиях плоской деформации (в плоскости x_1x_2), когда S является отрезком оси x_2 и $\mathbf{x}_\eta = \{x_2\}$. Для волноводов из чисто упругого материала в (1.2)–(1.4) следует оставить только механические характеристические функции и использовать механические граничные условия (1.5)–(1.7).

Исследованиям спектральных задач (1.2)–(1.11) посвящена обширная литература, причем в большей степени изучены упругие задачи при отсутствии движения, когда $w = 0$. Основные теоретические результаты о свойствах дисперсионных множеств и собственных векторов приведены, например, в [2, 3], где имеются и дальнейшие библиографические ссылки. Спектральные задачи для упругих волноводов при подвижных источниках изучались в [4].

Для некоторых конкретных задач (1.2)–(1.11) удается в явном виде получить дисперсионные соотношения, связывающие частоту ω и волновые числа α:

$$D(\alpha,\Omega(\alpha)) = 0, \qquad \Omega(\alpha) = \omega + w\alpha \tag{1.12}$$

Однако, функция D, как правило, является трансцендентной, и поэтому явное определение спектральных параметров требует для решения уравнений (1.12) численных подходов. Задача осложняется также тем, что обычно представляют интерес как вещественные, так и комплексные корни α уравнения (1.12). Применению методов теории функции комплексного переменного для вычисления комплексных корней α уравнений (1.12) посвящены работы [5–7]. В [8] была предложена численная процедура для определения спектральных параметров непосредственно из краевой задачи для упругого волновода в случае плоской деформации. Метод прогонки для нахождения дисперсионных зависимостей для волновода из пьезоэлектрического материала применялся в [9].

2. Обобщенная постановка спектральных задач и конечно-элементные аппроксимации. Спектральные задачи на сечении в обобщенных или слабых постановках получаются стандартным образом из классических задач. Именно, из (1.2)–(1.11) после умножения соответствующих дифференциальных уравнений скалярно на функции $\mathbf{W}(\mathbf{x}_\eta)$, $\Psi(\mathbf{x}_\eta)$, удовлетворяющие главным пограничным условиям

$$\mathbf{W}=0,\quad \mathbf{x}\in\Gamma_u;\qquad W_n=0,\quad \mathbf{x}\in\Gamma_{u\sigma} \tag{2.1}$$

$$\Psi=0,\quad \mathbf{x}\in\Gamma_{\varphi V};\qquad \Psi=\Psi_j,\quad \mathbf{x}\in\Gamma_{\varphi j}\quad (\Psi_j=\mathrm{const}) \tag{2.2}$$

интегрирования полученных уравнений по сечению S и применения преобразования интегрирования по частям, будем иметь

$$\alpha^2 k_2(\mathbf{b},\mathbf{a})+\alpha k_1(\mathbf{b},\mathbf{a})+k_0(\mathbf{b},\mathbf{a})-\Omega^2(\alpha)m(\mathbf{b},\mathbf{a})=0 \tag{2.3}$$

$$k_2(\mathbf{b},\mathbf{a})=\int_S \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{L}_{11}\cdot\mathbf{a}\,dS$$

$$k_1(\mathbf{b},\mathbf{a})=i\int_S (\mathbf{b}^*\cdot\mathbf{L}_{1\beta}\cdot\partial_\beta\mathbf{a}-\partial_\beta\mathbf{b}^*\cdot\mathbf{L}_{\beta 1}\cdot\mathbf{a})dS$$

$$k_0(\mathbf{b},\mathbf{a})=\int_S \partial_\beta\mathbf{b}^*\cdot\mathbf{L}_{\beta\gamma}\cdot\partial_\gamma\mathbf{a}\,dS\quad (\beta,\gamma=2,3) \tag{2.4}$$

$$m(\mathbf{b},\mathbf{a})=\int_S \rho\mathbf{W}^*\cdot\mathbf{V}dS,\quad \mathbf{b}=\lfloor\mathbf{W},\Psi\rfloor^T,\quad \mathbf{a}=\lfloor\mathbf{V},\Phi\rfloor^T$$

матрицы $\mathbf{L}_{km}$ имеют следующую структуру ($\mathbf{e}_i$ – орты подвижной декартовой системы координат):

$$\mathbf{L}_{km}=\begin{Vmatrix}\mathbf{A}_{km} & \mathbf{e}_{mk}\\ \mathbf{e}_{km}^T & -\text{э}_{km}^S\end{Vmatrix},\quad \mathbf{A}_{km}=C_{ikjm}^E\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{e}_{km}=e_{kmi}\mathbf{e}_i \tag{2.5}$$

Обобщенная постановка спектральных задач на сечении состоит в нахождении спектральных параметров α или ω и собственных функций $\mathbf{V}$, Φ, удовлетворяющих однородным главным граничным условиям и интегральному тождеству (2.3) для всех функций $\mathbf{W}$, Ψ, также удовлетворяющих однородным главным граничным условиям (2.1), (2.2). При этом функции $\mathbf{V}$, Φ и $\mathbf{W}$, Ψ должны принадлежать подходящим функциональным пространствам в зависимости от степени гладкости модулей $C_{ijkl}^E(\mathbf{x}_\eta)$, $e_{ijk}(\mathbf{x}_\eta)$, $\text{э}_{ij}^S(\mathbf{x}_\eta)$, плотности $\rho(\mathbf{x}_\eta)$, границы $\Gamma=\partial S$ и ее подмножеств Γ_σ, Γ_u, $\Gamma_{u\sigma}$, $\Gamma_{\varphi D}$, $\Gamma_{\varphi V}$, $\Gamma_{\varphi j}$ [2–4].

На согласованной сетке конечных элементов в области $S_h\subseteq S$ с границей Γ_h зададимся удовлетворяющими однородным главным граничным условиям конечно-элементными аппроксимациями $\mathbf{a}_h$ и $\mathbf{b}_h$ функций $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}_h=\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta)\cdot\mathbf{A},\quad \mathbf{b}_h=\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta)\cdot\delta\mathbf{A} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{N}(\mathbf{x}_\eta)$ – матрицы аппроксимирующих функций формы, $\mathbf{A}$ – вектор узловых неизвестных, $\delta\mathbf{A}$ – вектор кинематически допустимых вариаций узловых неизвестных.

Подставляя (2.6) в соотношении (2.3)–(2.5), записанные для $\mathbf{a}_h$, $\mathbf{b}_h$ и S_h, с учетом произвольности $\delta\mathbf{A}$ получаем конечномерную спектральную задачу вида

$$[\alpha^2\mathbf{K}_2 + \alpha\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 - \Omega^2(\alpha)\mathbf{M}]\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_{S_h} \mathbf{N}(\mathbf{x}_\eta)\cdot\mathbf{L}_{11}\cdot\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta)dS$$

$$\mathbf{K}_1 = i\int_{S_h} (\mathbf{N}(\mathbf{x}_\eta)\cdot\mathbf{L}_{1\beta}\cdot\partial_\beta\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta) - \partial_\beta\mathbf{N}(\mathbf{x}_\eta)\cdot\mathbf{L}_{\beta 1}\cdot\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta))dS \tag{2.8}$$

$$\mathbf{K}_0 = \int_{S_h} \partial_\beta\mathbf{N}(\mathbf{x}_\eta)\cdot\mathbf{L}_{\beta\gamma}\cdot\partial_\gamma\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta)dS$$

$$\mathbf{M} = \int_{S_h} \rho\mathbf{N}(\mathbf{x}_\eta)\cdot\mathbf{E}_M\cdot\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_\eta)dS, \quad \mathbf{E}_M = \begin{Vmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Отметим, что в (2.8) для чисто упругого случая матрицы $\mathbf{K}_2$ и $\mathbf{M}$ являются вещественными, симметричными и положительно определенными; матрица $\mathbf{K}_0$ – вещественная, симметричная и положительно определенная, если $\mathrm{mes}(\Gamma_u) \neq 0$, матрица $\mathbf{K}_1$ – эрмитова, причем состоит из чисто мнимых элементов.

Если при отсутствии движения ($w = 0$) задавать вещественное волновое число α и считать неизвестным спектральным параметром частоту колебаний ω, то задача (2.7) будет являться стандартной обобщенной задачей на собственные значения относительно параметра $\lambda = \omega^2$, $\omega = \omega(\alpha)$. Именно при таком подходе проводились исследования по МКЭ ряда конкретных спектральных задач для волноводов в [10–13] и др. Между тем, наибольший интерес представляют задачи об определении волновых чисел α при фиксированном значении частоты ω. Эти задачи, как видно из (2.7), являются квадратичными по α спектральными задачами. Исследование квадратичных спектральных задач на собственные значения для упругих волноводов содержится в [14]. В настоящей работе идеология работы [14] распространена на волноводы из электроупругих материалов.

Квадратичные задачи на собственные значения можно свести к обычным линейным спектральным задачам следующим образом:

$$\alpha\mathbf{G}\cdot\mathbf{Z} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A} \\ \alpha\mathbf{A} \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} \mathbf{K}_1 - 2\omega w\mathbf{M} & \mathbf{K}_2 - w^2\mathbf{M} \\ \mathbf{K}_2 - w^2\mathbf{M} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Vmatrix} -\mathbf{K}_0 + \omega^2\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 - w^2\mathbf{M} \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

Линейная относительно α спектральная задача (2.9) имеет по сравнению с (2.7) удвоенную размерность. Матрица $\mathbf{H}$ в (2.10) симметрична, а матрица $\mathbf{G}$ – эрмитова. Обе эти матрицы не имеют свойств положительной определенности. Кроме того, матрица $\mathbf{G}$ имеет блок $\mathbf{K}_1 - 2\omega w\mathbf{M}$, состоящий из комплексных элементов. Все эти обстоятельства необходимо учитывать при выборе метода решения алгебраической спектральной задачи (2.9).

3. Спектральная задача для изотропной жестко защемленной полосы. В качестве численного примера рассмотрим плоскую задачу для упругой изотропной полосы $\Pi = \{\mathbf{x} \mid x_1 \in \mathbf{R};\ 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$ с постоянными по толщине плотностью ρ, модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν. Считаем, что нижняя граница полосы жестко защемлена, а верхняя – свободна от напряжений.

Тестовые расчеты по определению безразмерных волновых чисел $\tilde{\alpha} = \alpha h$ из решения спектральной задачи (2.9), (2.10) при фиксированной безразмерной частоте $\tilde{\omega} = \omega h / c_2$ $(c_2 = \sqrt{\mu/\rho})$ проводились для линейных, квадратичных и кубических одномерных лагранжевых конечных элементов при равномерном разбиении полосы по толщине. Результаты, полученные по МКЭ, сравнивались с "точными" результатами, найденными из решения дисперсионного уравнения (1.12), которое для данной задачи имеет вид [15]:

$$D(\tilde{\alpha}, \tilde{\Omega}(\tilde{\alpha})) = a_0 + a_c \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 - a_s \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} = 0 \tag{3.1}$$

$$a_0 = 4\tilde{\alpha}^2\theta, \quad a_c = \theta^2 + 4\tilde{\alpha}^4, \quad a_s = \tilde{\alpha}^2(\theta^2 + 4\gamma_1^2\gamma_2^2)$$

$$\theta = \tilde{\Omega}^2 - 2\tilde{\alpha}^2, \quad \gamma_1 = \sqrt{\tilde{\Omega}^2 / k^2 - \tilde{\alpha}^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\alpha}^2}$$

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} + w\tilde{\alpha} / c_2, \quad k^2 = 2(1+\chi), \quad \chi = \nu/(1-2\nu)$$

Как хорошо известно [4, 15], при фиксированном вещественном значении частоты $\tilde{\omega}$ уравнение (3.1) имеет счетное множество корней $\tilde{\alpha}$ с точкой сгущения на бесконечности в комплексной плоскости. При этом, при $w < c_R$, где c_R – скорость волн Рэлея, имеется конечное число вещественных корней $\tilde{\alpha}$ и счетное число комплексных корней.

Все приводимые ниже результаты получены для значения коэффициента Пуассона, равного $\nu = 0{,}25$. Это значение ν интересно тем, что тогда у уравнения (3.1) при $w = 0$ имеются кратные вещественные корни $\tilde{\alpha}_j^* = \sqrt{3}\pi(2j-1)/4$ при $\tilde{\omega}_j^* = 2\tilde{\alpha}_j^*$ [15]. Таким образом, здесь можно проверить возможности метода как для нахождения волновых чисел $\tilde{\alpha}$ в обычных случаях, когда $\tilde{\alpha}$ являются однократными собственными значениями спектральных задач на сечении, так и в более редких случаях кратных собственных значений.

В табл. 1 приведены рассчитанные значения первых вещественных волновых чисел $\tilde{\alpha}$ в низкочастотной области $\tilde{\omega} \in [1{,}6;\ 4]$ при изменении $\tilde{\omega}$ с шагом 0,2. "Точные" значения $\tilde{\alpha}$ вычислялись как корни уравнения (3.1) с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-7}$. В МКЭ спектральная задача (2.9) решалась с помощью стандартных процедур пакета EISPACK, реализующих QR-алгоритм.

Для различных типов лагранжевых конечных элементов (КЭ) число NE конечных элементов подбиралось таким образом, чтобы количество узлов для серии расчетов было бы приблизительно одинаковым: NE = 10 и NE = 20 – для линейных элементов, NE = 5 и NE = 10 – для квадратичных, NE = 3 и NE = 7 – для кубических. Это позволяет проанализировать h-сходимость при увеличении числа КЭ одного типа, а также p-сходимость при изменении типов КЭ при приблизительном равенстве порядков матриц МКЭ, а следовательно, и при одинаковой сложности вычислительных затрат. Из табл. 1 видно, что p-сходимость оказывается быстрее h-сходимости. Таким образом, эффективность p-аппроксимаций МКЭ, известная для классических линейных спектральных задач, наблюдается и в рассматриваемой квадратичной спектральной задаче.

В табл. 2 приведены все (как вещественные, так и комплексные) наименьшие по модулю волновые числа $\tilde{\alpha}$, принадлежащие первой четверти ($\mathrm{Re}\tilde{\alpha} \geqslant 0$; $\mathrm{Im}\tilde{\alpha} \geqslant 0$) комплексной плоскости $\tilde{\alpha}$ для значения $\tilde{\omega}_1^* = 2\tilde{\alpha}_1^*$.

Как отмечалось выше, для значения $\tilde{\omega}_1^* = 2\tilde{\alpha}_1^*$ безразмерной частоты уравнение (3.1) имеет кратный корень $\tilde{\alpha}^* = \sqrt{3}\pi/4$. Численное нахождение кратных корней трансцендентных уравнений сопряжено с определенными трудностями. Между тем, по МКЭ простые и кратные собственные значения находятся в рамках единого алгоритма решения алгебраической спектральной задачи (2.9). По МКЭ также единообразно определяются как вещественные, так и комплексные собственные значения $\tilde{\alpha}$.

Таблица 1

$\tilde{\omega}$	Вещественные значения $\tilde{\alpha}$						
	"Точные" значения	Лин. КЭ, NE = 10	Лин. КЭ, NE = 20	Квадр. КЭ, NE = 5	Квадр. КЭ, NE = 10	Куб. КЭ, NE = 3	Куб. КЭ, NE = 7
1,6	0,1856	0,1803	0,1843	0,1856	0,1856	0,1856	0,1856
1,8	0,5364	0,5343	0,5359	0,5364	0,5364	0,5364	0,5364
2,0	0,7560	0,7542	0,7555	0,7559	0,7560	0,7560	0,7560
2,2	0,9412	0,9395	0,9408	0,9412	0,9412	0,9412	0,9412
2,4	1,1096	1,1079	1,1092	1,1096	1,1096	1,1096	1,1096
2,6	1,2680	1,2663	1,2676	1,2680	1,2680	1,2680	1,2680
2,8	1,4200	1,4181	1,4195	1,4200	1,4200	1,4200	1,4200
	1,8352	1,8001	1,8265	1,8348	1,8352	1,8352	1,8352
3,0	1,5674	1,5654	1,5669	1,5674	1,5674	1,5674	1,5674
	2,4334	2,4097	2,4275	2,4331	2,4334	2,4334	2,4334
3,2	1,7118	1,7096	1,7112	1,7117	1,7118	1,7118	1,7118
	2,8486	2,8274	2,8433	2,8482	2,8485	2,8485	2,8485
3,4	1,8539	1,8515	1,8533	1,8538	1,8539	1,8539	1,8539
	3,1965	3,1760	3,1914	3,1961	3,1965	3,1965	3,1965
3,6	1,9945	1,9918	1,9938	1,9944	1,9945	1,9945	1,9945
	3,5083	3,4877	3,5031	3,5078	3,5083	3,5083	3,5083
3,8	2,1341	2,1311	2,1333	2,1340	2,1340	2,1340	2,1341
	3,7975	3,7761	3,7921	3,7969	3,7974	3,7975	3,7975
4,0	2,2731	2,2698	2,2722	2,2730	2,2731	2,2731	2,2731
	4,0712	4,0488	4,0655	4,0704	4,0711	4,0711	4,0712

Таблица 2

	"Точные" значения	Линейные КЭ, NE = 20	Квадратичн. КЭ, NE = 10	Кубические КЭ, NE = 7
1	1,3603	1,3425	1,3603	1,3603
2	1,3603	1,3599	1,3603	1,3603
3	2,2241	2,2213	2,2241	2,2241
	$+i$ 5,4852	$+i$ 5,5095	$+i$ 5,4861	$+i$ 5,4853
4	2,6235	2,5815	2,6207	2,6233
	$+i$ 8,8725	$+i$ 8,9714	$+i$ 8,8796	$+i$ 8,8727
5	2,9034	2,7076	2,8829	2,9013
	$+i$ 12,135	$+i$ 12,4081	$+i$ 12,1675	$+i$ 12,1367
6	3,1204	2,4770	3,0302	3,1061
	$+i$ 15,351	$+i$ 15,9879	$+i$ 15,4612	$+i$ 15,3590
7	3,2997	1,7206	2,9780	3,2147
	$+i$ 18,543	$+i$ 20,9360	$+i$ 18,8699	$+i$ 18,5928

Таблица 3

	"Точные" значения	Линейные КЭ, NE = 20	Квадратичн. КЭ, NE = 10	Кубические КЭ, NE = 7
1	1,3603	1,3612	1,3604	1,3603
2	4,0810	4,1053	4,0818	4,0811
3	6,8017	6,9144	6,8113	6,8025
4	9,5224	9,8333	9,5709	9,5299
5	12,2431	12,9082	12,4017	12,2811
6	14,9638	16,1866	15,3636	15,0964
7	17,6845	19,7164	18,5329	18,0439
8	20,4052	23,5432	21,9964	21,2192

Возможности МКЭ в нахождении кратных волновых чисел более полно иллюстрирует табл. 3. В табл. 3 приведены результаты расчетов волновых чисел при специальном сверхзвуковом режиме движения: $\tilde{\omega}=0$, $w/c_2=2$. При этих особых значениях уравнение (3.1) имеет только кратные корни $\tilde{\alpha}_j^*=\sqrt{3}\pi(2j-1)/4$ [15]. Из рассчитанных по МКЭ пар практически совпадающих кратных значений в табл. 3 приводятся только по одному значению $\tilde{\alpha}\approx\tilde{\alpha}_j^*$.

Как показывают результаты расчетов, МКЭ обеспечивает достаточную точность нахождения первых по модулю волновых чисел $\tilde{\alpha}$ в низкочастотной области даже при небольшом числе КЭ. Можно также отметить, что использование квадратичных и особенно кубических элементов оказывается явно предпочтительнее использования линейных элементов при одинаковом числе узлов.

Эти и другие проведенные численные эксперименты позволяют рекомендовать данный конечно-элементный подход для расчета спектральных параметров упругих и электроупругих двумерных и трехмерных волновых структур с произвольной неоднородностью по сечению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика связанных полей в элементных конструкциях. Т. 5. Электроупругость / *В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга*. Киев: Наук. думка. 1989. 280 с.
2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
4. *Белоконь А.В., Ворович И.И.* О некоторых закономерностях образования волновых полей в анизотропном слое при пульсирующей движущейся нагрузке // Мех. и научн.-техн. прогресс. Т. 3. М.: Наука, 1988. С. 215–222.
5. *Коробейник Ю.Ф.* О вычислении нулей и полюсов мероморфной функции // Совр. пробл. мех. сплошной среды. Сб. научн. статей. Ростов н/Д: МП "Книга", 1995. С. 117–123.
6. *Малый В.Н.* Явное выражение для корней трансцендентных характеристических уравнений // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 5. С. 56–57.
7. *Brazier-Smith P.R., Scott F.M.* On the determination of the roots of dispersion equation by use of winding number integrals // J. Sound and Vibr. 1991. V. 145. No. 3. P. 503–510.
8. *Ворович Е.И., Соколова Н.Ф., Тукодова О.М., Феданова Ю.В.* Построение нейтральных кривых для анизотропной полосы // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 61–66.
9. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Распространение волн в поперечнонеоднородных пьезоактивных волноводах // Акустич. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 314–319.
10. *Koshiba M., Karakida S., Suzuki M.* Finite-element analysis of Lamb wave scattering in an elastic plate waveguide // IEEE Trans. Son. and Ultrason. 1984. V. SU-31. No. 1. P. 18–25.
11. *Lagasse P.E.* Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 53. No. 4. P. 1116–1122.
12. *Lagasse P.E.* Finite-element analysis of piezoelectric elastic waveguides // IEEE Trans. Son. and Ultrason. 1973. V. SU-20, No 4. P. 354–359.
13. *Stone G.O.* High-order finite elements for inhomogeneous acoustic guiding structures // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techn. 1973. V. MTT–21. P. 538–542.
14. *Наседкин А.В.* Определение спектральных характеристик упругих волноводов методом конечных элементов // Современные проблемы математического моделирования. Тр. VIII Всерос. шк.-семинара / Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1999. С. 181–188.
15. *Белоконь А.В., Наседкин А.В.* Распространение волн в изотропной жестко защемленной упругой полосе от движущихся осциллирующих нагрузок // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 9. С. 90–97.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
2.03.2000