

УДК 539.9

© 2000 г. А.М. ПЕТРОВ, В.П. СИЗОВ

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Приведен метод решения динамической задачи о возбуждении произвольной нагрузкой упругих волн в многослойной цилиндрической конструкции с внешними слоями из трансверсально-изотропных материалов, оси материальной симметрии которых могут не совпадать по направлению с осью конструкции. Метод основан на "распрямлении" относительно тонких внешних слоев. Получены условия применимости метода.

При решении динамических задач теории упругости в случае трансверсально-изотропных сред для определения полей перемещений, удовлетворяющих уравнению движения

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \nabla_j c^{ijps} (\nabla_p u_s + \nabla_s u_p) \quad (1)$$

удобно использовать метод скаляризации [1]. В этом методе поля перемещений, напряжений и деформаций определяются через скалярные потенциальные функции φ , w , v , соответствующие квазипродольным, квазипоперечным и поперечным монохроматическим волнам. Данные функции являются решениями волновых уравнений Гельмгольца с соответствующими волновыми числами.

В уравнении (1) приняты следующие обозначения: u^i – контравариантные компоненты вектора перемещений; c^{ijps} – тензор упругих модулей; ∇_p – ковариантная производная по p -й координате; ρ – плотность материала; t – время.

Такое сведение уравнения движения (1) к волновым уравнениям относительно функций φ , w , v выполнимо лишь в некоторых системах координат, отвечающих определенным условиям [1]. Например, в случае цилиндрических координат этот подход возможен только для сред, ось материальной симметрии которых параллельна образующей цилиндрической конструкции (далее, для краткости, z -сред). Однако на практике важными являются и другие случаи. Так, оболочки конструкций в виде кругового цилиндра часто представляют собой слои из трансверсально-изотропных материалов с осью материальной симметрии, ориентированной по радиусу (для краткости, r -среды). В этом случае получение точного аналитического решения на основе волновых уравнений с применением хорошо отработанных приемов гармонического анализа не представляется возможным.

Целью последующего изложения является выработка пути нахождения некоторого приближенного решения задачи по определению НДС в тех цилиндрических конструкциях, где наряду с изотропными используются слои из r -материала. Обычно эти слои ограничивают конструкцию снаружи, и их выполняют достаточно тонкими. С уменьшением относительной толщины h/r^0 (h – толщина слоя, r^0 – радиус срединной поверхности) слой распрямляется и переходит в пределе к пластине. Для плоского r -слоя существует точное аналитическое решение на основе спектрального метода.

Естественно предположить, что при определенных условиях в достаточно тонких слоях из r -материала НДС будет мало отличаться от НДС в соответствующей пластине.

С целью нахождения указанных условий запишем уравнение (1) для распространяющихся в r -среде монохроматических волн круговой частоты ω [1]:

$$\begin{aligned} & \omega^2 \rho u_i + [-0,5(c_{11} - c_{12}) + c_{44}] \nabla^r \nabla_r u_i + c_{11} \nabla_i \nabla^s u_s - 0,5(c_{11} - c_{12}) \delta_{ijk}^{lsk} \nabla^j \nabla_l u_s + \\ & + [-0,5(c_{11} + c_{12}) + c_{13} + c_{44}] \nabla_j \nabla^r u_r + \delta_i^r \{ [-0,5(c_{11} + c_{12}) + c_{13} + c_{44}] \nabla_r \nabla^s u_s + \\ & + [-0,5(c_{11} - c_{12}) + c_{44}] \nabla^s \nabla_s u_r + [c_{11} + c_{33} - 2(c_{13} + 2c_{44})] \nabla^r \nabla_r u_r \} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь c_{ij} – общепринятые двухиндексные обозначения физических компонент тензора c^{klmn} ; $\delta_{i\dots}^{j\dots}$ – обобщенный символ Кронекера; $\nabla^s = g^{sk} \nabla_k$; g^{sk} – метрический тензор; индекс r относится к радиальной координате, остальные латинские индексы могут относиться к любой из трех цилиндрических координат r, θ, z .

Уравнения движения (2) можно представить в виде суммы двух частей, где все слагаемые, включающие в себя используемые при ковариантном дифференцировании символы Кристоффеля, сосредоточены во второй части:

$$\{ \dots \}_I + \{ \dots \}_{II} = 0 \quad (3)$$

В развернутой форме уравнения (3), записанные для физических компонент вектора перемещений, имеют вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega^2 \rho u_r + (c_{33} - c_{13} - 2c_{44}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + (c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) + \right. \\ & \left. + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \right\}_I + \left\{ (c_{13} + 2c_{44}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) \right\}_{II} = 0 \\ & \left\{ \omega^2 \rho u_\theta + c_{44} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + c_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \right. \\ & \left. + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right\}_I + \left\{ (c_{13} - c_{11} + 3c_{44}) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + (c_{13} - c_{11} + 3c_{44}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + (c_{13} - 2c_{11} + 3c_{44}) \frac{u_\theta}{r^2} \right\}_{II} = 0 \\ & \left\{ \omega^2 \rho u_z + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + c_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\ & \left. + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right\}_I + \left\{ c_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right\}_{II} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что выполнены некоторые условия, при которых члены в скобках $\{ \dots \}_{II}$ оказывают несоизмеримо меньшее влияние на решение уравнений движения (4) по сравнению с членами в скобках $\{ \dots \}_I$. Предположим также, что относительная толщина слоя мала:

$$h/r^0 \ll 1, \quad r \approx r^0$$

В этом случае решение (4) будет мало отличаться от решения "распрямленных" уравнений, где учитываются только первые скобки:

$$\{\dots \text{множители } 1/r^2 \text{ заменены на } 1/r^{o2} \dots\}_I = 0 \quad (5)$$

Уравнения (5) являются уравнениями движения в системе координат r, θ, z , эквивалентной декартовой: $x = r, y = r^o\theta, z = z$. Как показано в [1], они сводятся к волновым уравнениям Гельмгольца, и их решение может быть представлено интегральной суммой гармоник вида $u_i(\xi, m, \zeta, \omega) e^{i\xi r} e^{im\theta} e^{i\zeta z} e^{-i\omega t}$.

Условия, при которых вместо уравнений движения (4) можно пользоваться "распрямленными" уравнениями (5), находятся с помощью следующих соображений. Для любого слагаемого в скобках $\{\dots\}_I$ уравнений (4), имеющего вид $r^{o-k}f$, в том же уравнении найдется слагаемое вида $r^{o-k+1}df/dr$ в скобках $\{\dots\}_I$ либо в скобках $\{\dots\}_I$. К примеру, в первом из уравнений (4) члену $\frac{1}{r^{o3}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$ в скобках $\{\dots\}_I$ соответствует $\frac{1}{r^{o2}} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta}$ в скобках $\{\dots\}_I$. Далее, при $r^o\xi \gg 1$ всеми членами в скобках $\{\dots\}_I$ можно пренебречь в сравнении с сопоставляемыми им членами в скобках $\{\dots\}_I$. Действительно

$$\left| r^{o-k+1} \frac{\partial f}{\partial r} \right| \approx r^o\xi |r^{o-k} f| \gg |r^{o-k} f|, \text{ если } r^o\xi \gg 1 \quad (6)$$

В результате, получаем условия распрямления для r -слоя

$$\varepsilon_h = h/r^o \ll 1; \quad \varepsilon_\lambda = \lambda_r/r^o \ll 1 \quad (7)$$

где $\lambda_r = 1/\xi$ – длина волны в радиальном направлении.

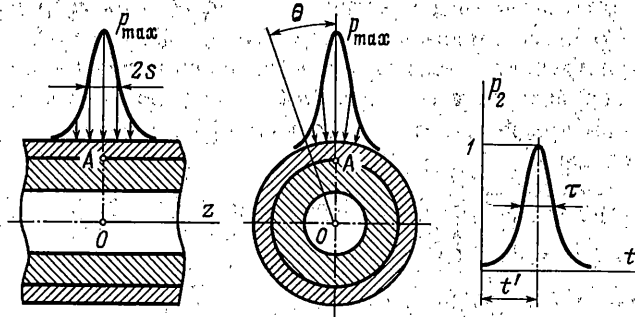
Условия (7) позволяют судить о применимости метода к описанию гармонического волнового процесса, характеризующегося конкретным значением волнового числа ξ . При действии на конструкцию нагрузки общего вида, имеющей непрерывную спектральную плотность на интервале $0 \leq \xi < \infty$, распрямление возможно в том случае, когда влиянием на решение длинноволновой части спектра можно пренебречь. Последнее справедливо для нагрузок импульсного характера с эффективной круговой частотой $2\pi/\tau$ (τ – длительность воздействия) при выполнении условий

$$\varepsilon_h = h/r^o \ll 1; \quad \varepsilon_\tau = \tau v/r^o \ll 1 \quad (8)$$

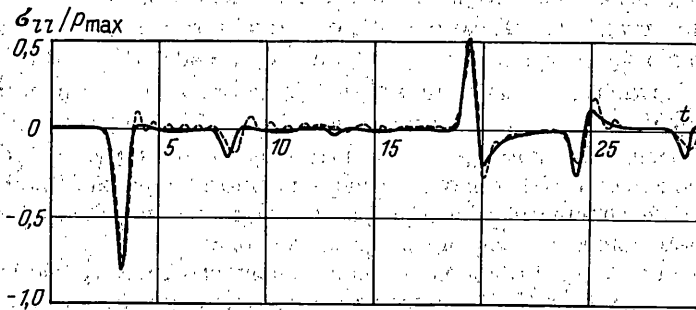
где v – характерное значение фазовой скорости упругих волн, в качестве которого удобно брать скорость распространения квазипродольных волн в радиальном направлении.

Второе из условий (8) не может учесть всю специфику конкретной задачи: влияние различных пространственных гармоник нагрузки, волновое число ξ которых зависит не только от круговой частоты ω , но и от номера гармоники; величину вклада каждой из этих гармоник в общее решение. Но в целом величина параметра ε_τ позволяет судить о степени соответствия распрямленного решения точному.

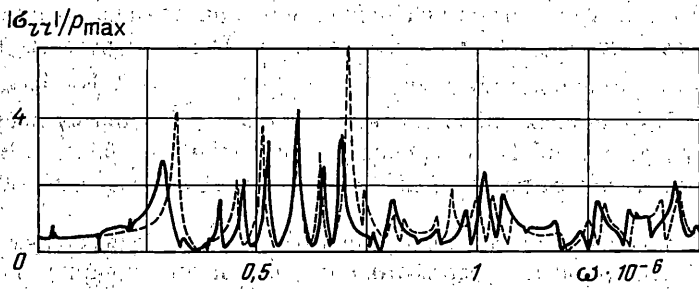
Для иллюстрации метода рассмотрим достаточно длинную двухслойную цилиндрическую конструкцию (фиг. 1). Внутренний слой – углерод, изотропный материал. Внешний – слоистая среда из 40 чередующихся углеродных и алюминиевых слоев одинаковой толщины. Такая модель внешнего трансверсально-изотропного r -слоя, с одной стороны, позволяет получить точное решение, если рассматривать конструкцию из 41 жестко склеенного цилиндрического изотропного слоя, как это приведено, например, в [2]. С другой стороны, дает возможность определить эффективные значения плотности и модулей упругости [3] внешнего слоя как трансверсально-изотропного и произвести расчеты поля, используя описываемый метод распрямления.



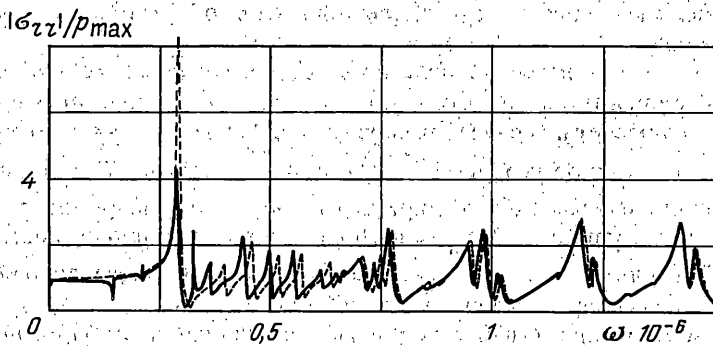
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Сравнивая результаты расчетов для различных значений параметров распрямления ϵ_h и ϵ_τ , можно судить о применимости предлагаемого метода.

Нагружение конструкции производится по внешней цилиндрической поверхности импульсом давления вида $p(\theta, z, t) = p_1(\theta, z)p_2(t)$. Распределение давления по поверхности и во времени предполагается гауссовым (фиг. 1) с параметрами колокола, соответственно, s и $\tau/2$:

$$p_1(\theta, z) = p_{\max} \exp[-(z^2 + r^2 \sin^2 \theta) / 2s^2] \cos \theta \quad \text{при } |\theta| \leq \pi/2$$

$$p_1(\theta, z) = 0 \quad \text{при } \pi/2 < |\theta| \leq \pi$$

$$p_2(t) = \exp[-(t - t')^2 / 2(\tau/2)^2]$$

В точке A на границе раздела внутреннего и внешнего слоев под центром нагружения определяются радиальные нормальные напряжения $\sigma_{rr}(t)$.

На фиг. 2 представлена зависимость σ_{rr} от t [мкс] в точке A конструкции при следующих данных: радиусы границ слоев — $r_0 = 10$ мм, $r_1 = 40$ мм, $r_2 = 50$ мм; степень пространственной локализации нагрузки $s/\pi r_2 = 0,2$; длительность импульса нагружения $\tau = 0,5$ мкс; значения параметров распрямления — $\epsilon_h = 0,22$; $\epsilon_\tau = 0,005$. Сплошная линия соответствует распрямленному решению, штриховая — точному. Наблюдается хорошее совпадение результатов точного и распрямленного решений. Время счета в случае распрямления внешнего слоя в 20 раз меньше, чем при нахождении точного решения (пропорционально числу привлекаемых слоев).

При уменьшении относительной толщины внешнего слоя путем изменения значения r_1 до $r_1 = 45$ мм ($\epsilon_h = 0,11$) соответствующие графики практически сливаются в один.

На фиг. 3 приведены результаты расчета амплитудно-частотной характеристики конструкции в точке A при относительной толщине распрямляемого внешнего слоя $\epsilon_h = 0,22$ (радиусы границ $r_0 = 10$ мм, $r_1 = 40$ мм, $r_2 = 50$ мм). Нагружение производится пространственно-временной гармоникой $p = p_{\max} e^{im\theta} e^{inz/r_2} e^{-i\omega t}$ со значениями параметров $m = n = 5$. Сплошная линия соответствует распрямленному решению, штриховая — точному решению. Из-за сравнительно большого значения параметра ϵ_h наблюдается существенное расхождение решений во всей обозримой области частот ω [с⁻¹].

На фиг. 4 приводится аналогичная амплитудно-частотная характеристика при смещенной границе раздела слоев в сторону уменьшения толщины внешнего слоя $\epsilon_h = 0,04$ ($r_0 = 10$ мм, $r_1 = 48$ мм, $r_2 = 50$ мм). Как видно из графиков, в низкочастотной области, где нарушается второе из условий распрямления (7), соответствия нет. И напротив, в области высоких частот, где выполняются оба условия (7), наблюдается хорошее совпадение.

Описанный метод распрямления полезен и в случае z -слоя для сокращения времени счета, так как решение для пластины требует меньше машинного времени. Как показали анализ и расчеты, в случае распрямления z -слоя, а также изотропных слоев, справедливо более мягкое условие ($\epsilon_\lambda^2 \ll 1$), нежели условие (7) для r -слоя. Кроме того, осесимметричные задачи для таких слоев допускают распрямление и при относительно больших толщинах. В последнем случае распрямленное решение должно содержать множитель $1/\sqrt{r}$, который необходимо ввести до определения неизвестных констант интегрирования с помощью граничных условий задачи.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет получить приближенное решение волновой задачи в r -слое, где построение точного решения обычными способами невозможно. Кроме того, применение данного метода там, где это допускают условия задачи, позволяет сокращать затраты времени на аналитическое решение, а также машинное время при численных расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сизов В.П. О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 55–58.
2. Петров А.М., Сизов В.П. Определение напряженно-деформированного состояния в многослойной цилиндрической трубе при динамических нагрузках // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 5. С. 69–75.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
1.03.1999