

УДК 539.3

© 2000 г. В.Б. ЗЕЛЕНЦОВ

**ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
 ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
 НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ**

Предлагается асимптотический метод решения динамических плоских и пространственных осесимметричных контактных задач о внедрении жёсткого штампа в упругое полупространство, эффективный при больших временах взаимодействия штампа с упругой средой. Для плоской и осесимметричной контактных задач получены формулы для контактных напряжений под штампом и другие. Рассмотрен вопрос о движении круглого штампа на упругом полупространстве. Ранее такие задачи рассматривались в [1–4] и других работах.

1. Плоская нестационарная контактная задача о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость. Рассматривается нестационарная динамическая плоская контактная задача о внедрении жесткого штампа ширины $2a$ ($|x| \leq a$) в упругую полуплоскость ($y \geq 0, |x| < \infty$) с начальной скоростью u_0 без учета сил трения и сцепления в зоне контакта. Форма штампа и закон его движения в упругой среде определяются функцией $\varepsilon(x, t)$ ($|x| \leq a, t \geq 0$). В начальный момент времени, учитывая, что до момента внедрения упругая среда находилась в покое, смещения упругой среды $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ и их скорости $\partial u/\partial t$ и $\partial v/\partial t$ равны нулю. При $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ смещения и напряжения упругой среды исчезают. С помощью интегральных преобразований Лапласа по времени t [5]:

$$u^L(x, y, p) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) e^{-pt} dt \tag{1.1}$$

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{+\infty+c} u^L(x, y, p) e^{pt} dp$$

и интегрального преобразования Фурье по продольной координате x [6]:

$$u^{LF}(\alpha, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} u^L(x, y, p) e^{i\alpha x} dx \tag{1.2}$$

$$u^L(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{LF}(\alpha, y, p) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

применяемым к дифференциальным уравнениям теории упругости [2] с учетом смешанных граничных условий и условий в начальный момент времени и на бесконечности, рассматриваемая контактная задача сводится к решению интегрального уравнения (ИУ):

$$\int_{-a}^a \varphi^L(\xi, p) k(\xi - x, p) d\xi = 2\pi \varepsilon^L(x, p), \quad |x| \leq a \tag{1.3}$$

$$k(t, p) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, p) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad K(\alpha, p) = \sigma_2 (\sigma_1^2 - \alpha^2) R^{-1}(\alpha, p)$$

$$R(\alpha, p) = (\sigma_1^2 + \alpha^2) ((\lambda + 2\mu)\sigma_2^2 - \lambda\alpha^2) - 4\mu\alpha^2\sigma_1\sigma_2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 + \rho p^2 / \mu}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\alpha^2 + \rho p^2 / (\lambda + 2\mu)}$$

относительно неизвестной трансформанты $\varphi^L(x, p)$ контактных напряжений $\varphi(x, t)$, возникающих под штампом; причем $\sigma_{yy}^L(x, 0, t) = -\varphi(x, t)$, λ, μ – упругие постоянные Ляме, ρ – плотность упругой среды.

Для трансформант Лапласа вертикальных смещений $v^L(x, y, p)$ и нормальных напряжений $\sigma_{yy}^L(x, y, p)$ ($y \geq 0, -\infty < x < \infty$) получаются следующие выражения:

$$v^L(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{LF}(\alpha, p) [-2\alpha^2 \sigma_2 e^{-\sigma_1 y} + (\sigma_1^2 + \alpha^2) \sigma_2 e^{-\sigma_2 y}] R^{-1}(\alpha, p) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.4)$$

$$\sigma_{yy}^L(x, y, p) = \frac{\mu i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{LF}(\alpha, p) [-2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 e^{-\sigma_1 y} + (\sigma_1^2 + \alpha^2) ((\lambda + 2\mu)\sigma_2^2 - \lambda\alpha^2) e^{-\sigma_2 y}] R^{-1}(\alpha, p) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.5)$$

В уравнении (1.3) вводятся следующие обозначения:

$$p = c_2 p', \quad \beta^2 = c_2^2 c_1^{-2}, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$$

причем коэффициент β выражается через коэффициент Пуассона ν по формуле

$$\beta^2 = (1 - 2\nu) / (1 - \nu) \quad (1.6)$$

Во внутреннем интеграле ИУ (1.3) делается замена $\alpha = p'u$, а во внешнем $\xi = a\xi'$, $x = ax'$. В результате указанных замен и принятых обозначений ИУ (1.3) приводится к безразмерному виду

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f^L(x, p), \quad |x| \leq 1 \quad (1.7)$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{iut} du \quad (1.8)$$

$$K(u) = 2(1 - \beta^2) \sqrt{u^2 + \beta^2} R_0^{-1}(u) \quad (1.9)$$

$$R_0(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2 \sqrt{u^2 + 1} \sqrt{u^2 + \beta^2} \quad (1.10)$$

$$f^L(x, p) = 2(1 - \beta^2) \mu a^{-1} \varepsilon^L(x, p) \quad (1.11)$$

$$\Lambda = c_2 / ap \quad (1.12)$$

В (1.7) опущены штрихи и уравнение (1.7) при этом было умножено на $2(1 - \beta^2)$. Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проходит под углом $-\arg p$ к действительной оси ($\tau = 0$).

Символ ядра ИУ функция $K(u)$ (1.9), (1.10) обладает следующими важными свойствами: четная по u , является вещественной на действительной оси комплексной плос-

кости $u = \sigma + i\tau$, поведение $K(u)$ в нуле и на бесконечности дается соотношениями

$$K(u) = \frac{1}{|u|} + \frac{h_1}{|u|^3} + \frac{h_2}{|u|^5} + O\left(\frac{1}{|u|^7}\right), \quad |u| \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

$$K(u) = K(0) + O(u^2), \quad u \rightarrow 0 \quad (1.14)$$

$$K(0) = 2\beta(1 - \beta^2)$$

$$h_1 = -\frac{3\beta^4 - 4\beta^2 + 3}{4(1 - \beta^2)}, \quad h_2 = -\frac{\beta^8 + 2\beta^6 - 18\beta^4 + 22\beta^2 - 11}{16(1 - \beta^2)^2}$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функция $K(u)$ имеет четыре алгебраические точки ветвления $u = \pm i\beta$ и $u = \pm i$ и два полюса $u = \pm i\eta_0$ (полюсы Релея) [7].

Для построения решения контактной задачи при больших значениях времени t (или малых значениях параметра p) строится асимптотическое решение ИУ при больших Λ (1.12). Для этого в комплексной плоскости осуществляется деформация контура интегрирования Γ вдоль действительной оси, в результате ИУ (1.7) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi = \pi f^L(x, p), \quad |x| \leq 1 \quad (1.15)$$

$$k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut \, du \quad (1.16)$$

с учетом того, что $K(u)$ (1.9), (1.10) на действительной оси ($\tau = 0$) комплексной плоскости u не имеет особых точек.

В этом случае ядро (1.16) ИУ (1.15) при больших значениях Λ (или малых p (1.12)) представляется в виде

$$k(t) = -\ln |t| - F(t), \quad t = (\xi - x) / \Lambda \quad (1.17)$$

где функция $F(t)$ представляется формулой

$$F(t) = a_{00} + a_{11} t^2 \ln |t| + a_{10} t^2 + a_{21} t^4 \ln |t| + a_{20} t^4 - \int_0^\infty \left(K(u) - \frac{1}{u} - \frac{h_1}{u^3} - \frac{h_2}{u^5} \right) \left(\cos ut - 1 + \frac{u^2 t^2}{2!} - \frac{u^4 t^4}{4!} \right) du \quad (1.18)$$

в которой постоянные a_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) определяются через $K(u)$

$$a_{00} = -\int_0^\infty \left(K(u) - \frac{1}{u} + \frac{e^{-u}}{u} \right) du, \quad a_{11} = \frac{h_1}{2} \quad (1.19)$$

$$a_{10} = -\frac{3}{4} h_2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(K(u) - \frac{1}{u} - \frac{h_1}{u^3} + \frac{h_1}{u^3} e^{-u} \right) u^2 du, \quad a_{21} = -\frac{h_2}{24}$$

$$a_{20} = \frac{1}{24} \left[\frac{25}{288} h_2 - \int_0^\infty \left(K(u) - \frac{1}{u} - \frac{h_1}{u^3} - \frac{h_2}{u^5} + \frac{h_2 e^{-u}}{u^5} \right) u^4 du \right]$$

Подставив представление ядра (1.17) в ИУ (1.15), получим эквивалентное ему уравнение вида

$$-\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) \ln \left| \frac{\xi - x}{\Lambda} \right| d\xi = \pi f^L(x, p) + \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) F\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi \quad (1.20)$$

Продифференцировав (1.20) по переменной x , получим сингулярное ИУ вида

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi^L(\xi, p)}{\xi - x} d\xi = \pi f'_x L'(x, p) + \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) F'_x \left(\frac{\xi - x}{\Lambda} \right) d\xi \quad (1.21)$$

Обращение сингулярного оператора в (1.21) дается формулой [8–10]:

$$\begin{aligned} \varphi^L(x, p) = & \frac{P_*(p)}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} f'_t L'(t, p) dt - \\ & - \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) F'_t \left(\frac{\xi-t}{\Lambda} \right) d\xi \end{aligned} \quad (1.22)$$

в которой $P_*(p)$ зависит от параметра p и определяется соотношением

$$P_*(p) = \int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) d\xi \quad (1.23)$$

откуда следует, что $P_*(p) = a^{PL}(p)$, а $PL(p)$ есть трансформанта Лапласа действующей на штамп силы $P(t)$.

Из (1.18) нетрудно сделать вывод о структуре функции $F(t)$, которая может быть представлена рядами

$$F(t) = \ln |t| \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} t^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} t^{2i} \quad (1.24)$$

а само ядро ИУ в этом случае представляется с помощью этих же рядов

$$k(t) = -\ln |t| - \ln |t| \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} t^{2i} - \sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} t^{2i}, \quad t = \frac{\xi - x}{\Lambda} \quad (1.25)$$

Из (1.24) следует, что $F(t)$ является регулярной функцией в некоторой полосе $|\operatorname{Re}t| < c_0$ комплексного t .

Структура ядра (1.25) ИУ (1.15) позволяет определить структуру решения (1.22) ИУ (1.15) при применении для его решения метода последовательных приближений. Это позволяет принять решение ИУ (1.22) эквивалентного ИУ (1.15) в виде ряда

$$\varphi^L(x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{nk}(x) \Lambda^{-2n} \ln^k \Lambda \quad (1.26)$$

в котором $\varphi_{nk}(x) = 0$ при $n < k$, а $\varphi_{nk}(x)$ при $n \geq k$ определяются подстановкой (1.26) в ИУ второго рода (1.22). Подставив (1.26) в (1.22), учитывая при этом, что

$$F'_t \left(\frac{\xi - t}{\Lambda} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{k1} (\xi - t) \Lambda^{-2k} + \omega_{k0} (\xi - t) \Lambda^{-2k} \ln \Lambda \quad (1.27)$$

$$\omega_{k1}(t) = t^{2k-1} (a_{k1} + 2ka_{k0} + 2ka_{k1} \ln |t|)$$

$$\omega_{k0}(t) = t^{2k-1} 2ka_{k1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и приравнявая в полученном соотношении выражения, стоящие при одинаковых степенях $\Lambda^{-2k} \ln^n \Lambda$ и Λ^{-2k} ($k, n = 0, 1, 2, \dots$) получим следующие рекуррентные формулы для определения φ_{nk} ($n \geq k$) до $n = 2$:

$$\varphi_{00}(x) = \frac{P_*(p)}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} f'_t L'(t, p) dt \quad (1.28)$$

$$\varphi_{10}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\xi) \omega_{11}(\xi-t) d\xi$$

$$\varphi_{11}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\xi) \omega_{10}(\xi-t) d\xi$$

$$\varphi_{20}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 [\varphi_{10}(\xi) \omega_{11}(\xi-t) + \varphi_{00}(\xi) \omega_{21}(\xi-t)] d\xi$$

$$\varphi_{21}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 [\varphi_{10}(\xi) \omega_{10}(\xi-t) + \varphi_{11}(\xi) \omega_{11}(\xi-t) + \varphi_{00}(\xi) \omega_{20}(\xi-t)] d\xi$$

$$\varphi_{22}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt \int_{-1}^1 \varphi_{11}(\xi) \omega_{10}(\xi-t) d\xi$$

В формулах (1.28) для определения $P_*(p)$ воспользуемся ИУ (1.20). Умножим левую и правую части (1.20) на $dx/\sqrt{1-x^2}$ и проинтегрируем от -1 до 1 по x , учитывая при этом, что $F(t)$ представляется рядом (1.24). Вычисляя получившиеся в результате этого квадратуры с точностью до $\Lambda^{-6} \ln^3 \Lambda$, получим выражение для $P_*(p)$:

$$P_*(p) = \frac{1}{w(\Lambda)} \int_{-1}^1 \frac{f^L(x, p)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap} \quad (1.29)$$

$$w(\Lambda) = \ln 2\Lambda + \sum_{n=0}^2 \sum_{k=0}^2 d_{nk} \Lambda^{-2n} \ln^k \Lambda + O(\Lambda^{-6} \ln^3 \Lambda)$$

$$d_{nk} = 0 \quad (n < k), \quad d_{00} = -a_{00}, \quad d_{10} = -\frac{1}{4}(4a_{10} + (1+2\ln 2)a_{11})$$

$$d_{11} = a_{11}, \quad d_{20} = \frac{1}{4}(a_{10} + \frac{1}{2}(3-2\ln 2)a_{11} - 9a_{20} - (4+5\ln 2)a_{21})$$

$$d_{21} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}(3-2\ln 2)a_{11}^2 - 9a_{21} \right), \quad d_{22} = -\frac{1}{4}a_{11}^2$$

Таким образом решение ИУ (1.15) вида (1.26), (1.28), (1.29) построено для произвольной $\varepsilon^L(x, p)$ и эффективно для больших значений Λ ($\Lambda > 2$) или для малых p .

В важном частном случае, когда штамп плоский и $\varepsilon^L(x, p) = \varepsilon^L(p)$ и при этом $f_x^L(x, p) = 0$, решение (1.26) ИУ (1.15) приобретает наиболее простой вид ($n=2$):

$$\varphi^L(x, p) = \frac{P_*(p)}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^2 \varphi_{nk}^0(x) \Lambda^{-2n} \ln^k \Lambda \quad (1.30)$$

$$\varphi_{00}^0(x) = 1, \quad \varphi_{10}^0(x) = ((3-2\ln 2)a_{11} + 2a_{10}) \left(\frac{1}{2} - x^2 \right)$$

$$\varphi_{20}^0(x) = \theta_1 \left(\frac{1}{8} + x^2/2 - x^4 \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{2} - x^2 \right)$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{3}((3-2\ln 2)a_{11} + 2a_{10})a_{11} + (a_{21} + 4a_{20}) \left(\frac{2}{3}(6\ln 2 - 11)a_{21} - 1 \right)$$

$$\theta_2 = (2\ln 2 + \frac{1}{2})((3-2\ln 2)a_{11} + 2a_{10}) - (a_{21} + 4a_{20}) \left(\frac{3}{4} + 2(\ln 2 + \frac{1}{2})a_{21} \right)$$

$$\varphi_{21}^0(x) = -\frac{2}{3}a_{11}^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x^2 - x^4 \right) - 2a_{11}^2 (2\ln 2 + \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) +$$

$$+ 4a_{21} \left(\frac{1}{8} - x^2 - x^4 \right), \quad \varphi_{22}^0(x) = 0$$

Формула для $P_*(p)$ в этом случае получается из (1.29) и имеет вид

$$P_*(p) = \frac{2\pi(1-\beta^2)\mu\varepsilon^L(p)}{aw(\Lambda)}, \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap} \quad (1.31)$$

Для получения решения контактной задачи для больших значений t ($t > 2a/c_2$) в формулах (1.30), (1.31) необходимо перейти к оригиналам Лапласа используя (1.1). Осуществляя переход к оригиналам Лапласа в (1.30), получим решение контактной задачи с точностью $O(\Lambda_0^{-6} \ln^3 \Lambda_0)$ для случая плоского штампа ($\Lambda_0 = c_2/a$):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} [P_*(t) + P_*''(t)\varphi_{11}^0(x)\Lambda_0^{-2} \ln \Lambda_0 + \\ & + (P_*''(t)\varphi_{10}^0(x) + \varphi_{11}^0(x)) \int_0^t \frac{2!P_*(\tau)}{(t-\tau)^3} d\tau \Lambda_0^{-2} + P_*^{(4)}(t)\varphi_{21}^0(x)\Lambda_0^{-4} \ln \Lambda_0 + \\ & + \left(P_*^{(4)}(t)\varphi_{20}^0(x) + \varphi_{21}^0(x) \int_0^t \frac{4!P_*(\tau)}{(t-\tau)^5} d\tau \right) \Lambda_0^{-4} \ln \Lambda_0 + O(\Lambda_0^{-6} \ln^3 \Lambda_0) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Асимптотическая формула для $P_*(t)$ получается из (1.31), если в этой формуле переразложить $w^{-1}(\Lambda)$ при больших Λ и перейти к оригиналам преобразования Лапласа. В результате получим

$$P_*(t) = -2\pi(1-\beta^2)\mu a^{-1} \sum_{k=0}^6 l_k \int_0^t g_{k+1}(\tau) \varepsilon(t-\tau) d\tau \quad (1.33)$$

$$g_1(t) = u_{001}(\tau), \quad g_2(t) = u_{112}(\tau), \quad g_3(t) = u_{101}(\tau)$$

$$g_4(t) = 3u_{223}(\tau) - \pi^2 u_{203}(\tau), \quad g_5(t) = 2u_{212}(\tau)$$

$$g_6(t) = u_{201}(\tau), \quad g_7(t) = (a\delta/c_2)^6 \delta(t), \quad \tau = c_2(a\delta)^{-1}t, \quad \delta = (2d_0)^{-1}$$

$$u_{nmq}(\tau) = \int_0^\infty x^{2n} \ln^m x (\ln^2 x + \pi^2)^{-q} e^{-x\tau} dx$$

$$l_0 = 1, \quad l_1 = b_1, \quad l_2 = b_2, \quad l_3 = b_1^2, \quad l_4 = b_3 + 2b_1b_2$$

$$l_5 = b_4 + b_2^2, \quad l_6 = b_5$$

$$b_1 = (d_1 + d_2 \ln \delta)\delta^{-2}, \quad b_2 = -d_2\delta^{-2}, \quad b_5 = d_5\delta^{-4}$$

$$b_3 = (d_3 + d_4 \ln \delta + d_5 \ln^2 \delta)\delta^{-4}, \quad b_4 = -(d_4 + 2d_5 \ln \delta)\delta^{-4}$$

Формулы для d_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) даны в (1.29).

Нетрудно сделать вывод о том, что сила $P(t) = aP_*(t)$, действующая на штамп, при задании закона движения штампа $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда), означающего мгновенное внедрение штампа в начальный момент времени на глубину ε_0 в упругую полуплоскость и удерживаемого силой $P(t)$ в этом положении, при больших значениях t является функцией убывающей и имеет оценку

$$P(t) = 2\pi(1-\beta^2)\mu \ln^{-1} t + O(\ln^{-2} t) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (1.34)$$

что с одной стороны свидетельствует о нарушении физического смысла решения динамической контактной задачи при $t \rightarrow \infty$, а с другой стороны, указывает на справедливость формулы (1.33) для $P_*(t)$ на ограниченном интервале изменения t ($2 < \tau < \tau_*$, $\tau = c_2(a\delta)^{-1}t$), определяемого опытным путем. Асимптотика (1.34) аналогична

асимптотике силы P в соответствующей плоской статической контактной задаче для полосы, когда ширина полосы неограниченно возрастает [8]. При $t \rightarrow \infty$ все формулы рассматриваемой динамической контактной задачи об удержании штампа на глубине ε_0 должны вырождаться в соответствующие формулы статической контактной задачи для полуплоскости. Однако, как известно [12], при решении соответствующей статической контактной задачи для полуплоскости связь между смещением штампа и контактными напряжениями определяется с точностью до неизвестной постоянной.

2. Осесимметричная пространственная контактная задача о внедрении жесткого штампа в упругое полупространство. Рассматривается нестационарная контактная задача о внедрении жесткого штампа радиуса a ($r \leq a$) в упругое полупространство ($z \geq 0$), $0 \leq r < \infty$). Силы трения и сцепления между штампом и полупространством не учитываются. Форма штампа и его осадка в полупространстве дается функцией $\varepsilon(r, t)$ ($0 \leq r \leq a, t > 0$).

В начальный момент времени смещения в упругой среде: радиальное $u(r, z, t)$ и нормальное $w(r, z, t)$ и их скорости $\partial u/\partial t$, $\partial w/\partial t$ равны нулю. При $r, z \rightarrow \infty$ смещения упругой среды u, w равны нулю вместе со своими частными производными.

Поставленная контактная задача сводится к решению ИУ с помощью интегрального преобразования Лапласа (по времени t) (1.1) и интегрального преобразования Ханкеля (по координате r) [11]:

$$w^{LH}(\gamma, z, p) = \int_0^{\infty} w^L(r, z, p) J_0(\gamma r) r dr, \quad w^L(\gamma, z, p) = \int_0^{\infty} w^{LH}(r, z, p) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.1)$$

где $J_0(r)$ – функция Бесселя нулевого порядка, которые последовательно применяются к дифференциальным уравнениям движения упругой среды [7] и к граничным условиям контактной задачи с учетом начальных условий и условий на бесконечности. При этом считается, что существуют интегралы в (1.1) и (2.1) от функций упругих смещений $u(r, z, t)$, $w(r, z, t)$, $\varepsilon(r, t)$. В результате произведенных операций, как промежуточный результат, получают формулы для трансформант смещений и напряжений упругой среды $w^L(r, z, p)$ и $\sigma_{zz}^L(r, z, p)$:

$$w^L(r, z, p) = \int_0^{\infty} \varphi^{LH}(\gamma, p) [2\gamma^2 e^{-\sigma_1 z} - (\gamma^2 + \sigma_1^2) e^{-\sigma_2 z}] R_0^{-1}(\gamma, p) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.2)$$

$$\sigma_{zz}^L(r, z, p) = - \int_0^{\infty} \varphi^{LH}(\gamma, p) [4\mu\gamma^2 \sigma_1 \sigma_2 e^{-\sigma_1 z} + (\gamma^2 + \sigma_1^2)(\lambda\gamma^2 - (\lambda + 2\mu)\sigma_2^2)] e^{-\sigma_2 z} R_0^{-1}(\gamma, p) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \quad (2.3)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\gamma^2 + \rho p^2 / \mu}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\gamma^2 + \rho p^2 / (\lambda + 2\mu)} \quad (2.4)$$

$$R_0(\gamma, p) = 4\mu\gamma^2 \sigma_1 \sigma_2 + (\gamma^2 + \sigma_1^2)(\lambda\gamma^2 - (\lambda + 2\mu)\sigma_2^2)$$

где λ, μ – постоянные Ляме, $\varphi^{LH}(\gamma, p)$ – трансформанта Лапласа – Ханкеля неизвестных контактных напряжений под штампом $\varphi(r, t)$, при этом $\sigma_{zz}(r, 0, t) = -\varphi(r, t)$.

Реализация смешанных граничных условий контактной задачи с учетом (2.2) приводит к ИУ поставленной задачи

$$\int_0^a \varphi^L(\xi, p) \xi k(\xi, r) d\xi = \varepsilon^L(r, p), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.5)$$

$$k(\xi, r) = \int_0^{\infty} \gamma \sigma_2 (\gamma^2 - \sigma_1^2) R_0^{-1}(\gamma, p) J_0(\gamma \xi) J_0(\gamma r) d\gamma$$

являющегося ИУ первого рода относительно трансформанты Лапласа неизвестных контактных напряжений $\varphi^L(r, p)$. Для удобства в дальнейшем ИУ (2.5) приводится к безразмерному виду с помощью замен переменных $r = ar'$, $\xi = a\xi'$, $\gamma = u'p/c_2$ и с учетом уже введенных обозначений

$$\int_0^1 \varphi^L(\xi, p) \xi k_0 \left(\frac{\xi}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda} \right) d\xi = \theta_0 \varepsilon^L(r, p), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.6)$$

$$k_0(\xi, r) = \int_0^\infty K(u) J_0(\xi u) J_0(r u) du$$

$$K(u) = u \sigma_2 R^{-1}(u), \quad R(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2 \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2}, \quad \theta_0 = \mu c_2 / a^2 p, \quad \Lambda = c_2 / pa$$

ИУ (2.6), подобно тому, как это сделано в [13], сводится к решению эквивалентного ему ИУ с разностным ядром. С этой целью левая и правая части (2.6) умножаются на $rdr / \sqrt{x^2 - r^2}$, а затем интегрируются по r от 0 до x . После перестановки порядка интегрирования, использования интегральных представлений [14]:

$$\int_0^x \frac{r J_0(\gamma r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr = \frac{\sin \gamma x}{\gamma}, \quad \int_x^\infty \frac{r J_0(\gamma r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr = \frac{\cos \gamma x}{\gamma} \quad (2.7)$$

и дифференцирования левой и правой части получившегося соотношения, получим ИУ

$$\int_0^1 \varphi^L(\xi, p) \xi d\xi \int_0^\infty K(\gamma) J_0 \left(u \frac{\xi}{\Lambda} \right) \cos u \frac{x}{\Lambda} du = \theta_0 g(x, p), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.8)$$

$$g(x, p) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r \varepsilon^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr$$

Используя интегральное представление для $J_0(x)$:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos(t\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi$$

в (2.8) и переставляя порядок интегрирования по γ и ξ , получим новое ИУ

$$\int_0^1 \omega(\xi, p) d\xi \int_0^\infty K(u) \cos u \frac{\xi}{\Lambda} \cos u \frac{x}{\Lambda} du = \frac{\pi \theta_0}{2} g(x, p), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Продолжая в последнем ИУ $\omega(x, p)$ и $g(x, p)$ по x четным образом на отрезок $[-1, 0]$ и умножая его на $2(1 - \beta^2)$, получим ИУ типа свертки первого рода с разностным ядром

$$\int_{-1}^1 \omega(\xi, p) k \left(\frac{\xi - x}{\Lambda} \right) d\xi = \pi \theta g(x, p), \quad |x| \leq 1 \quad (2.9)$$

$$k(t) = \int_0^\infty K(u) \cos ut du, \quad K(u) = 2(1 - \beta^2) u \sqrt{u^2 + \beta^2} R^{-1}(u) \quad (2.10)$$

$$\omega(\zeta, p) = \int_\zeta^1 \frac{\varphi^L(\xi, p) \xi}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}} d\xi, \quad \theta = 2(1 - \beta^2) \theta_0 \quad (2.11)$$

где $R(u)$ дается в формуле (2.6).

Соотношение (2.11) представляет ИУ типа Абеля. Решив уравнение (2.11), получим связь между функциями $\varphi^L(x, p)$ и $\omega(\zeta, p)$, выражающуюся формулой

$$\varphi^L(x, p) = -\frac{2d}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\omega(\zeta, p)}{\sqrt{\zeta^2 - x^2}} d\zeta \quad (2.12)$$

Отметим, что функция $K(u)$ – символ ядра ИУ (2.12), четна по u и обладает следующими важными асимптотическими свойствами:

$$K(u) = A|u| + O(|u|^3), \quad |u| \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

$$K(u) = 1 + \frac{h_1}{u^2} + \frac{h_2}{u^4} + O\left(\frac{1}{u^6}\right), \quad u \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

$$A = 2\beta(1 - \beta^2)$$

где h_1, h_2 даны в (1.14), (1.15).

На основании (2.14) ядро ИУ (2.10) представляется в форме

$$2^{-1}k(t) = \pi\delta(t) - \int_0^\infty (1 - K(u)) \cos ut du \quad (2.15)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Такое представление ядра позволяет ИУ (2.9) записать в форме ИУ второго рода

$$\omega(x, p) = \theta\Lambda^{-1}g(x, p) + (\pi\Lambda)^{-1} \int_{-1}^1 \omega(\xi, p) F\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi \quad (2.16)$$

$$F(t) = \int_0^\infty (1 - K(u)) \cos ut du$$

в котором функция $F(t)$ является функцией четной, регулярной в полосе комплексной плоскости ($w = t + it$) $|t| < \infty, |\tau| < 1$. С учетом этого функция $F(t)$ при $|t| < 1$ представляется в виде

$$F(t) = \sum_{n=0}^4 a_n |t|^n + F_1(t) \quad (2.17)$$

$$a_0 = \int_0^\infty (1 - K(u)) du, \quad a_1 = \frac{\pi}{2} h_1, \quad a_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty (u^2 - u^2 K(u) + h_1) du$$

$$a_3 = -\frac{\pi}{12} h_2, \quad a_4 = \frac{1}{24} \int_0^\infty (u^4 - u^4 K(u) + h_1 u^2 + h_2) du$$

$$F_1(t) = \int_0^\infty \left(1 - K(u) + \frac{h_1}{u^2} + \frac{h_2}{u^4}\right) \left(\cos ut - 1 + \frac{u^2 t^2}{2!} - \frac{u^4 t^4}{4!}\right) du = O(t^6)$$

Функция $F_1(t)$ является регулярной в полосе регулярности $F(t)$ ввиду представления (2.14) функции $K(u)$.

Структура функции $F(t)$ показывает, что решение ИУ (2.16) следует разыскивать в виде ряда по отрицательным степеням Λ :

$$\omega(x, p) = \sum_{n=0}^\infty \omega_n(x, p) \Lambda^{-n}. \quad (2.18)$$

Для определения членов ряда $\omega_n(x, p)$ в (2.18) подставим (2.18) в (2.16) и приравняем коэффициенты в левой и правой части (2.16) при одинаковых степенях Λ , в результате

чего получим

$$\omega_0(x, p) = bg(x, p), \quad \omega_n(x, p) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-1}^1 \omega_{n-k}(\xi, p) |\xi - x|^n d\xi \quad (2.19)$$

$$b = 2(1 - \beta^2)\mu\alpha^{-1}$$

в которых $g(x, p)$ дается формулой из (2.8). Вычисляя последовательно $\omega_n(x, p)$ и квадратуры при этом возникающие для $n = 0, 1, 2, 3$ получим

$$\omega_0(x, p) = b \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r\mathcal{E}^L(r, p)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr, \quad \omega_1(x, p) = \frac{2ba_0}{\pi} \int_0^1 \frac{r\mathcal{E}^L(r, p)}{\sqrt{1 - r^2}} dr \quad (2.20)$$

$$\omega_2(x, p) = \frac{2b}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{r\mathcal{E}^L(r, p)}{\sqrt{1 - r^2}} \left(\frac{2a_0^2}{\pi} + a_1 \left(1 - \sqrt{1 - r^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r} \right) \right) dr + \right.$$

$$\left. + a_1 \int_0^x r\mathcal{E}^L(r, p) \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - r^2}}{r} \right) dr \right]$$

$$\omega_3(x, p) = \frac{2b}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{r\mathcal{E}^L(r, p)}{\sqrt{1 - r^2}} \left(\frac{4a_0^2}{\pi^3} + \frac{2a_0a_1}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - r^2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r} \right) \right) dr + \right.$$

$$\left. + \int_0^x r\mathcal{E}^L(r, p) \left(2a_1 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + r^2}}{r} \right) - (a_1 + 2a_2)\sqrt{1 - r^2} \right) dr + \right.$$

$$\left. + (1 + x^2) \left(\frac{a_0a_1}{\pi} + a_2 \right) \int_0^1 \frac{r\mathcal{E}^L(x, p)}{\sqrt{1 - r^2}} dr \right]$$

При вычислении квадратур в (2.19) учитывалось, что $\mathcal{E}^L(r, p)$ было, в свою очередь, продолжено по r на отрезок $[-1, 0]$ нечетным образом. Формулы (2.18), (2.20) дают асимптотическое решение ИУ (2.16), или, что то же, ИУ рассматриваемой контактной задачи (2.9) при больших Λ ($\Lambda > 2$) или при малых p [8].

Для получения решения поставленной контактной задачи $\varphi(r, t)$ применяется обратное преобразование Лапласа в формуле (2.11), в результате чего получим общую формулу решения задачи

$$\varphi(r, t) = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{\omega(a, t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\omega'_\xi(\xi, t)}{r\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi \right], \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.21)$$

в размерных переменных r, t . Для определения $\omega(x, t)$ необходимо осуществить переход к оригиналам Лапласа в формуле (2.18). Формально осуществляя такой переход в общем случае $\varepsilon(r, t)$, получим

$$\varphi(r, t) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{c_2} \right)^{2n} \left[\frac{w_n(t)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_r^a \frac{\partial \omega_n(\zeta, t)}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} + u_n(t) \right] \quad (2.22)$$

$$w_n(t) = \omega_n^{(n)}(a, t) + \sum_{k=1}^n \delta^{(n-k)}(t) \omega_n^{(n-k)}(a, 0)$$

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n \delta^{(n-k)}(t) \int_r^a \frac{\partial \omega_n^{(n-k)}(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}}$$

В формуле (2.22) $\dot{\omega}_n^{(k)}(a, t)$ обозначает в символической форме производную по t от функций $\omega_n(a, t)$, начальные значения для которой в символьной форме записываются, как $\omega_n^{(k)}(a, 0)$; $\delta^{(k)}(t)$ – k -ая производная дельта-функции. Функции $\omega_n(r, t)$ даются формулами (2.20) ($n = 0, 1, 2, 3$), в которых после перехода к оригиналам Лапласа в левой и правой частях достаточно вместо $\omega_n(r, p)$ поставить $\omega_n(r, t)$, $\varepsilon^L(r, p)$ заменить на ее оригинал $\varepsilon(r, t)$. Следует отметить, что начальные значения $\omega_n^{(k)}(r, 0)$ будут выражаться по тем же формулам через символьные обозначения закона внедрения штампа в упругое полупространство $\varepsilon(r, t)$ и имеют вид $\varepsilon^{(k)}(r, 0)$. В решении (2.22) содержатся обобщенные функции $w_n(t)$ и $u_n(t)$, содержащие обобщенную функцию $\delta(t)$ и ее производные. Так как решение (2.22) справедливо при $t > 2a/c_2$, что следует из интервала сходимости рядов (2.17), (2.19), то для таких времен следует пользоваться регулярной частью решения (2.22).

В важном частном случае, когда внедряющийся штамп плоский, т.е. $\varepsilon(r, t) = \varepsilon(t)$, решение контактной задачи без учета обобщенной составляющей решения и с сохранением в нем первых четырех членов имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) = & \frac{2ba}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \left[\varepsilon(t) + \frac{2a_0}{\pi} h \dot{\varepsilon}(t) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{2a_0^2}{\pi} + a_1 \left(4 - 3 \frac{r^2}{a^2} \right) \right) h^2 \ddot{\varepsilon}(t) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \left[\frac{4a_0^3}{\pi^2} + \frac{a_0 a_1}{\pi} \left(3 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3} \left(11 - 9 \frac{r^2}{a^2} \right) \right] h^3 \ddot{\varepsilon}(t) \right], \quad h = \frac{a}{c_2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь точками обозначены производные по t .

Для вычисления силы $P(t)$, действующей на внедряющийся штамп, воспользуемся общей формулой

$$P(t) = 2\pi \int_0^a \varphi(r, t) r dr \quad (2.24)$$

Учитывая (2.22), получим в общем случае для $P(t)$ формулу ($h = a/c_2$):

$$P(t) = 4a^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^n \left[\int_0^1 \frac{\partial^n \omega_n(\zeta, t)}{\partial t^n} d\zeta + \sum_{k=1}^n \delta^{(n-k)}(t) \int_0^1 \omega_n^{(n-k)}(\zeta, 0) d\zeta \right] \quad (2.25)$$

в которой при рассмотрении для $t > 2a/c_2$ следует отбросить обобщенную составляющую. В случае плоского штампа $\varepsilon(r, t) = \varepsilon(t)$ получим $P(t)$, выраженное через $\varepsilon(t)$ и ее производные $\varepsilon^{(n)}(t)$:

$$P(t) = -4\pi^{-1} a^2 b \sum_{n=0}^{\infty} h^n d_n \left[\varepsilon^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n \varepsilon^{(n-k)}(0) \delta^{(n-k)}(t) \right] \quad (2.26)$$

где первые из d_n ($n = 0, 1, 2, 3$) даются формулами

$$\begin{aligned} d_0 &= \pi, \quad d_1 = 2a_0, \quad d_2 = 2(2\pi^{-1} a_0^2 + 2a_1/3) \\ d_3 &= 2\pi^{-2} (4a_0^3 + 7\pi a_0^2 a_1/3 + 2\pi^2 a_1/3 - 2\pi^2 a_2/3) \end{aligned}$$

a и b определено в (2.19); $\varepsilon^{(n)}(0)$ – начальные значения производных $\varepsilon(t)$. Заметим, что при $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ ($H(t)$ – функция Хевисайда) (2.26) при больших t ($t \gg 2h$) вырождается в решение соответствующей статической задачи [8].

3. О движении штампа на упругой среде. Одной из важных характеристик контактной задачи является определение закона движения жесткого штампа на упругой среде.

Представив штамп в виде материальной точки массы M , дифференциальное уравнение движения штампа принимает вид

$$M\ddot{\epsilon}(t) = Q(t) \quad (3.1)$$

где M – масса штампа, $Q(t)$ – сила упругого сопротивления среды, с начальными условиями $\epsilon(0) = \epsilon_0$ (ϵ_0 – начальное, до момента времени $t = 0$, внедрение штампа), $\dot{\epsilon}(0) = v_0$ (v_0 – начальная скорость внедрения штампа при $t = 0$).

После применения преобразования Лапласа (1.1) к уравнению (3.1) получается уравнение в трансформантах Лапласа

$$M[p^2\epsilon^L(p) - \epsilon_0 p - v_0] = Q^L(p) \quad (3.2)$$

Трансформанта силы упругого сопротивления среды $Q^L(p)$ найдется, если учесть, что $Q(t)$ совпадает по величине с $P(t)$ – силой, действующей на штамп и взятой с противоположным знаком

$$Q^L(p) = -P(p) = -\int_{-a}^a \phi^L(x, p) dx \quad (3.3)$$

В случае плоской контактной задачи, рассмотренной в п. 1, реализация формулы (3.3) осуществляется с учетом (1.31) и равенства $P(p) = aP_*(p)$. Подставив $Q^L(p)$ в (3.2) отсюда определим $\epsilon^L(p)$:

$$\epsilon^L(p) = \frac{(\epsilon(0)p + v_0)w(\Lambda)}{p^2 w(\Lambda) + 2\pi(1 - \beta^2)\mu M^{-1}}, \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap} \quad (3.4)$$

где $w(\Lambda)$ дается в формуле (1.31). Представляя затем правую часть (3.4) по степеням p^m и $p^m \ln^n p$ при малых p и выполняя в полученном выражении обратное преобразование Лапласа, получим $\epsilon(t)$ в виде ряда по отрицательным степеням t^m и $t^m \ln^n t$, регулярная часть которого представляется формулой [15]:

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau) = & \frac{M_{v_0}}{2\pi(1 - \beta^2)h\mu} [\tau^{-1} - 2m_1\tau^{-3} + 4m_2(\ln \gamma\tau - 3/2)\tau^{-3} - 24m_3\tau^{-5} + 4m_4(12 \ln \gamma\tau - 25)\tau^{-5} - \\ & - 12m_5(6 \ln^2 \gamma\tau - 25 \ln \gamma\tau + 17.5 + \pi^2)\tau^{-5} + O(\tau^{-6} \ln^3 \tau)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\tau = t/h$, $h = a/c_2$, $\gamma = e^C$, C – постоянная Эйлера – Маскерони

$$m_1 = d_2 - 2\delta \ln 2 - 2\delta d_0, \quad m_2 = -\delta$$

$$m_3 = d_4 - 2\delta d_1 - 2\delta d_2 \ln 2 - 2\delta d_0 d_2 + 3\delta^2 (\ln 2 + d_0)^2$$

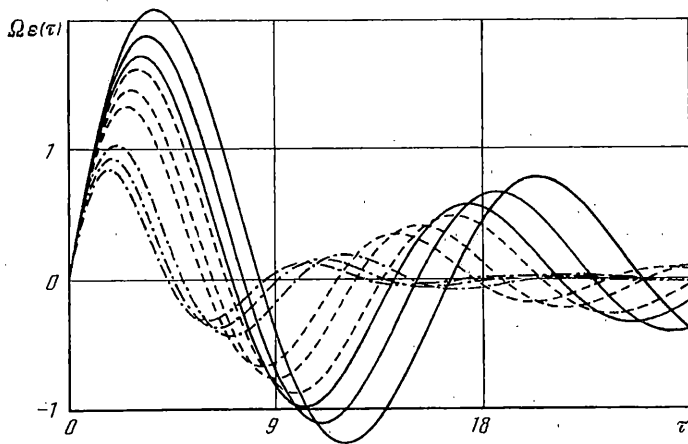
$$m_4 = d_5 - 2\delta d_2 + 3\delta^2 (\ln 2 + d_0), \quad m_5 = \delta^2$$

$$\delta^{-1} = 2\pi(1 - \beta^2)\mu h^2 M^{-1}$$

а постоянные d_i ($i = 0-5$) даны в (1.29). Полученная формула (3.5) для $\epsilon(\tau)$ справедлива при $2 < \tau < \tau_*$, где τ_* подбирается опытным путем (так же как τ_* для $P_*(t)$ из п. 1).

Для численного анализа закона движения штампа $\epsilon(t)$ более удобной является формула для $\epsilon(t)$, полученная из (3.4) без перерасложения правой ее части по степеням p , а представленная в интегральной форме в виде контурного интеграла Лапласа (1.1) с последующим его вычислением. Оставляя в формуле (3.4) члены второго порядка малости по p получим формулу для $\epsilon(t)$:

$$(\nu_0 h)^{-1} \epsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{+i\infty+c} \frac{(-\ln p^2 + \theta) e^{p\tau} dp}{-p^2 \ln p^2 + \eta_1 p^2 + \eta_2}, \quad \tau = \frac{t}{h} \quad (3.6)$$



Вычислив квадратуру в (2.6) получим ($\sigma < \tau < \tau_*$):

$$\begin{aligned}
 (\nu_0 h)^{-1} \varepsilon(t) = & 2\eta_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\tau} dx}{(-x^2 \ln x^2 + \eta_1 x^2 + \eta_0)^2 + 4\pi^2 x^2} + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{(-\ln p^2 + \eta_1) e^{p\tau}}{2p(\ln p^2 + 1 - \eta_1)} \right]_{p=z_1}, \operatorname{Re} z_1 < 0
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\eta_0 = 4\pi(1 - \beta^2)\mu h^2 M^{-1}, \quad \eta_1 = 2(\ln 2 + d_0)$$

где z_1 – корень уравнения $-p^2 \ln p^2 + \eta_1 p^2 + \eta_0 = 0$.

Для определения закона движения штампа в случае осесимметричной контактной задачи (н. 2) трансформанта упругого сопротивления среды с учетом (2.26) дается формулой

$$Q^L(p) = -4\pi^{-1} a^2 b \sum_{n=0}^{\infty} (hp)^n d_n \varepsilon^L(p), \quad h = \frac{a}{c_2} \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в (3.2) определим трансформанту $\varepsilon^L(p)$ ($\varepsilon_0 = 0$), сохранив члены до $(hp)^2$:

$$\varepsilon^L(p) = \frac{1}{8(1 - \beta^2)} \frac{M\nu_0}{\mu a} \frac{1}{1 + \eta_1 hp + \eta_2 (hp)^2}, \quad h = \frac{a}{c_2} \quad (3.9)$$

$$\eta_1 = \pi d_1, \quad \eta_2 = (\eta h^2)^{-1} + d_2, \quad \eta = 8(1 - \beta^2)\mu a M^{-1} \quad (3.10)$$

Переходя в (3.9) к оригиналам Лапласа, получим формулу для $\varepsilon(t)$ вида

$$\Omega \varepsilon(t) = \frac{1}{\omega \alpha} e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad \Omega = \frac{\mu h}{\rho a^2 \nu_0}, \quad \tau = \frac{t}{h} \quad (3.11)$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2a_0^2}{\pi} + \frac{2}{3} a_1 \right) \eta h^2, \quad \gamma = \frac{\eta_1}{2\eta_2}, \quad \omega^2 = \frac{4\eta_2 - \eta_1^2}{4\eta_2^2} \quad (3.12)$$

реализация которой в виде графиков представлена на фигуре для различных значений параметра $\rho/(\pi\rho_0)$ ($\rho_0 = M/(\pi a^3)$) и различных значений коэффициента Пуассона ν . Графики значений функции $\Omega \varepsilon(\tau)$ представлены по τ при различных значениях параметров $\rho/(\pi\rho_0)$ и ν : для $\rho/(\pi\rho_0) = 1/10$ графики нанесены пунктиром, причем нижний,

средний и верхний соответствуют $\nu = 0,35; 0,25; 0,10$; для $\rho/(\pi\rho_0) = 1/20$ графики нанесены штриховыми линиями, а для $\rho/(\pi\rho_0) = 1/30$ – сплошными линиями при аналогичном указанному в первом случае соответствию этих графиков по коэффициенту Пуассона ν . Параметр $\rho/(\pi\rho_0)$ показывает изменение массы штампа M (при фиксированном a). Графики показывают существенное влияние этих параметров на величину амплитуды и частоты колебаний штампа, а также на степень их затухания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-01-00-428 а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697–705.
2. Партон В.В., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Костров Б.В. Автомодельные динамические задачи о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 54–62.
4. Поручиков В.Б. Осесимметричная динамическая задача о штампе на упругом полупространстве // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1966. № 6. С. 114–120.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк. 1966. 405 с.
6. Спеддон И. Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
7. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
8. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
10. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука 1977. 640 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований Т. 2. М.: Наука, 1970. 327 с.
12. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
13. Александров В.М. Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102–108.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
15. Виленкин Н.Я., Горин Е.А., Костюченко А.Г. и др. Функциональный анализ. М.: Наука, 1964. 424 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
14.02.2000