МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 531:539.3

© 2000 г. **А.А. ЗЕЛЕНИНА, Л.М. ЗУБОВ**

КРИТЕРИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Сформулированы необходимые и достаточные условия потенциальности (консервативности) главного вектора и главного момента сил, действующих на абсолютно твердое тело и зависящих от положения тела. Приведены примеры использования полученного критерия консервативности.

Методы исследования устойчивости упругих систем существенно зависят от характера поведения внешних нагрузок в зависимости от деформации конструкции [1–3]. При потенциальных внешних силах, называемых также консервативными, устойчивость можно изучать статическим методом Эйлера, состоящим в определении возможных форм равновесия системы. Для обоснования статического подхода к исследованию упругой устойчивости необходимо располагать критерием консервативности внешних нагрузок. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия потенциальности главного вектора и главного момента сил, действующих на абсолютно твердое тело и зависящих от положения тела. Значение этой проблемы обусловлено тем, что в прикладных теориях упругой устойчивости в качестве нагрузки часто рассматриваются сосредоточенная сила и сосредоточенный момент, приложенные в некоторой точке упругой системы. Так например, исследуя устойчивость консольного упругого стержня, нагрузку принимают в виде силы и момента, приложенных к крайнему сечению стержня, которое характеризуется поступательным перемещением и поворотом, т.е. имеет степени свободы абсолютно твердого тела.

Положение твердого тела будем задавать при помощи вектора перемещения $\mathbf{u}$ полюса O и вектора конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$ [4] вокруг полюса O. Главный вектор и главный момент относительно точки O системы сил, действующих на тело, обозначим соответственно $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, определяется выражением [4]:

$$\delta^*\Pi = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u} + \eta\mathbf{M}\cdot(\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})\cdot\delta\boldsymbol{\theta}, \quad \eta = (1 + \tfrac{1}{4}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta})^{-1} \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор, $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\theta}$ – виртуальные изменения положения полюса и вектора конечного поворота. Предположим, что векторные величины $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ являются заданными функциями параметров $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\theta}$ и выясним те ограничения на эти функции, при которых внешние силы будут консервативны, т.е. линейная форма (1) будет полным дифференциалом некоторой скалярной функции $\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$, называемой потенциалом системы сил. Критерий консервативности можно записать как требование симметричности билинейной формы

$$\delta''\delta'\Pi = \delta'\delta''\Pi \tag{2}$$

для любых двух систем виртуальных изменений обобщенных координат $\delta'\mathbf{u}$, $\delta'\boldsymbol{\theta}$

и $\delta''\mathbf{u}$, $\delta''\boldsymbol{\theta}$. Согласно (1) билинейная форма $\delta''\delta'\Pi$ имеет вид

$$\delta''\delta'\Pi = \delta''\mathbf{F}\cdot\delta'\mathbf{u} + \eta\delta''\mathbf{M}\cdot(\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})\cdot\delta'\boldsymbol{\theta} + \delta''\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}\cdot\delta'\boldsymbol{\theta}$$

$$\delta''\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{u}}\cdot\delta''\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\cdot\delta''\boldsymbol{\theta}, \quad \delta''\mathbf{M} = \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{u}}\cdot\delta''\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\cdot\delta''\boldsymbol{\theta} \tag{3}$$

$$\mathbf{L} = -\tfrac{1}{2}\eta\mathbf{M}\times\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}\eta^2\boldsymbol{\theta}\otimes(\mathbf{M} + \tfrac{1}{2}\mathbf{M}\times\boldsymbol{\theta})$$

Выражение для $\delta'\delta''\Pi$ получается из (3) заменами $\delta'\mathbf{u} \rightleftarrows \delta''\mathbf{u}$, $\delta'\boldsymbol{\theta} \rightleftarrows \delta''\boldsymbol{\theta}$. С учетом (3) нетрудно показать, что равенство (2) будет справедливо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \eta\left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{u}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{u}}\right)^T \tag{4}$$

$$\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{u} = (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{u})^T \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^T \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} \equiv (\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})\cdot(\partial\mathbf{M}/\partial\boldsymbol{\theta} - \tfrac{1}{2}\eta\mathbf{M}\otimes\boldsymbol{\theta}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{M}\times\mathbf{E}$$

Тензорное уравнение (4) эквивалентно девяти скалярным соотношениям, а каждое из уравнений (5), (6) содержит по три независимых скалярных уравнения.

Условия (4) – (6) получены в предположении, что вариации обобщенных координат твердого тела могут принимать произвольные значения. Однако критерий консервативности (2) можно применять и при наличии связей, наложенных на возможные движения тела. В этом случае вариации $\delta'\mathbf{u}$, $\delta'\boldsymbol{\theta}$, $\delta''\mathbf{u}$, $\delta''\boldsymbol{\theta}$ будут подчинены некоторым линейным соотношениям, и число независимых условий потенциальности уменьшится по сравнению с (4) – (6).

Рассмотрим некоторые примеры приложения условий потенциальности (4) – (6). Пусть твердое тело нагружено сосредоточенной силой, приложенной в некоторой точке тела. Выбрав эту точку за полюс O, получим $\mathbf{M} \equiv 0$. Условие (4) будет выполнено только тогда, когда данная сила не зависит от поворота тела. Таким образом, зависящая от поворота, в частности, следящая сила неконсервативна. Этот факт хорошо известен в теории упругой устойчивости [1–3]. Вместе с тем, условие (4) не исключает зависимости главного вектора от поворотов тела, если имеется подходящая зависимость главного момента от поступательного перемещения.

Допустим теперь, что приложенная сила имеет постоянную величину и направление, а линия ее действия проходит через фиксированную точку пространства. Тогда при движении тела точка приложения силы будет перемещаться по нему. Поэтому, какая бы точка тела ни была принята за полюс, главный момент $\mathbf{M}$ будет зависеть от перемещения $\mathbf{u}$. Поскольку главный вектор $\mathbf{F}$ в данном случае постоянен, условие (4) очевидно нарушается. Следовательно, постоянная сила с фиксированной в пространстве линией действия неконсервативна.

Если тело имеет неподвижную точку, то $\mathbf{u} = 0$, и условия консервативности сводятся к уравнению (6), которое накладывает ограничение на функцию $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$. Как видно из (4) – (6), критерий потенциальности сил, действующих на твердое тело, сводится к уравнению (6) также и в том случае, когда $\mathbf{F} = 0$, а главный момент не зависит от поступательного перемещения $\mathbf{u}$.

При постоянном векторе момента $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = \mathrm{const}$ тензор $\boldsymbol{\Lambda}$ в (6) не может быть симметричным. Значит, постоянный момент неконсервативен. Неконсервативным является также и следящий момент, вектор которого жестко связан с вращающимся телом, т.е. описывается формулой

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}_0 \cdot (\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}) = \\ = \mathbf{M}_0 + \eta\boldsymbol{\theta}\times(\mathbf{M}_0 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{M}_0), \quad \mathbf{M}_0 = \text{const} \qquad (7)$$

Примером консервативной нагрузки может служить "полуследящий" момент

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \eta^{-1}\mathbf{M}_0 \cdot (\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta})^{-1} = \mathbf{M}_0 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{M}_0 + \tfrac{1}{2}(\mathbf{M}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} \qquad (8)$$

Условие консервативности (6) выполняется также для момента, задаваемого выражением $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = f(\theta)\boldsymbol{\theta}$, где $\theta = \sqrt{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}}$.

В ряде случаев достаточно располагать критерием консервативности только при малых поворотах, т.е. при $\theta \ll 1$. Для тела с неподвижной точкой условие (2) при малых поворотах на основании (3) принимает вид

$$\delta''\mathbf{M}\cdot\delta'\boldsymbol{\theta} - \tfrac{1}{2}\delta''\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{M}\times\delta'\boldsymbol{\theta}) = \delta'\mathbf{M}\cdot\delta''\boldsymbol{\theta} - \tfrac{1}{2}\delta'\boldsymbol{\theta}\cdot(\mathbf{M}\times\delta''\boldsymbol{\theta}) \qquad (9)$$

Критерий (9) получен в работе [5] способом, отличным от изложенного выше.

Аппроксимируя функцию $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ при малых поворотах выражением $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{N}_0\cdot\boldsymbol{\theta}$, где $\mathbf{N}_0$ – постоянный тензор, из (9) получим вместо (6):

$$\mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_0^T + \mathbf{M}_0\times\mathbf{E} = 0 \qquad (10)$$

Уравнению (10), выражающему собой критерий консервативности моментной нагрузки при малых поворотах, можно удовлетворить, положив, например

$$\mathbf{N}_0 = -\mathbf{M}_0\times\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{M}_0 = 0 \qquad (11)$$

где $\mathbf{k}$ – постоянный единичный вектор. Соотношению (11) соответствует такая зависимость момента от поворота тела

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + (\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}\times\mathbf{M}_0 \qquad (12)$$

Выражение (12) доставляет нетривиальный пример момента, консервативного при малых поворотах. При повороте тела вокруг вектора $\mathbf{k}$ этот момент ведет себя как следящий, а при повороте вокруг оси, ортогональной вектору $\mathbf{k}$, остается неизменным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. *Christoffersen J.* When is a moment conservative? // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1989. V. 56. № 2. P. 299–301.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 3.03.2000