

УДК 533.6.013.42

© 2000 г. И.Д. КАРПИНСКИЙ, Ю.А. УСТИНОВ

**О КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТАХ И МОДАХ
И ИХ ЗАТУХАНИИ В ПЛАСТИНЕ,
ЛЕЖАЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Математическая теория гармонических волн в полуограниченных телах типа слоя, цилиндра и теория колебания пластин, базирующиеся на трехмерных уравнениях теории упругости, имеет более вековую историю. Большой вклад в ее развитие внес И.И. Ворович [1–3] благодаря тонким исследованиям свойств дисперсионных множеств и связанных с этими свойствами таких проблем, как условия существования решений с конечной энергией, единственность решения и принципы его выбора и др. Большое внимание в этих исследованиях уделено резонансам полуограниченных тел. Эти исследования стимулировали, в частности, появление работ [4–8].

Как известно исследование распространения гармонических волн в полуограниченных телах и колебания пластин сводятся к спектральным задачам относительно пары параметров (k, ω) , где k – волновое число, ω – круговая частота. В большинстве работ, посвященных этой проблеме, как правило, оставался в стороне вопрос математического описания множества мод, соответствующих кратному волновому числу. Для обозначения частоты в таких случаях используются различные термины: критическая частота, частота запираения, частота отсечки, резонансная частота. В [2–3] на примере анизотропной поперечно неоднородной полосы И.И. Ворович показал, что критические моды могут иметь степенной рост, в [5, 8] этот результат обобщен на произвольные твердые волноводы с одной осью распространения нормальных волн. Однако до последнего времени вопрос математического описания критических мод для слоя и пластины оставался открытым.

Ниже дается полное описание различных множеств критических частот однородной пластины из идеально упругого материала и приводятся системы дифференциальных уравнений, которые описывают распределение амплитуд соответствующих критических мод. Вместе с этим рассматривается вопрос о затухании нормальных волн на критических частотах в пластине, лежащей на поверхности жидкости с учетом потерь на внутреннее трение в материале пластины. Затухание критических мод только за счет внутренних потерь исследовано в [9].

1. О критических частотах и модах. Будем рассматривать гармонические колебания упругой изотропной пластины $x, y \in S, -h \leq z \leq h$ ($2h$ – толщина пластины) с круговой частотой $\omega = 2\pi f$. Лицевые поверхности пластины свободны от напряжений

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \quad (1.1)$$

Если амплитуды смещений отыскивать в виде

$$\begin{aligned} u_x &= a_1(z)m_{1,x}(x, y) + a_3(z)m_{2,y}(x, y) \\ u_y &= a_1(z)m_{1,y}(x, y) - a_3(z)m_{2,x}(x, y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u_z = a_2(z)m_1(x, y)$$

$$\Delta m_\alpha + k^2 m_\alpha = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.3)$$

то после разделения переменных получаем две известные спектральные задачи: 1) относительно пары функций a_1, a_2 ; 2) относительно функции a_3 . Спектр первой задачи определяется корнями дисперсионного уравнения Рэлея – Лемба

$$F_p(\gamma, \Omega) = F_{ps}F_{pa} = 0 \quad (1.4)$$

$$F_{ps} = (\gamma^2 - q_2^2)^2 \cos q_1 \sin q_2 + 4q_1q_2\gamma^2 \cos q_2 \sin q_1$$

$$F_{pa} = (\gamma^2 - q_2^2)^2 \sin q_1 \cos q_2 + 4q_1q_2\gamma^2 \sin q_2 \cos q_1$$

$$q_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\Omega_1^2 - \gamma^2}, \quad q_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{2h}{\pi} k$$

$$\Omega_1 = \frac{\pi\omega h}{2V_l}, \quad \Omega = \frac{\pi\omega h}{2V_t}, \quad \theta = \frac{V_l}{V_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$$

где V_l, V_t – скорости продольных и поперечных волн, ν – коэффициент Пуассона, индексы "s", "a" означают, что выражение или величина относятся соответственно к симметричной и антисимметричной задачам, индексы $(x), (y)$ – дифференцирование по соответствующей переменной.

Каждому корню γ_p уравнения (1.4), если он простой, соответствует решение

$$u_{xp} = a_1(\zeta, \gamma_p) m_{p,x}(x, y), \quad u_{yp} = a_1(\zeta, \gamma_p) m_{p,y}(x, y) \quad (1.5)$$

$$u_{zp} = a_2(\zeta, \gamma_p) m_p(x, y), \quad \Delta m_p + k_p^2 m_p = 0$$

$$\zeta = z/h, \quad k_p = \pi\gamma_p/(2h)$$

которые назовем элементарными решениями 1-го рода.

Спектр второй задачи определяется корнями уравнения

$$F_v(\gamma, \Omega) = \sin q_2 \cos q_2 = 0 \quad (1.6)$$

Когда γ_v – простой корень уравнения (1.6), решение имеет вид

$$u_{xv} = a_{3v}(z) m_{v,x}(x, y), \quad u_{yv} = a_{3v}(z) m_{v,y}(x, y), \quad u_{zv} = 0 \quad (1.7)$$

$$\Delta m_v + k_v^2 m_v = 0$$

Назовем его элементарным решением 2-го рода.

В случае симметричной задачи

$$a_{s1}(\zeta, \gamma) = 2q_1q_2 \sin q_1 \cos(q_2\zeta) + (\gamma^2 - q_2^2) \sin q_2 \cos(q_1\zeta)$$

$$a_{s2}(\zeta, \gamma) = q_1[2\gamma^2 \sin q_1 \sin(q_2\zeta) - (\gamma^2 - q_2^2) \sin q_2 \sin(q_1\zeta)]$$

$$a_{s3}(\zeta, \gamma) = \cos(\beta_n \zeta)$$

$$\beta_n = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

В случае антисимметричной задачи

$$a_{a1}(\zeta, \gamma) = 2q_1q_2 \cos q_1 \sin(q_2\zeta) + (\gamma^2 - q_2^2) \cos q_2 \sin(q_1\zeta)$$

$$a_{a2}(\zeta, \gamma) = q_1[-2\gamma^2 \cos q_1 \cos(q_2\zeta) + (\gamma^2 - q_2^2) \cos q_2 \cos(q_1\zeta)]$$

$$a_{a3}(\zeta, \gamma) = \sin(\delta_n \zeta), \quad \delta_n = (2n-1)\pi/2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Хорошо известно [3, 8, 10, 11], что корни уравнений (1.4), (1.6) порождают множества дисперсионных кривых $\Omega = \Omega(\gamma)$, при этом вещественному значению Ω соответствует счетное множество корней каждого уравнения, среди которых всегда

существует конечное число вещественных, которые будем обозначать через α_r ($r = 1, \dots, N(\Omega)$).

Критическими принято называть такие значения частоты, при которых уравнение (1.4) или (1.6) имеют кратные корни. Соответствующее значение частотного параметра Ω обозначим через Ω_c . Кратное безразмерное волновое число γ_c будем называть критическим, (Ω_c, γ_c) – критической спектральной парой.

Дадим краткое описание множеств критических спектральных пар $(\Omega_c^{(j)}, \gamma_c^{(j)})$ ($j = 1, \dots, 5$) и соответствующих им критических элементарных решений.

1. $\Omega_c^{(1)} = \Omega_n^{(1)} = \theta n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\gamma_c^{(1)} = 0$ – двукратное собственное значение первой спектральной задачи. Соответствующее подмножество элементарных решений описывается следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u_{xc} &= \Phi_n m_{c,x}, & u_{yc} &= \Phi_n m_{c,y}, & u_{zc} &= \Psi_n m_c \\ d_p \Delta m_{pc}(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

При симметричных колебаниях ($n = 1, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \Psi_{ns} = \sin(\delta_n \zeta), & \Phi_n &= \Phi_{ns} = [(-1)^{n-1} 2 \cos(\theta \delta_n \zeta) / \sin(\theta \delta_n) - \theta \cos(\delta_n \zeta)] / (\theta \delta_n) \\ d_p &= d_n^{(1)} = -(1 + 8 \operatorname{ctg}(\theta \delta_n)) / (\theta^3 \delta_n) \end{aligned} \quad (1.9)$$

При антисимметричных колебаниях ($n = 2, 4, \dots$):

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \cos(\beta_n \zeta), & \Phi_n &= -[(-1)^n 2 \sin(\theta \beta_n \zeta) / \cos(\theta \beta_n) - \theta \sin(\beta_n \zeta)] / (\theta \beta_n) \\ d_p &= d_n^{(1)} = 1 - 8 \operatorname{tg}(\theta \beta_n) / (\theta^3 \beta_n) \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. $\Omega_c^{(2)} = \Omega_n^{(2)} = n$, $\gamma_c^{(2)} = 0$ – двукратное собственное значение как первой, так и второй спектральных задач. Соответствующее подмножество элементарных решений описывается следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u_{xc} &= \Psi_n b_x + g_n(b_{x,xx} + b_{y,xy}), & u_{yc} &= \Psi_n b_y + g_n(b_{x,xy} + b_{y,yy}) \\ u_{zc} &= \Phi_n(b_{x,x} + b_{y,y}) \\ (d_v - 1)(b_{x,xx} + b_{y,yy}) + \Delta b_x &= 0, & (d_v - 1)(b_{x,xy} + b_{y,yy}) + \Delta b_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

При симметричных колебаниях ($n = 2, 4, \dots$):

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \cos(\beta_n \zeta), & \Phi_n &= [2(-1)^{n-1} \sin(\beta_n \zeta / \theta) / \cos(\beta_n / \theta) - \theta \sin(\beta_n \zeta)] / (\theta \beta_n) \\ g_n &= -[4 \operatorname{tg}(\beta_n / \theta) \zeta \sin(\beta_n \zeta) + 2\theta(-1)^{n-1} \cos(\beta_n \zeta) / \cos(\beta_n / \theta)] / (\theta \beta_n^2) \\ d_v &= d_n^{(2)} = 1 - 8 \operatorname{tg}(\beta_n / \theta) / (\theta \beta_n) \end{aligned} \quad (1.12)$$

При антисимметричных колебаниях ($n = 1, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \sin(\delta_n \zeta), & \Phi_n &= [2(-1)^n \cos(\delta_n \zeta / \theta) / \sin(\delta_n / \theta) + \theta \cos(\delta_n \zeta)] / (\theta \delta_n) \\ d_v &= d_n^{(2)} = 1 + 8 \operatorname{ctg}(\delta_n / \theta) / (\theta \delta_n) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Замечание 1. Уравнения (1.11) по форме совпадают с уравнениями равновесия плоской теории упругости. Различие состоит в том, что в случае плоской деформации $d_v = \theta^2$.

Замечание 2. Можно показать, что $4d_n^{(\alpha)} / (\pi \Omega_n^{(\alpha)})^2 = -F_{,\gamma}(\theta, \Omega_n^{(\alpha)}) / F_{,\Omega}(\theta, \Omega_n^{(\alpha)})$ ($\alpha = 1, 2$) – кривизна дисперсионной кривой $\Omega_p = \Omega(\gamma_p)$ при $\gamma_p = \gamma_c^{(\alpha)} = 0$.

Описанные случаи являются типичными. Особые случаи возникают при определенных значениях коэффициента Пуассона.

3. Третий тип резонансных пар $(\gamma_c^{(3)}, \Omega_c^{(3)})$ (первый особый случай) определяется условиями $\Omega'(\gamma_c^{(3)}) = -F_{,y}(\gamma_c^{(3)}, \Omega_c^{(3)})/F_{,\Omega}(\gamma_c^{(3)}, \Omega_c^{(3)}) = 0$, $\gamma_c^{(3)} \neq 0$ – вещественный двукратный корень уравнения (1.4). Такие пары существуют на тех дисперсионных кривых, у которых $d_n^{(\alpha)} < 0$. Общий вид элементарного решения следующий

$$u_{xc} = a_{1c} m_{c,x} + a'_{1c} m'_{c,x}, \quad u_{yc} = a_{1c} m_{c,y} a'_{1c} + m'_{c,y}, \quad u_{zc} = a_{2c} m_c + a'_{2c} m'_c$$

$$a_{\alpha c} = a_{\alpha}(\zeta, \gamma_c^{(5)}), \quad a'_{\alpha c} = \alpha_{\alpha, \gamma}(\zeta, \gamma_c^{(5)})$$

$$\Delta m_c + k_c^2 m_c = 0, \quad \Delta m'_c + k_c^2 m'_c = -2k_c m_c, \quad k_c = \pi \gamma_c^{(5)} / (2h)$$

4. Четвертый тип резонансных пар (второй особый случай) определяется условиями $\Omega_c^{(4)} = \Omega_n^{(1)} = \Omega_q^{(2)}$ для целых n, q разной четности и удовлетворяющих условию $\sqrt{2} \leq \theta = q/n < \infty$ (эти неравенства вытекают из условий $0 \leq \nu < 1/2$). При выполнении указанных условий $d_n^{(1)}(d_q^{(2)})$ обращаются в бесконечность. Соответствующие значения коэффициента Пуассона можно вычислить по формуле $\nu_{qn} = 0,5(q^2 - 2n^2)/(q^2 - n^2)$. Каждому $\Omega_c^{(4)}$ соответствует пара элементарных решений. В симметричном случае

$$u_{xc} = u_{yc} = 0, \quad u_{zc} = \sin(\delta_n \zeta)$$

$$u_{xc} = b_x \cos(\beta_q \zeta), \quad u_{yc} = b_y \cos(\beta_q \zeta), \quad u_{zc} = 0, \quad b_{x,x} + b_{y,y} = 0$$

В антисимметричном случае

$$u_{xc} = u_{yc} = 0, \quad u_{zc} = \cos(\beta_n \zeta)$$

$$u_{xc} = b_x \sin(\delta_q \zeta), \quad u_{yc} = b_y \sin(\delta_q \zeta), \quad u_{zc} = 0, \quad b_{x,x} + b_{y,y} = 0$$

5. Пятый тип (третий особый случай) имеет место при значениях коэффициента Пуассона, удовлетворяющих одному из условий $d_n^{(\alpha)} = 0$ ($\alpha = 1, 2$). При выполнении этих условий $\Omega_c^{(5)} = \Omega_n^{(\alpha)}$, $F_{,\gamma}(\gamma_c^{(5)}, \Omega_c^{(5)}) = 0$, $\gamma_c^{(5)} = 0$ – четырехкратное собственное значение первой спектральной задачи. При $\alpha = 1$ для каждого значения n существует счетное множество особых значений коэффициента Пуассона $\gamma_{ns}^{(1)}$ ($s = 1, 2, \dots$), удовлетворяющих условию $d_n^{(1)} = 0$, с точкой сгущения $\nu = 0,5$. Так например, особыми будут следующие значения: $\nu_{11}^{(1)} = 0,4657$; $\nu_{12}^{(1)} = 0,4921$; $\nu_{21}^{(1)} = 0,3996$; $\nu_{22}^{(1)} = 0,4550$; $\nu_{31}^{(1)} = 0,3222$; $\nu_{32}^{(1)} = 0,4168$; $\nu_{41}^{(1)} = 0,2403$; $\nu_{11}^{(1)} = 0,3744$. Общий вид элементарных решений в этом случае следующий:

$$u_{xc} = \Phi_n m_{c,x} + \Phi_{n1} \Delta m_{c,x}, \quad u_{yc} = \Phi_n m_{c,y} + \Phi_{n1} \Delta m_{c,y}, \quad u_{zc} = \Psi_n m_c + \Psi_{n1} \Delta m_c$$

$$\Delta^2 m_{pc}(x, y) = 0 \tag{1.14}$$

Здесь Ψ_n, Φ_n те же, что и выше, Ψ_{n1}, Φ_{n1} определяются решениями следующих дифференциальных уравнений

$$\Psi''_{n1} + \lambda_n^2 \Psi_{n1} = -[(\theta^2 - 1)\Phi'_n + \Psi_n]/\theta^2, \quad \Phi''_{n1} + \theta^2 \lambda_n^2 \Phi_{n1} = -(\theta^2 - 1)\Psi'_n - \theta^2 \Phi_n$$

где $\lambda_n = \delta_n$ в симметричном случае, $\lambda_n = \beta_n$ – в антисимметричном случае.

При $\alpha = 2$ каждому значению n соответствует конечное число особых значений

$v_{ns}^{(2)}$, при этом множество $v_{21}^{(2)}$ пустое, а следующие четыре содержат только по одному значению: $v_{21}^{(2)} = 0,4521$; $v_{31}^{(2)} = 0,3201$; $v_{41}^{(2)} = 0,4772$; $v_{51}^{(2)} = 0,4275$.

Общий вид элементарных решений следующий:

$$\begin{aligned} u_{xc} &= \Psi_n b_x + g_n(b_{x,xx} + b_{y,xy}) + g_{n1}\Delta(b_{x,xx} + b_{y,xy}) \\ u_{yc} &= \Psi_n b_y + g_{n1}\Delta(b_{x,xy} + b_{y,yy}) \\ u_{zc} &= \Phi_n(b_{x,x} + b_{y,y}) + \phi_{n1}\Delta(b_{x,x} + b_{y,y}) \\ \Delta(b_{x,xx} + b_{y,xy}) &= 0, \quad \Delta(b_{x,xy} + b_{y,yy}) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь Ψ_n, Φ_n, g_n те же, что и выше, ϕ_{n1}, g_{n1} – решения следующих дифференциальных уравнений

$$\theta^2 \phi_{n1}'' + \lambda_n^2 \phi_{n1} = -(\theta^2 - 1)g_n' - \phi_n, \quad g_{n1}'' + \lambda_n^2 g_{n1} = -(\theta^2 - 1)\phi_n' + g_n$$

Замечание 3. Среди множества решений, описываемых соотношениями (1.8) и (1.11) можно выделить частные решения вида

$$m_{pc} = 1, \quad u_{xc} = 0, \quad u_{yc} = 0, \quad u_{zc} = \Psi_n \quad (1.16)$$

$$b_x = b_y = 1, \quad u_{xc} = u_{yc} = \Psi_n, \quad u_{zc} = 0 \quad (1.17)$$

которые являются собственными модами колебаний неограниченной пластины. Однако уравнения (1.8), (1.11), (1.14), (1.15) допускают и другие решения, в частности и такие, которые неограниченно растут при $x, y \rightarrow \infty$. Например, при $\Omega_c = \Omega_n^{(1)}$ помимо собственной моды (1.16), соотношениям (1.8) удовлетворяет присоединенная мода вида

$$m_{pc} = c_x x + c_y y, \quad u_{xc} = \Psi_n c_x, \quad u_{yc} = \Psi_n c_y, \quad u_{zc} = \Psi_n m_{pc}$$

где c_x, c_y – постоянные. Для неограниченной пластины такие решения не имеют физического смысла. Однако, насильственное требование ограниченности решения может привести к неразрешимости краевой задачи. Для одномерных волноводов эта проблема достаточно подробно исследована в [3, 5, 8]. В таких случаях учет потерь на внутреннее трение приводит к физически осмысленным решениям и для неограниченной пластины.

2. Коэффициенты затухания критических мод. Рассмотрим гармонические колебания пластины на поверхности акустической среды с плотностью ρ_0 и скоростью звука V_0 , занимающей полупространство $h \leq z < \infty$. Дисперсионное уравнение в этом случае можно представить в следующем виде

$$\Phi = q_0 F_p + i\varepsilon G_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$G_1 = -q_1 \Omega^4 [(\gamma^2 - q_2^2)^2 \sin(2q_2) \cos(2q_1) + 4q_1 q_2 \gamma^2 \sin(2q_1) \cos(2q_2)] / 4$$

$$q_0 = \sqrt{\Omega^2 - \vartheta_0^2 \gamma^2}, \quad \theta_0 = V_0 / V_t, \quad \varepsilon = \rho_0 V_0 / \rho V_t$$

Будем учитывать два фактора, приводящих к потерям звуковой энергии. А именно, потери на излучение в акустическую среду и диссипативные потери в материале пластины. Учет влияния первого фактора связан со вторым слагаемым в уравнении (2.1), учет влияния второго фактора осуществим, полагая

$$k_l^0 = k_l(1 + i\varepsilon_l), \quad k_t^0 = k_t(1 + i\varepsilon_t) \quad (2.2)$$

где k_l^0, k_t^0 – волновые числа продольных и поперечных волн материала пластины,

$c_l = k_l \varepsilon_l$, $c_r = k_r \varepsilon_r$ – их коэффициенты затухания. Соотношения (2.2) приводят к заменам в выражениях (1.4), (1.6), (2.1) Ω на $\Omega(1 + i\varepsilon_l)$ и Ω_1 на $\Omega_1(1 + i\varepsilon_r)$.

Обратимся теперь к исследованию корней уравнения (2.1) в предположении, что ε_l , ε_r , ε малые величины. Положим $\varepsilon_l = g_l \varepsilon$, $\varepsilon_r = g_r \varepsilon$ и разложим левую часть уравнения в ряд по γ и ε в окрестности $\gamma = \gamma_0$, $\Omega = \Omega_0$, $\varepsilon = 0$, где (γ_0, Ω_0) – спектральная пара, удовлетворяющая уравнению (1.4) (или (1.6)). Получим

$$(\gamma - \gamma_0)F_{p,\gamma}(\gamma_0, \Omega_0, 0) + 0,5(\gamma - \gamma_0)^2 F_{p,\gamma\gamma}(\gamma_0, \Omega_0, 0) + \varepsilon \Phi_{,\varepsilon}(\gamma_0, \Omega_0, 0) + \dots = 0. \quad (2.3)$$

Если $\Omega_0 \neq \Omega_c$, то в первом приближении получаем

$$\gamma = \gamma_0 - \varepsilon w_0, \quad w_0 = \Phi_{,\varepsilon}(\gamma_0, \Omega_0, 0) / F_{p,\gamma}(\gamma_0, \Omega_0, 0) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4)$$

Если $\Omega_0 = \Omega_c$, то $F_{p,\gamma}(\gamma_c, \Omega_c, 0) = 0$, и из (2.3) вытекает, что если $F_{p,\gamma\gamma}(\gamma_0, \Omega_0, 0) \neq 0$, то в окрестности критической пары уравнение (2.1) имеет два корня, которые для первых трех типов критических пар при малых значениях ε определяются по следующим приближенным формулам

$$\gamma_c^\pm = \gamma_c + \varepsilon^{1/2} w_1(1 \pm i) + O(\varepsilon) \quad (2.5)$$

$$w_1 = \left(\Phi_{,\varepsilon}(\gamma_c, \Omega_c, 0) / F_{p,\gamma\gamma}(\gamma_c, \Omega_c, 0) \right)^{1/2}$$

Подчеркнем, что в силу вещественности γ_c $\text{Im}(\gamma_c^+) > 0$, $\text{Im}(\gamma_c^-) < 0$.

Особенно простой вид формулы (2.5) принимает для критических пар первых двух типов. В этих случаях при $\gamma_c = 0$, $\Omega_c = \Omega_n^{(1)} = n\theta$:

$$w_1 = w_{1n}^{(1)} = \left| (g_l \pi^2 \theta^2 n^2 - 0,5\pi\theta n) / d_n^{(1)} \right|^{1/2} \quad (2.6)$$

При $\gamma_c = 0$, $\Omega_c = \Omega_n^{(2)} = n$:

$$w_1 = w_{1n}^{(1)} = \pi n \left| g_l / d_n^{(2)} \right|^{1/2} \quad (2.7)$$

В (2.6), (2.7) $d_n^{(1)}$, $d_n^{(2)}$ определяются формулами (1.9), (1.10), (1.12), (1.13). Соответствующие коэффициенты затухания в (дБ/г) имеют вид

$$c = c_n^{(1)} = 8,68 \sqrt{\frac{\varepsilon_l \pi^2 \theta^2 n^2 - 0,5\varepsilon_l \pi \theta n}{d_n^{(1)}}}, \quad c = c_n^{(2)} = 8,68 \sqrt{\frac{\varepsilon_l \pi^2 n^2}{d_n^{(2)}}}$$

В случае критической частоты четвертого типа $\Phi_{,\varepsilon}(0, \Omega_c, 0) = 0$ и пара корней в первом приближении определяется выражениями

$$\gamma_c^\pm = \pm \varepsilon \sqrt{w_2} + O(\varepsilon^2), \quad w_2 = -\Phi_{,\varepsilon\varepsilon}(0, \Omega_c^{(4)}, 0) / F_{p,\gamma\gamma}(0, \Omega_c^{(4)}, 0)$$

При симметричных колебаниях $w_2 = -(\Omega_c^{(4)})^3 (g_l - 2g_l g_r \Omega_c^{(4)}) / 8$. При антисимметричных колебаниях $w_2 = (\Omega_c^{(4)})^3 (g_l + 2g_l g_r \Omega_c^{(4)}) / 8$.

В случае критической частоты пятого типа $F_{p,\gamma\gamma}(0, \Omega_c^{(5)}, 0) = 0$ и в первом приближении уравнение разветвления принимает вид

$$\gamma^4 F_{p,\gamma\gamma\gamma}(0, \Omega_c^{(5)}, 0) / 24 + \varepsilon \Phi_{,\varepsilon}(0, \Omega_c^{(5)}, 0) + \dots = 0$$

Из этого уравнения вытекает существование четырех корней в окрестности $\gamma_c = 0$,

которые приближенно можно вычислить по формуле

$$\gamma_{cn} = \varepsilon^{1/4} |w_3|^{1/4} e^{\pm i\pi(4n+1)/8} + O(\varepsilon^{1/4})$$

$$w_3 = 24\Phi_{,\varepsilon}(0, \Omega_c^{(5)}, 0) / F_{p,\gamma\gamma\gamma}(0, \Omega_c^{(5)}, 0) \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

Здесь в показателях экспоненты (+), если $iw_1 < 0$ и (-), если $iw_1 > 0$.

Коэффициент затухания c нормальной волны с волновым числом $k = h^{-1}\gamma$ определим равенством

$$c = h^{-1} |\operatorname{Im} \gamma| (\operatorname{Im} \gamma / h) = 8,686h^{-1} |\operatorname{Im} \gamma| (\operatorname{дБ} / h)$$

Из приведенных выше формул вытекает:

1). Если спектральная пара (Ω_0, γ_0) не является критической и γ_0 – вещественный корень, то коэффициент затухания имеет порядок $O(\varepsilon)$ и может вычисляться по формуле (2.4) (аналогичный результат, изложенный в другой форме, получен в работах [12–14]). Соответствующие моды будем называть квазиоднородными.

2). Если критическая спектральная пара принадлежит к одному из первых трех типов, то коэффициент затухания имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$, при этом коэффициенты затухания мод второго типа определяются только внутренними потерями поперечных волн и не зависят от потерь на излучение, что естественно, поскольку, на основании (1.17), нормальные составляющие скоростей точек контактной поверхности слоя и жидкости для этих мод равны нулю.

Замечание 4. Формулы (2.6), (2.7) не применимы в окрестности тех значений ν , когда числители или знаменатели в подкоренных выражениях обращаются в нуль, т.е. когда частота является критической частотой четвертого или пятого типов соответственно.

3). Коэффициент затухания критической моды четвертого типа имеет порядок не ниже $O(\varepsilon)$.

4). Коэффициент затухания критических мод пятого типа имеет порядок $O(\varepsilon^{1/4})$.

Качественный анализ дополним результатами численных исследований, чтобы, в частности, иметь представление о точности приведенных выше приближенных формул. Приведем результаты расчетов, которые проводились для пластины с параметрами $V_l = 3209$ м/с, $\rho = 7850$ кг/м³, $\nu = 0,29$, $h = 1$ мм, $\varepsilon_l = 0,0015$, $\varepsilon_l = 0,0018$ и жидкости с параметрами $V_0 = 1500$ м/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м³, при этом $\varepsilon = 0,05955$.

Критическими являются следующие пары: $(\Omega_1^{(1)} = 1,838, \gamma_c^{(1)} = 0)$, $(\Omega_1^{(2)} = 1, \gamma_c^{(2)} = 0)$, $(\Omega_1^{(3)} = 1,716, \gamma_c^{(3)} = 0,8472)$ ($f_1^{(1)} = 1475$ кГц, $f_1^{(2)} = 802$ кГц, $f_1^{(3)} = 1376$ кГц).

Остановимся на описании отдельных фрагментов, связанных главным образом с критическими спектральными парами.

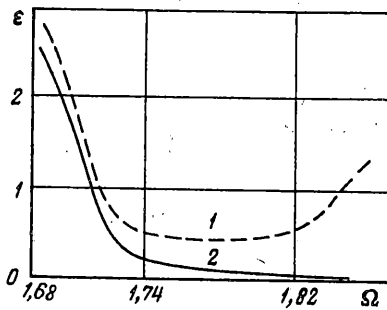
Волновые числа, возникающие в результате ветвления критических волновых чисел, назовем квазикритическими.

Замечание 5. Множество корней уравнения (2.1) симметрично, т.е. каждому корню γ^+ ($\operatorname{Im} \gamma^+ > 0$) соответствует корень γ^- ($\operatorname{Im} \gamma^- < 0$). Поэтому все результаты ниже приводятся для корней, расположенных в верхней полуплоскости.

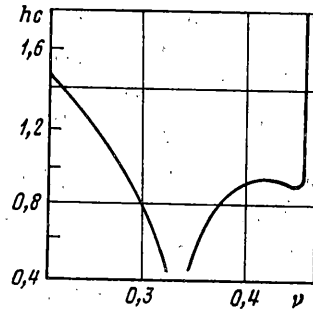
Численные значения квазикритического волнового числа ($\varepsilon \neq 0$) для $\Omega_1^{(1)}$: точное значение $\gamma_c^+ = 0,09843 + 0,09853i$, по формуле (2.4) $\gamma_c^+ = 0,09848 + 0,09848i$, точное значение при $\varepsilon_l = 0$, $\gamma_c^+ = 0,1070 + 0,1097i$, по формуле (2.4) при $\varepsilon_l = 0$, $\gamma_{c1}^+ = 0,1082 + 0,1082i$.

Значения квазикритических волновых чисел для $\Omega_1^{(3)}$

$$\gamma_{c1}^+ = 0,9446 + 0,0887i, \quad \gamma_{c2}^+ = 0,75004 + 0,1066i$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1 дает представление о резком изменении коэффициентов затухания в окрестности критических частот $\Omega_1^{(3)}$, $\Omega_1^{(1)}$ (в дБ/г). Кривая 1 проходит через точки $(\Omega_1^{(3)}; 8,68 \text{ Im}(\gamma_{c1}^+))$ и $(\Omega_1^{(1)}; 8,68 \text{ Im}(\gamma_c^+))$, кривая 2 – через точку $(\Omega_1^{(3)}; 8,68 \text{ Im}(\gamma_{c2}^{(3)+}))$.

При $\Omega = \Omega_1^{(1)}$, $\epsilon = 0$ уравнение (1.4) имеет четыре пары вещественных некритических корней $(\alpha_k, -\alpha_k)$ со значениями $\alpha_1 = 1,3661$, $\alpha_2 = 1,4837$, $\alpha_3 = 2,7012$, $\alpha_4 = 3,2535$, которые при выбранных значениях ϵ и ϵ_1 в результате возмущения принимают следующие значения: $\gamma_{11}^+ = 1,365 + i 0,001723$, $\gamma_{21}^+ = 1,4838 + i 0,01043$, $\gamma_{31}^+ = -2,694 + i 0,02792$, $\gamma_{41}^+ = 3,2544 + i 0,02161$.

Как видно, коэффициенты затухания квазиоднородных мод на порядок меньше коэффициентов затухания критических мод, в силу чего первые затухают значительно слабее вторых.

На фиг. 2 изображена зависимость hc (дБ) от коэффициента Пуассона ν на отрезках $0,2 \leq \nu \leq 0,3233$; $0,3433 \leq \nu \leq 0,46$. Значения $\nu = \nu_{21} = 1/3$, $\nu = \nu_{11}^{(1)} = 0,4657$ – являются особыми. В первом случае $\Omega_1^{(4)} = 2$ ($f_1^{(4)} = 1604$ кГц); $\gamma_c^{(4)+} = 0,01675 + 5,8 \cdot 10^{-5}i$; $hc = 5,04 \cdot 10^{-4}$ (дБ), во втором $-\Omega_1^{(5)} = 3,9474$ ($f_1^{(5)} = 3167$ кГц); $\gamma_{c1}^{(5)+} = 0,20 + 0,3306i$; $hc_1 = 2,87$ (дБ); $\gamma_{c2}^{(5)+} = 0,2768 + 0,08383i$; $hc_2 = 0,728$ (дБ).

В целом проведенный численный анализ хорошо согласуется с качественным, а полученные аналитические формулы вполне достаточны для практических расчетов.

Ярко выраженное затухание критических мод, у которых при $\epsilon = 0$, $\Omega'(\gamma_c) = 0$ (групповая скорость равна нулю), позволяет рассматривать задачу о локализации колебаний подобно тому, как это осуществлено в [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
2. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
3. Ворович И.И., Бабишко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Распространение волн в поперечно-неоднородных пьезоактивных волноводах // Акуст. ж. 1985. Т. 31. № 3. С. 314–319.
5. Гетман И.П., Устинов Ю.А. О потоке энергии при резонансах полуграниченных тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 2. С. 309–312.

6. Гетман И.П., Устинов Ю.А. О распространении волн в упругом продольно-неоднородном цилиндре // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 103–108.
7. Устинов Ю.А. О принципах выбора единственного решения для полуограниченных тел на критических частотах // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 87–93.
8. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Математическая теория твердых нерегулярных волноводов. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1993. 144 с.
9. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О затухании волн Лэмба в окрестности критических частот и локализация колебаний в слое. // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 333–334.
10. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах // Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 1. Методы и приборы ультразвув. исслед. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 140–203.
11. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наук. думка, 1981. 283 с.
12. Жарков К.В., Меркулов Л.Г., Пигулевский Е.Д. Затухание нормальных волн в пластине со свободными границами // Акуст. ж. 1964. Т. 10. Вып. 2. С. 163–166.
13. Меркулов Л.Г. Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости // Акуст. ж. 1964. Т. 10. Вып. 2. С. 206–212.
14. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
15.02.2000