МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. Г.К. БАРАНОВСКИЙ, И.Г. КАДОМЦЕВ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОЗАКРЕПЛЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Определение собственных частот колебаний прямоугольной пластины жесткозакрепленной по всему контуру представляет значительный интерес и до сих пор находились приближенно. С достаточной точностью это было сделано в работах С. Игуши [1]. В [1] предложена система функций точно удовлетворяющих граничным условиям, но не ортогональным. Для нахождения частот в [1] используется метод Ритца. Решением статических задач жесткозакрепленного контура занимался Тимошенко С.П. [2]. Решение Тимошенко основано на сведении решения задачи шарнирного опирания с ненулевыми моментами на краях пластины к задаче жесткого закрепления по всему контуру. Йенгар К. и Нарасимхан К. в [3] предложили решение статической задачи жесткозакрепленной пластины, основанное на использовании нормальных форм колебаний для балок, защемленных по краям. Функции и их четвертые производные ортогональны на отрезке [–1, 1]. Вторые производные от этих функций раскладываются в ряд по этим функциям. Метод хорошо работает для задач устойчивости и может быть применим для нахождения собственных частот колебаний пластины. Голоскоков П.Г. в [4] для решения бигармонического уравнения жесткозакрепленной по контуру пластины предложил использовать ортогональные полиномы Якоби. В [4] показан рекуррентный метод нахождения этих полиномов. В.М. Даревский [5] предложил новый метод решения статических задач для жесткозакрепленной прямоугольной пластины, лежащей на основании Винклера. Функции получены комбинированием степенных и тригонометрических функций. Видно, что данный метод может быть применен для решения динамических задач с жесткозакрепленными по контуру прямоугольными пластинами. Однако, кроме решения бесконечной системы, для этого потребуется обратное численное преобразование Лапласа; ясно, что данный метод решения громоздкий и практически трудно применим. С.А. Лурье [6], применил метод однородных решений и условия обобщенной ортогональности для функций П.Ф. Папковича, построил точное решение (в рядах) статической задачи изгиба защемленной по контуру прямоугольной пластины.

Задача нахождения собственных частот для жесткозакрепленной пластины может также быть решена методами граничного и конечного элементов. В настоящей работе показано построение трех ортонормированных базисных систем функций, удовлетворяющих граничным условиям на контуре пластины. Изменяя скалярное произведение за счет весовой функции, не влияющей на граничные условия, эти множества можно существенно расширить. Для трех ортонормированных систем найдены оптимальные значения эллиптического модуля в смысле наилучшего асимптотического приближения. Найдена аналитическая формула для собственных частот пластины. Отмечается хорошее совпадение частот, найденных по этой формуле, с решением системы.

Начало декартовой прямоугольной системы координат $OXYZ$ совпадает с одним из углов пластины; E, ν – модули Юнга и коэффициенты Пуассона пластины. Перемещение $W(x, y, \zeta)$ определяется из уравнения движения пластины

$$D\Delta^2 W = -\rho h W_{\zeta\zeta}, \quad D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$$

$$W_\zeta(x, y, 0) = W(x, y, 0) = 0, \quad \partial W/\partial \mathbf{n}|_{\partial\chi} = W|_{\partial\chi} = 0 \tag{1}$$

где $\chi = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$, ρ – плотность материала пластины, h – толщина пластины. Проведем преобразование координат

$$\tilde{\chi} = \{0 \leqslant \xi \leqslant 1, 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}, \quad y = a\eta / \lambda, \quad x = \xi a$$

$$\mu^2 = \rho h a^4 / D, \quad \lambda = a / b, \quad \zeta = a^2 \mu \tau \tag{2}$$

Тогда (1) примет вид

$$\Delta^2 W = -W_{\tau\tau}$$

$$W_\tau |_{\tau=0} = W|_{\tau=0} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} |\partial\tilde{\chi} = W | \partial\tilde{\chi} = 0 \tag{3}$$

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$W(\xi,\ \eta,\ \tau) = U(\xi,\ \eta)(C_1 \cos(\tau\omega) + C_2 \sin(\tau\omega)) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), имеем

$$\Delta^2 U = \omega^2 U, \quad \partial U / \partial \mathbf{n} |_{\partial\tilde{\chi}} = U|_{\partial\tilde{\chi}} = 0 \tag{5}$$

Решение (5) ищем в виде двойного ряда Фурье по ξ и η:

$$U(\xi,\ \eta) = \sum_{m,n=2}^{\infty} A_{m,n} u_m(\xi) u_n(\eta) \tag{6}$$

Функции $u_m(\xi)$ нужно подобрать так, чтобы они были полной системой и удовлетворяли граничным условиям. Можно показать, что эти функции могут выражаться через многочлены Гегенбауэра. Запишем условие ортогональности для многочленов Гегенбауэра [7], [8]:

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\upsilon}(x) C_r^{\upsilon}(x)(1 - x^2)^{(\upsilon - 1/2)} dx = 0, \quad n \neq r \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{1} (C_n^{\upsilon}(x))^2 (1 - x^2)^{(\upsilon - 1/2)} dx = \frac{2^{(1-2\upsilon)} \pi \Gamma(n + 2\upsilon)}{n!(\upsilon + n)(\Gamma(\upsilon))^2} \tag{8}$$

где $C_n^{\upsilon}(x)$ – полиномы Гегенбауэра [5], [7], [8]. Проведем замену $x = \mathrm{cn}^{\alpha}(2K\xi)\mathrm{dn}^{\beta}(2K\xi)\mathrm{sn}^{\theta}(2K\xi)$, где $K = K(k)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода, k – эллиптический модуль; $\mathrm{cn}(2K\xi)$, $\mathrm{sn}(2K\xi)$, $\mathrm{dn}(2K\xi)$ – эллиптические функции Якоби.

Рассмотрим четыре случая:

$$\begin{aligned}
&1)\ \alpha = 1,\ \ \beta = 0,\ \ \theta = 0,\ \ 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \\
&2)\ \alpha = 1,\ \ \beta = -1,\ \ \theta = 0,\ \ 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \\
&3)\ \alpha = 0,\ \ \beta = 0,\ \ \theta = 1,\ \ -1/2 \leqslant \xi \leqslant 1/2 \\
&4)\ \alpha = 1,\ \ \beta = 0,\ \ \theta = 0,\ \ 0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ k = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Для всех случаев $\upsilon = 2$, $n = m - 2$ (отметим, что случай 4 является вырождением случая 1 при $k = 0$).

1. Функции $u_m(\xi)$ выражаются через многочлены Гегенбауэра следующим образом:

$$u_m(\xi) = \sqrt{\frac{16K}{\pi(m^2 - 1)}} \mathrm{sn}^2(2\xi K) \mathrm{dn}^{1/2 - q/2}(2\xi K) C_{m-2}^2(\mathrm{cn}(2\xi K)) \tag{10}$$

2. Имеем

$$u_m(\xi)=\sqrt{\frac{16K(1-k^2)^{5/2}}{\pi(m^2-1)}}\;\frac{\mathrm{sn}^2(2\xi K)}{\mathrm{dn}^{5/2+q/2}(2\xi K)}C_{m-2}^2\left(\frac{\mathrm{cn}(2\xi K)}{\mathrm{dn}(2\xi K)}\right) \tag{11}$$

3. В этом случае

$$u_m(\xi)=\sqrt{\frac{16K}{\pi(m^2-1)}}\,\mathrm{cn}^2(2\xi K)\,\mathrm{dn}^{1/2-q/2}(2\xi K)C_{m-2}^2(\mathrm{sn}(2\xi K)) \tag{12}$$

4. Имеем

$$u_m(\xi)=\sqrt{8/(m^2-1)}\sin^2(\pi\xi)C_{m-2}^2(\cos(\pi\xi)) \tag{13}$$

Итак, функция $u_m(\xi)$ ортонормирована на указанных отрезках с весом $\mathrm{dn}^q(2K\xi)$, q – любое действительное число.

Используя формулу N22.3.12 в [7], легко получить новое представление для функции $u_m(\xi)$:

$$u_m(\xi)=\sqrt{\frac{8}{m^2-1}}\sin^2(\pi\xi)\sum_{k=1}^{m-1}(k(m-k)\cos(\pi(m-2k)\xi)) \tag{14}$$

которое можно упростить

$$u_m(\xi)=\sqrt{\frac{8}{m^2-1}}\left(\frac{\sin((m+1)\pi\xi)}{2\sin(\pi\xi)}-\frac{m+1}{2}\cos(\pi\xi m)\right) \tag{15}$$

Подставим (6) в (5). Затем, умножив полученное выражение на $u_m(\xi)$ и $u_n(\eta)$ и проинтегрировав по области $\tilde{\chi}$, с весом равным 1, то есть при $q = 0$, получим

$$B_{m,n}-\omega_{m,n}^2=0 \tag{16}$$

$$B_{m,n}=2\lambda^2\sum_{r,k=2}^{\infty}A_{r,k}\int_0^1 u_k^{\mathrm{II}}(\eta)u_n(\eta)d\eta\int_0^1 u_r^{\mathrm{II}}(\xi)u_m(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{r=2}^{\infty}A_{r,n}\int_0^1 u_r^{\mathrm{IV}}(\xi)u_m(\xi)d\xi+\lambda^4\sum_{k=2}^{\infty}A_{m,k}\int_0^1 u_k^{\mathrm{IV}}(\eta)u_n(\eta)d\eta \tag{17}$$

Используя граничные условия жесткого закрепления и интегрируя два раза по частям, имеем

$$\int_0^1(u_r^{\mathrm{IV}}(\xi)u_m(\xi))d\xi=\int_0^1(u_r^{\mathrm{II}}(\xi)u_m^{\mathrm{II}}(\xi))d\xi \tag{18}$$

Обозначим

$$\Phi_{m,r}=\int_0^1 u_m^{\mathrm{II}}(\xi)u_r(\xi)d\xi,\quad \Psi_{m,r}=\int_0^1 u_m^{\mathrm{II}}(\xi)u_r^{\mathrm{II}}(\xi)d\xi \tag{19}$$

Легко видеть, что $\Phi_{m,r}=\Phi_{r,m}$ и $\Psi_{m,r}=\Psi_{r,m}$; если $(m + r)$ – нечетно, то $\Phi_{m,r}=0$, $\Psi_{m,r}=0$ (для всех случаев (9)). То же справедливо и для индексов n и k. В результате получили бесконечную систему уравнений для определения $A_{i,j}$ ($i, j = 2, \ldots, \infty$) с коэффициентами $g_{i,j}$. Если урезать эту систему, ограничившись l уравнениями с l

неизвестными, то коэффициенты $g_{i,j}$ определяются так:

$$g_{i,j}=\begin{cases}2\Phi_{r,m}\Phi_{k,n}\lambda^2 \ \ (m\neq r,\ \ n\neq k)\\ 2\Phi_{r,m}\Phi_{k,n}\lambda^2+\Psi_{k,n}\lambda^4(m=r,\ \ n\neq k)\\ 2\Phi_{r,m}\Phi_{k,n}\lambda^2+\Psi_{m,r}\ \ (m\neq r,\ \ n=k)\\ 2\Phi_{r,m}\Phi_{k,n}\lambda^2+\Psi_{m,r}+\Psi_{n,k}\lambda^4+\omega^2\ \ (m=r,\ \ n=k)\end{cases} \tag{20}$$

$$j=(m-2)l+(n-1),\quad i=(r-2)l+(k-1)$$

$$m=2..l+1,\quad n=2..l+1,\quad r=2..l+1,\quad k=2..l+1$$

где l – порядок приближения двойного ряда, в данном случае l = 3. Рассмотрим подробно случай 4. По свойствам многочленов Гегенбауэра [7], [8] имеем

$$d^2u_m(\xi)/d\xi^2+\pi^2(-m^2+2/\sin^2(\pi\xi))u_m(\xi)=0 \tag{21}$$

Используя (18), (29) и (21), из (17), получим

$$\begin{aligned}B_{m,n}/\pi^4=&\sum_{r=2}^{\infty}A_{r,n}\int_0^1\left(r^4-(m^2+r^2)\frac{2}{\sin^2(\pi\xi)}+\frac{4}{\sin^4(\pi\xi)}\right)u_r(\xi)u_m(\xi)d\xi+\\ &+2\lambda^2\sum_{r,k=2}^{\infty}A_{r,k}\int_0^1(-k^2+2/\sin^2(\pi\eta))u_n(\eta)u_k(\eta))d\eta\times\\ &\times\int_0^1(-r^2+2/\sin^2(\pi\xi))u_m(\xi)u_r(\xi)d\xi+\\ &+\lambda^4\sum_{k=2}^{\infty}A_{m,k}\int_0^1\left(k^4-(n^2+k^2)\frac{2}{\sin^2(\pi\eta)}+\frac{4}{\sin^4(\pi\eta)}\right)u_n(\eta)u_k(\eta)d\eta\end{aligned} \tag{22}$$

В (22) приходится вычислять два типа интегралов

$$I_{m,r}=\int_0^1\frac{u_m(\xi)u_r(\xi)}{\sin^2(\pi\xi)}d\xi,\quad Y_{m,r}=\int_0^1\frac{u_m(\xi)u_r(\xi)}{\sin^4(\eta\xi)}d\xi \tag{23}$$

Для индексов n и k получим соответственно $I_{n,k}$ и $Y_{n,k}$. Видно, что $I_{n,k}=I_{k,n}$, $Y_{n,k}=$ $=Y_{k,n}$, то же справедливо для индексов m, r:

$$I_{r,m}=\begin{cases}5\delta_m^r\ \ (m>r)\\ \dfrac{2r}{3}\ \ (m=r)\\ 5\delta_r^m\ \ (r>m)\end{cases},\quad Y_{r,m}=\begin{cases}\delta_m^r(5m^2-r^2+4)/2\ \ (m>r)\\ 4r(r^2+1)/15\ \ (m=r)\\ \delta_r^m(5r^2-m^2+4)/2\ \ (r>m)\end{cases} \tag{24}$$

$$\delta_r^m=m\sqrt{(m^2-1)/(r^2-1)}(1+(-1)^{(m+r)})/15$$

Теперь (22) примет вид

$$\begin{aligned}B_{m,n}/\pi^4=&\sum_{r=2}^{\infty}A_{r,n}(-4\delta_m^r(3r^2-1)\phi_1^m(r)+\\ &+\delta_m^m(15m^3-24m^2+16)\phi_2^m(r)-8\delta_r^m(3m^2-2)\phi_3^m(r))+\\ &+\sum_{r,k=2}^{\infty}A_{r,k}100(\delta_m^r\phi_1^m(r)+(-0,75m+1)\delta_m^m\phi_2^m(r)+\delta_r^m\phi_3^m(r))\times\\ &\times\lambda^2(\delta_n^k\phi_1^n(k)+(-0,75n+1)\delta_n^n\phi_2^n(k)+\delta_k^n(\phi_3^nk))+\lambda^4\sum_{k=2}^{\infty}A_{m,k}(-4\delta_n^k(3k^2-1)\phi_1^n(k)+\end{aligned} \tag{25}$$

$$+\delta_n^n(15n^3-24n^2+16)\phi_2^n(k)-8\delta_k^n(3n^2-2)\phi_3^n(k))$$

$$\phi_1^m(r)=\begin{cases}1 & (r<m)\\ 0 & (r\geqslant m)\end{cases},\quad \phi_2^m(r)=\begin{cases}1 & (r=m)\\ 0 & (r\neq m)\end{cases} \tag{26}$$

$$\phi_3^m(r)=\begin{cases}1 & (r>m)\\ 0 & (r\leqslant m)\end{cases} \tag{27}$$

В этих обозначениях (20) имеет вид

$$g_{i,j}=\begin{cases}4I_{r,m}I_{k,n}\lambda^2 \quad (m\neq r,\ n\neq k)\\ (4I_{m,m}-2m^2-k^2-n^2)I_{k,n}\lambda^2+2Y_{k,n} \quad (m=r,\ n\neq k)\\ (4I_{n,n}\lambda^2-2n^2-r^2-m^2)I_{r,m}+2Y_{r,m} \quad (m\neq r,\ n=k)\\ 2(2I_{m,m}I_{n,n}\lambda^2+(Y_{m,m}+Y_{n,n}\lambda^4)-(n^2+m^2)(I_{n,n}\lambda^2+I_{m,m}))+\\ +(m^2+n^2)^2/2-\omega^2/(2(\pi)^4) \quad (m=r,\ n=k)\end{cases} \tag{28}$$

$$j=(m-2)l+(n-1),\quad i=(r-2)l+(k-1)$$

$$m=2..l+1,\quad n=2..l+1,\quad r=2..l+1,\quad k=2..l+1$$

где l – порядок приближения двойного ряда. В случае $l=3$ имеем

$$g_{i,j}=\left\|\begin{matrix} g_{1,1} & 0 & g_{1,3} & 0 & 0 & 0 & g_{1,3} & 0 & g_{1,9}\\ 0 & g_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{2,8} & 0\\ g_{1,3} & 0 & g_{3,3} & 0 & 0 & 0 & g_{1,9} & 0 & g_{3,9}\\ 0 & 0 & 0 & g_{2,2} & 0 & g_{2,8} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & g_{2,8} & 0 & g_{6,6} & 0 & 0 & 0\\ g_{1,3} & 0 & g_{1,9} & 0 & 0 & 0 & g_{3,3} & 0 & g_{3,9}\\ 0 & g_{2,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{6,6} & 0\\ g_{1,9} & 0 & g_{3,9} & 0 & 0 & 0 & g_{3,9} & 0 & g_{9,9}\end{matrix}\right\| \tag{29}$$

Для нахождения собственных частот получим уравнение, приравняв определитель матрицы (29) к нулю. Его можно преобразовать к виду:

$$|g_{i,j}|=\begin{vmatrix}E_{1,1} & 0 & E_{1,3}\\ 0 & E_{2,2} & 0\\ E_{1,3} & 0 & E_{3,3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_{2,2} & 0 & 0\\ 0 & E_{1,1} & E_{1,3}\\ 0 & E_{1,3} & E_{3,3}\end{vmatrix}=0 \tag{30}$$

Здесь $E_{s,t}=\left|E_{\frac{(i+2)}{3},\frac{(j+2)}{3}}\right|$, где s, t – целая часть индексов

$$\left|E_{\frac{(i+2)}{3},\frac{(j+2)}{3}}\right|=g_{i+1,\ j+1}(g_{i+2,j+2}g_{i,j}-(g_{i,j+2})^2) \tag{31}$$

Таким образом, уравнения для нахождения частот имеют вид

$$|g_{i,j}|=\begin{cases}|E_{2,2}|=0\\ |E_{1,1}||E_{3,3}|-|E_{1,3}|^2=0\end{cases} \tag{32}$$

Из первого уравнения (32) видно, что оно распадается на квадратное и линейное относительно ω^2. Используя первое уравнение (32), второе уравнение (32) можно свести к уравнению четвертого порядка. В общем случае, $l = 2p + 1$, частотное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} g_{2,2} & \cdots & g_{2,2p} & 0 & 0 & 0 \\ g_{4,2} & \cdots & g_{4,2p} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ g_{2p,2} & \cdots & g_{2p,2p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{1,1} & \cdots & g_{1,2p+1} \\ 0 & 0 & 0 & g_{3,1} & \cdots & g_{3,2p+1} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & g_{2p+1,1} & \cdots & g_{2p+1,2p+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

Итак, определитель (33) распадается в произведение определителей: по четным индексам

$$\begin{vmatrix} g_{2,2} & g_{2,4} & \cdots & g_{2,2p} \\ g_{4,2} & g_{4,4} & \cdots & g_{4,2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{2p,2} & g_{2p,4} & \cdots & g_{2p,2p} \end{vmatrix} = 0 \qquad (34)$$

по нечетным индексам

$$\begin{vmatrix} g_{1,1} & g_{1,3} & \cdots & g_{1,2p+1} \\ g_{3,1} & g_{3,3} & \cdots & g_{3,2p+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{2p+1,1} & g_{2p+1,3} & \cdots & g_{2p+1,2p+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

В (29) недиагональные члены определителя малы по сравнению с диагональными, поэтому в (25) для $B_{m,n}$ определяющими являются коэффициенты при функциях $\phi_2^s(t)$. Пренебрегая членами, стоящими при функциях $\phi_1^s(t)$ и $\phi_3^s(t)$ в разложении $B_{m,n}$ (25), для ω_{mn}^2 получим

$$\omega_{mn}^2 = 2\lambda^2 \int_0^1 (u_n^{\mathrm{II}}(\eta_1)u_n(\eta_1))d\eta \int_0^1 (u_m^{\mathrm{II}}(\xi)u_m(\xi))d\xi +$$

$$+\int_0^1 (u_m^{\mathrm{IV}}(\xi)u_m(\xi))d\xi + \lambda^4 \int_0^1 (u_n^{\mathrm{IV}}(\eta_1)u_n(\eta_1))d\eta \qquad (36)$$

Для случая *4* имеем

$$\omega_{mn}^2/\pi^4 = 2\lambda^2(-m^2+4m/3)(-n^2+4n/3)+$$

$$+m(15m^3-24m^2+16)/15+\lambda^4 n(15n^3-24n^2+16)/15 \qquad (37)$$

Рассмотрим случай квадратной пластины ($\lambda = 1$).

Таблица 1

m	$n=2$			$n=3$			$n=4$		
	ω_2	ω_1	$\gamma^{(1)}$	ω_2	ω_1	$\gamma^{(1)}$	ω_2	ω_1	$\gamma^{(1)}$
2	36,234	35,965	0,8	74,150	73,390	1,0	133,472	130,770	2,1
3	74,150	73,390	1,0	109,759	108,071	1,6	167,620	164,98	1,6
4	133,472	130,77	2,1	167,620	164,98	1,6	223,699	220,13	1,6

Таблица 2

m	$n=2$			$n=3$			$n=4$		
	ω_4	ω_3	$\gamma^{(2)}$	ω_4	ω_3	$\gamma^{(2)}$	ω_4	ω_3	$\gamma^{(2)}$
2	36,228	36,748	1,4	74,065	75,513	2	132,958	135,828	2,2
3	74,065	75,513	2	109,759	113,393	3,3	167,66	172,516	2,9
4	132,958	135,828	2,2	167,666	172,516	2,9	224,007	230,591	2,9

Таблица 3

m	$n=2$			$n=3$			$n=4$		
	ω_5	ω_1	$\gamma^{(3)}$	ω_5	ω_1	$\gamma^{(3)}$	ω_5	ω_1	$\gamma^{(1)}$
2	37,221	35,965	3,5	76,237	73,390	3,9	136,631	130,770	4,5
3	76,237	73,390	3,9	113,393	108,071	4,9	172,516	164,98	4,6
4	136,631	130,77	4,5	172,516	164,98	4,6	230,046	220,13	4,5

Вычислим частоты по различным формулам и сравним их с частотами из [1], обозначим последние ω_1. Так как задачу нахождения частот решаем методом Ритца, то все полученные значения завышены относительно истинного значения, следовательно, чтобы получить наиболее точные значения частот, находим численно минимум по k выражения (36).

Оказывается, что для случая (10) и (12) минимум (36) достигается при $k = k_1 = 0{,}534823$, а для случая (11) при $k = k_2 = 0{,}6329535I$, где I – мнимая единица. Можно показать, что k_1 и k_2 связаны соотношением $1-k_1^2 = 1/(1-k_2^2)$. Это следует из того, что $\mathrm{dn}(2K(k_1)) = \mathrm{dn}(2K(k_2))$ – принимает одинаковые значения на концах отрезка; $\mathrm{dn}(K(k_1)) = \mathrm{dn}(K(k_2))$ – принимает одинаковые значения в середине отрезка. Итак для k_1 и k_2 получаем систему уравнений

$$K(k_1)/K(k_2) = k_2 I/k_1, \quad \sqrt{1-k_1^2}\,K(k_1) = K(k_2)$$

В результате $k_2 = k_1 I\sqrt{1-k_1^2}$. Из определителя (33), элементы которого формируются при помощи (20), используя (10), (11), (12) и положив $q = 0$, получим собственные частоты. Отметим, что они совпадают между собой при $k = k_1$ для (10) и (12). Причем, определитель считается как произведение диагональных членов, т.е. по формуле (36). Обозначим эти частоты ω_2. Частоты ω_4 вычисляются из определителя (33) с использованием (10) и $k = 0{,}534823$, решая систему 9-го порядка. Аналогично находятся частоты ω_3, при использовании (14). Заметим, что ω_3 и ω_4, вычисленные с использованием определителя 81-го порядка, практически совпадают с найденными из

Таблица 4

m	$n=2$			$n=3$			$n=4$		
	ω_6	ω_2	$\gamma^{(4)}$	ω_6	ω_2	$\gamma^{(4)}$	ω_6	ω_2	$\gamma^{(4)}$
2	35,921	36,234	0,9	73,201	74,150	1,3	131,148	133,472	1,7
3	73,201	74,150	1,3	107,678	109,759	1,9	163,928	167,620	2,2
4	131,148	133,472	1,7	163,928	167,620	2,2	–	223,669	–

Таблица 5

m	$n=2$			$n=3$			$n=4$		
	ω_6	ω_4	$\gamma^{(5)}$	ω_6	ω_4	$\gamma^{(5)}$	ω_6	ω_4	$\gamma^{(5)}$
2	35,921	36,228	0,8	73,201	74,065	1,2	131,148	132,958	1,4
3	73,201	74,065	1,2	107,678	109,759	1,9	163,928	167,660	2,2
4	131,148	132,958	1,4	163,928	167,660	2,2	–	224,007	–

определителя 9-го порядка. Частоты ω_5 найдены по асимптотической формуле (37). Проводился также расчет с помощью программы метода конечного элемента "ANSYS" с разбиением 20×20. Соответствующие частоты обозначим ω_6.

В табл. 1–5 приведены перечисленные выше частоты и дана их относительная погрешность γ_i (m, n – число узловых линий по ξ и η). Из сравнения ω_i видно, что все они близки между собой, а самое главное, погрешность вычисления собственных частот по формуле (36) (которая аналогична случаю шарнирного закрепления пластины) не превосходит 2,2%. В случае использования (13) имеем самый неблагоприятный вариант, но при этом расчеты существенно упрощаются и частоты определяются по (37). При этом погрешность не превосходит 5%. Использование многочленов Гегенбауэра в задаче о собственных колебаниях жесткозакрепленной пластины позволяет свести задачу нахождения собственных частот колебаний к проблеме собственных значений, а это позволяет, в свою очередь, применять хорошо разработанные в этой области методы. Структура матрицы такова, что ее определитель распадается в произведение определителей по четным и нечетным индексам. Пренебрегая недиагональными членами в определителе, т.е. вычисляя определитель как произведение диагональных элементов (диагональная асимптотика), можно получить хорошее приближение к точным значениям собственных частот. Диагональная асимптотика, полученная при использовании многочленов Гегенбауэра от эллиптических функций дает более точные значения, чем при использовании многочленов Гегенбауэра от тригонометрических функций. Явное выражение диагональной асимптотики в сочетании с хорошей точностью позволяет при решении динамических задач строить в явном виде динамическую функцию влияния Грина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
2. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки. М.; Л.: Госстройиздат, 1948. 460 с.
3. *Iyengar K.T.S., Narasimhan K.D.* Buckling of rectangular plates wiht clamped and simply-supported edges // Publ. Inst. Math. 1965. V. 5. P. 31–40.
4. *Голоскоков П.Г.* О вариационном методе Л.В. Кантаровича в задачах изгиба пластин // Тр. Ленинград. ин-та вод. трансп. 1973. Вып. 140. С. 80–88.

5. *Даревский В.М.* Об одном методе решения уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 9. С. 1661–1672.
6. *Лурье С.А.* Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки, защемленной по контуру // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 159–168.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
1.07.1998