

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. А.С. ЮДИН

### **ВИБРАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК**

Дан краткий обзор некоторых подходов к построению вибрационных моделей для подкрепленных составных оболочечных конструкций. Модели использовались в ряде научно-исследовательских работ, выполненных под руководством академика РАН И.И. Воровича. Рассмотрена возможность обобщения моделей на оболочки сложной геометрии в численно-аналитических алгоритмах модального типа.

Стремление к адекватному отражению свойств реальных технических объектов и условий их взаимодействия с внешними воздействующими факторами приводит к моделям, включающим элементы разной размерности из континуальной механики деформируемых твердых тел, сплошной среды и механики систем с конечным числом степеней свободы. При этом степень детализации выбираемых конструктивно-силовых схем зависит от целей исследования, постановки задач, уровня полноты и достоверности информации об объекте, этапа проектирования, применяемых для расчетов методов, алгоритмов и пакетов программ, привлекаемых для исследований сил и средств.

В комплексных моделях применяется, как правило, метод расчленения сложной системы на подсистемы. Здесь важна организация баз данных о конструкции и обмена информацией между подсистемами, контроль правильности ее восприятия и использования. Необходимо также понимание некоторых принципиальных положений, на которые обращается внимание, например, в [1]. Сложная компьютерная модель – это не только уравнения и программы их решения на ЭВМ в виде списка команд, по которым машина должна выполнить совокупность простых операций. При возрастании объема программ и команд модель становится сложной логико-аппаратной системой, действия которой детерминированы и воспроизводимы. Однако необъятность сочетаний области данных с разнообразием логических разветвлений и режимов функционирования программ модели, управляющей операционной системы и аппаратной конфигурации делает практически невозможным испытание такого комплекса во всех возможных случаях. Эта проблема не возникает для программ из сотни команд, становится очень серьезной на уровне тысячи команд и практически неразрешимой для сотни и более тысяч команд. Результаты теории разрешимости утверждают, что, начиная с некоторой степени сложности, невозможно полностью предвидеть действие детерминированной системы. Это не означает, что невозможно определить правильность функционирования программы в соответствии с целями ее создания. Просто с некоторого уровня сложности появление непредвиденных ошибок становится неизбежным, и при создании больших программ речь может идти только о минимизации ошибок (вероятности их проявления) до приемлемых пределов. Таким образом, сложность невозможно контролировать, что объективно ведет к росту отклонений между моделью и действительностью вместо адекватной сходимости. Примеров этому достаточно из области информатики ("глюки", "зависания" сложных

программ) и технических систем (техногенные катастрофы, аварии энергетических, транспортных наземных и авиационно-космических систем). Существенную роль при этом играет и человек как часть сложной системы, призванный перерабатывать и контролировать все возрастающие объемы информации, что не всегда удается.

Поэтому наряду с созданием и использованием сложных универсальных программ, расширяющих границы вычислимых моделей, не отпадает и необходимость в разработке и развитии упрощенных подходов, сознательно ограничивающихся определенным уровнем, масштабом, оставляющим в стороне низшие и высшие уровни. Сложность какой-либо проблемы в принципе не означает, что она не может быть смоделирована при помощи относительно простой вычислимой модели и программы. Но доказательством этого могут быть только найденные простые модели, поскольку не существует универсальной программы, которая при рассмотрении реальной задачи могла бы решить, существует ли подходящая модель, и которая могла бы ее построить [1]. Относительно простые модели необходимы также для тестирования и контроля сложных моделей и комплексов программ. Поэтому наборы простых задач, имеющих в том числе и аналитические решения, прилагаются к конечно-элементным универсальным комплексам, помогая также и их освоению.

Для надежности и рациональности расчетов целесообразно построение и использование иерархии моделей по возрастающим уровням сложности. Разнообразие таких моделей характерно для виброакустики конструкций и сред. Эта область объединяет крупный раздел задач гидроупругости, возникающих в судостроении, авиации и других отраслях. В судовой акустике актуальны задачи расчета вибрационных характеристик конструкций с учетом жидкости (воды), задачи излучения и рассеяния (дифракции) звука упругими оболочками. Анализ звуковых полей необходим для создания благоприятных условий обитания человека и работы гидроакустических приборов. Актуальны задачи звукоизлучения (ЗИ) и дифракции применительно к анализу виброакустических характеристик (ВАХ) подводных судовых конструкций (ПСК), для которых уровни звукоизлучения относятся к одной из важнейших характеристик.

Конструкциям типа корпусов и фюзеляжей более адекватны модели оболочечного типа. Однако удлиненность конструкции позволяет для предварительных оценок резонансных частот использовать и балочные модели. Выбор и информативность модели в виброакустических задачах существенно зависит от ряда факторов. К важным относятся соотношения между длинами возбуждаемых волн (частот) и характерными размерами конструкций (длинами секций, шагами расстановки ребер и т.п.), скоростями распространения типов волн в конструкции и контактирующей среде и их импедансными характеристиками (является ли среда акустически легкой (воздух) или акустически тяжелой (вода) по отношению к конструкции). В виброакустических задачах в линейной постановке работает принцип суперпозиции, позволяющий применять модальные разложения и урезание конструкции при локализации колебаний с ростом частоты. Поэтому в виброакустике находят применение модели от балочных до сложных конечно- и гранично-элементных, включая в спектр между этими уровнями подкрепленные и неподкрепленные, конечные и бесконечные цилиндрические оболочки и пластины, сферические, сфероидальные и эллипсоидальные оболочки, подкрепленные составные оболочки вращения.

Рассмотрим некоторые подходы к моделированию задач вибрации и акустики конструктивно-сложных оболочечных конструкций. Модели разрабатывались в процессе выполнения ряда научных тем под руководством, при творческом участии и влиянии академика И.И. Воровича с конца 1970 г. Несмотря на активное внимание к этой проблеме, обилие публикаций для относительно простых схем объектов, на период разветывания этих работ в НИИМ и ПМ РГУ оставались нерешенными задачи разработки оболочечных моделей, более адекватно учитывающих геометрию и основные конструктивные элементы ПСК и внешнюю среду. Был разработан ряд

математических моделей, алгоритмов и программное обеспечение методов расчета вибраций и структурного звукоизлучения, выполнены расчеты и анализ влияния основных параметров на ВАХ конкретных конструкций. При этом были решены следующие задачи:

- построены разрешающие системы уравнений для ряда математических моделей собственных и вынужденных колебаний корпусов ПСК, учитывающие геометрию оболочек, силовые элементы, размещение жестко закрепленного и виброизолированного оборудования;

- разработан и реализован метод собственных форм (МСФ) для анализа колебаний и ЗИ подкрепленных составных односвязных удлиненных оболочек вращения;

- разработан и реализован эффективный метод расчета вынужденных колебаний и ЗИ односвязных составных подкрепленных оболочек вращения с учетом обжатия, внутренних потерь и внешней среды моделированием локального импеданса; проверена приемлемость этого более простого подхода сравнением с методом собственных форм;

- разработан и реализован метод расчета вынужденных колебаний и ЗИ подкрепленных оболочек вращения с разветвленным меридианом с учетом внутренних и внешних потерь;

- развита теория, уравнения, методы и алгоритмы анализа вынужденных колебаний и ЗИ соосных связанных подкрепленных оболочек вращения с учетом внутренней и внешней жидкости;

- разработан и реализован метод расчета вынужденных колебаний и ЗИ подкрепленных оболочек вращения с неосесимметричными жесткостными и массовыми неоднородностями, сохраняющего возможности модального анализа;

- реализован метод расчета вибраций и ЗИ комбинированных оболочечно-балочных конструкций с массами и виброизолирующими связями;

- исследовано влияние конструктивных параметров моделей на резонансные частоты и ЗИ, выполнено сравнение альтернативных вариантов.

Разработанные модели и методы можно классифицировать как численно-аналитические [2]. Здесь исходные двух- или трехмерные краевые задачи сводятся к квазиодномерным для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим интегрированием устойчивыми численными методами. В алгоритмах комбинируются методы рядов Фурье, Ньютона – Канторовича, Власова – Канторовича, сплайн-аппроксимаций, перехода от краевых задач к серии задач Коши, дифференциальной прогонки с различными видами ортогонализаций и некоторые другие. Существенным подспорьем для конструирования алгоритмов и некоторых программных модулей при этом были книги [3, 4]. Однако комплексы программ реализовывались на языке Фортран, более эффективном в поле комплексных чисел, что было необходимо для учета потерь энергии в конструкции при вынужденных колебаниях. Некоторые из реализованных подходов отражены в статьях [5–24] и других, с большей полнотой – во множестве отчетов, доложены на конференциях, совещаниях по гидрофизике и школах-семинарах по динамическим задачам гидроупругости оболочек.

Использование рядов для снятия одной из координат (окружной) позволяет проводить помодовый анализ сходимости, выявлять главные моды, дающие основной вклад в решение или определяющие резонансные формы колебаний. В случае оболочек вращения задача сводится к решению серии независимых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) невысокого порядка (восьмого для оболочек Кирхгофа), зависящих от номера окружной моды как от параметра. В случае небольшого числа дискретных продольных силовых элементов, нарушающих осевую симметрию, применялся метод подсистем и динамических податливостей [20]. В случае существенно двумерно-неоднородных оболочек технологичней решать связанные системы ОДУ (порядка 8М для оболочек Кирхгофа, где М – число удержанных окружных мод) [19, 21, 23, 24]. При этом для продольных силовых

элементов эффективен способ локального размазывания их свойств, приводящий к ступенчато-переменным зависимостям приведенных жесткостей конструктивно-анизотропной оболочки [19].

Отметим, что если в составе моделей использовались известные уравнения, их вывод повторялся для исключения влияния обычно имеющихся в публикациях опечаток. Все уравнения приводились к безразмерной форме. Исследовалась сходимость методов, в частности, метода собственных форм [8, 20], выбирались рациональные технологии расчетов типа "урезания" конструкции с ростом вынуждающей частоты. При построении моделей исследовались вопросы, связанные с условиями перехода от одной модели к другой. Например, с ростом вынуждающей частоты и приближении длин изгибных волн к шагам систем подкрепляющих элементов важен переход от схемы конструктивной анизотропии к схеме дискретного учета ребер. Численные эксперименты по сравнению моделей показали, что соотношение длины изгибных волн  $\lambda$  и шага расстановки ребер набора  $l_*$  как  $0,5\lambda = 2l_*$  может служить ориентировочной границей перехода от схемы "размазывания" к дискретной схеме с ростом частоты. Внутренние перегородки учитывались дискретно. В зависимости от местоположения и направленности источников возбуждения конструкции применялись схемы трактовки внутренних перегородок как дискретных кольцевых ребер и как пластин. Весьма важным и трудным вопросом для сложной конструкции транспортного типа являлся учет внутреннего наполнения – виброактивного оборудования, пассивных жесткозакрепленных и виброизолированных масс. Здесь использовался метод подсистем в кооперации с ИМАШ РАН. Определение динамических воздействий на оболочку через опоры внутреннего виброактивного оборудования выполнялся на основе расчета динамических податливостей оболочечной модели. Анализировалось влияние геометрических и жесткостных параметров, предварительных напряжений, размещения масс и источников вынужденных колебаний на виброакустические характеристики в дальнем и ближнем поле. Наблюдалась зависимость комплексной модели от уровней детализации информации о распределении масс наполнения, характера крепления оборудования, что уже относилось к проблеме сквозного проектирования. Важное значение имело также знание частотно-зависимых характеристик рассеяния колебательной энергии в элементах конструкции. Эта информация обычно определяется из экспериментов, зависит от многих особенностей соединений деталей в конструкции и подвержена влиянию масштабного фактора.

Численно-аналитические методы модального типа можно применить к оболочкам сложной геометрии [25, 26]. Для таких оболочек характерна неканоническая конфигурация срединной поверхности и контуров границ. В этих случаях при выполнении расчетов обычно используется метод конечных элементов в различных модификациях [27, 28] и реализующие их комплексы программ. В настоящее время все большее распространение получают интегрированные пакеты, совмещающие возможности символьной и вычислительной математики, средства программирования, графики и анимации. Такие пакеты позволяют на новом уровне реализовывать численно-аналитические алгоритмы и комплексы программ для исследовательских и учебных целей.

При построении математических моделей в задачах прочности, устойчивости и динамики сложных составных конструкций важным этапом является задание или аппроксимация основной поверхности. Эта задача для сложных поверхностей решается разнообразными способами. При наличии исходной информации в виде дискретного массива координат применяются, в частности, двумерные сплайны [26, 29, 30]. Для более аналитичных способов используется параметризация гауссовыми координатами.

Рассмотрим следующий подход. Возьмем два смежных контура  $K_1$  и  $K_2$ , в плоскостях каждого из которых заданы локальные системы координат с соответствующими центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Соединим центры отрезком, играющим роль локальной

оси. Через эту ось проведем плоскость, которая пересечет контура в точках  $M_1$  и  $M_2$ . При вращении плоскости отрезок  $M_1M_2$  образует линейчатую поверхность, натянутую на контура  $K_1$  и  $K_2$  (фиг. 1). Эту поверхность примем в качестве основной (ОП) для типового модуль-элемента сложной оболочки. Из таких элементов можно собирать составные оболочечные конструкции, имеющие замкнутые контуры поперечных сечений.

Пусть  $Oxyz$  – декартова прямоугольная система координат,  $Ox'_0y'_0$  и  $O_1x'_1y'_1$  – локальные декартовы системы в плоскостях сечений направляющих контуров, для которых плоскость  $Oxz$  является плоскостью симметрии (диаметральной плоскостью конструкции). В этих системах задаются уравнения контуров, которые могут быть определены и как функции полярного радиуса от окружной координаты  $\rho_0(\alpha_2)$  и  $\rho_1(\alpha_2)$ :

$$x'_j(\alpha_2) = \rho_j(\alpha_2) \cos \alpha_2, \quad y'_j(\alpha_2) = \rho_j(\alpha_2) \sin \alpha_2 \quad (j=0, 1) \quad (1)$$

Переходя к системам координат в плоскостях, параллельных  $Oxy$ , для уравнений контуров имеем:

$$x_j = x'_j \sin \chi_j = \rho_j \sin \chi_j \cos \alpha_2, \quad y_j = y'_j = \rho_j \sin \alpha_2 \quad (j=0, 1) \quad (2)$$

где  $\chi_j$  – углы между осью  $z$  и плоскостями контуров. Угол  $\chi$  для текущих сечений принимает промежуточное значение между  $\chi_0$  и  $\chi_1$ .

Зададим радиус-вектор основной поверхности модуль-элемента в декартовой системе  $Oxyz$  с ортами  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ :

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = X(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{i}_x + Y(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{i}_y + Z(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{i}_z \quad (3)$$

Уравнение прямолинейной образующей, проходящей через текущие точки контуров с одинаковыми координатами  $\alpha_2$ , имеет вид

$$\frac{X - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{Y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{Z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (4)$$

$$z_0 = x_0 \operatorname{ctg} \chi_0, \quad z_1 = L + x_1 \operatorname{ctg} \chi_1, \quad Z = z + X \operatorname{ctg} \chi \quad (5)$$

где  $L$  – расстояние между центрами  $O$  и  $O_1$ . Тогда (4) принимает вид

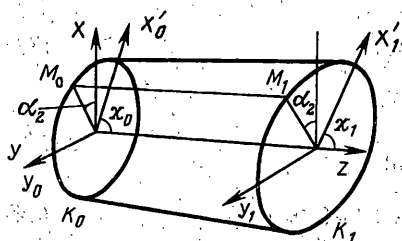
$$\frac{X - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{Y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{Z - C_0 x_0}{L + C_1 x_1 - C_0 x_0}, \quad C_j = \operatorname{ctg} \chi_j, \quad C = \operatorname{ctg} \chi, \quad C_1 - C_0 = K \quad (6)$$

Из (5) следует

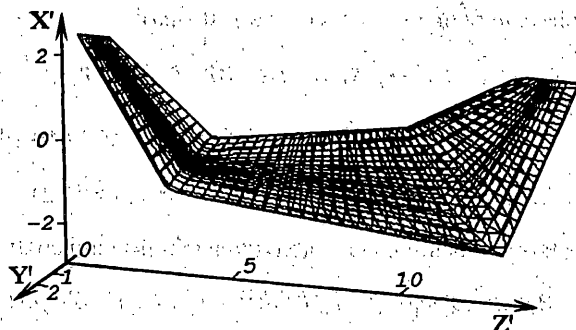
$$X = \frac{x_0[L + (C_1 - C_0)x_1] + z(x_1 - x_0)}{L + (C_1 - C)x_1 + (C - C_0)x_0}, \quad Y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(X - x_0), \quad Z = z + CX \quad (7)$$

Величину  $C$  определим как линейную функцию от  $z$ , принимающую на краях интервала  $[0, L]$  значения  $C_0$  и  $C_1$ :  $C = C_0 + Kz/L$ .

Присвоим модуль-элементу индекс  $s$ , считая его секцией составной конструкции (СК). Осевая (основная) линия (ОЛ) СК может быть многозвенной ломаной в плоскости  $Oxz$  с "нанизанными" на нее направляющими контурами, обязательно присутствующими в точках излома ОЛ. Введем глобальную систему координат  $O'x'y'z'$  полагая, что ДП всех контуров совмещены с плоскостью  $O'x'z'$ . Пусть  $(\bar{x}_{0,s}, 0, \bar{z}_{0,s})$  – координаты начальной точки старой (локальной) системы в новой (глобальной), а  $\theta_s$  – угол между осями  $z$  и  $z'$ . Тогда в глобальной системе уравнения ОП модуль-элемента



Фиг. 1



Фиг. 2

будут следующими:

$$X'_s = \bar{x}_{0s} + X_s \cos \theta_s - z_s \sin \theta_s, \quad Y'_s = Y_s, \quad Z'_s = \bar{z}_{0s} + X_s \sin \theta_s + Z_s \cos \theta_s \quad (8)$$

$$X_s = \frac{x_{0s} [L_s + (C_{1s} - C_{0s})x_{1s}] + z_s(x_{1s} - x_{0s})}{L_s + (C_{1s} - C_s)x_{1s} + (C_s - C_{0s})x_{0s}}, \quad Y_s = y_{0s} + \frac{y_{1s} - y_{0s}}{x_{1s} - x_{0s}}(X_s - x_{0s})$$

$$Z_s = z_s + (C_{0s} + K_s z_s / L_s) X_s, \quad C_s = C_{0s} + K_s z_s / L_s \quad (9)$$

$$z_s = z^* - \sum_{k=1}^{s-1} L_k, \quad z' = \sum_{k=1}^{s-1} L_k \cos \theta_k + z_s \cos \theta_s \quad (s=1, \dots, N) \quad (10)$$

Соотношения (8)–(10) определяют основную поверхность составной оболочки из  $N$  секций, состыкованных через смежные контура, и ее радиус-вектор:

$$\mathbf{r}'(\alpha_1, \alpha_2) = X'_s(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{i}'_x + Y'_s(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{i}'_y + Z'_s(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{i}'_z \quad (s=1, \dots, N) \quad (11)$$

При этом в качестве первой (осевой) гауссовой координаты  $\alpha_1$  можно взять  $z^*$  (отсчет по осевым линиям) или  $z'$ , а вторая координата – окружной угол  $\alpha_2$ . В случае  $\alpha_1 = z'$  углы  $\theta_s$  должны быть меньше  $\pi/2$ .

Рассмотрим в качестве направляющих эллиптические контура с параметрическими уравнениями:

$$x'_{js} = a_{js} \cos t_{js}, \quad y'_{js} = b_{js} \sin t_{js}$$

$$\frac{y'_{js}}{x'_{js}} = \frac{b_{js}}{a_{js}} \operatorname{tg} t_{js} = \operatorname{tg} \alpha_2, \quad t_{js}(\alpha_2) = \operatorname{arctg} \left( \frac{a_{js}}{b_{js}} \operatorname{tg} \alpha_2 \right)$$

$$x'_{js}(\alpha_2) = a_{js} \cos [t_{js}(\alpha_2)], \quad y'_{js}(\alpha_2) = b_{js} \sin [t_{js}(\alpha_2)] \quad (12)$$

$$\rho_{js}(\alpha_2) = \{ [x'_{js}(\alpha_2)]^2 + [y'_{js}(\alpha_2)]^2 \}^{1/2}$$

Пример оболочки, составленной из трех секций с эллиптическими направляющими, показан на фиг. 2.

Основной базис на поверхности образуется производными от радиус-вектора  $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$  по криволинейным координатам, которые являются касательными векторами координатных линий. Через них определяется вектор нормали  $\mathbf{n}$  поверхности и коэффициенты  $g_{ij}$  первой основной квадратичной формы I (ковариантные компо-

ненты первого метрического тензора):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j &= \mathbf{r}_{,j}, \quad g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \quad (i, j = 1, 2); \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \cdot g^{-1}, \quad g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \\ I &= dl^2 = g_{ij}d\alpha^i d\alpha^j = g_{11}(d\alpha_1)^2 + 2g_{12}d\alpha_1 d\alpha_2 + g_{22}(d\alpha_2)^2 \\ (\dots)_{,j} &= (\dots)_{,\alpha_j} = \partial(\dots) / \partial \alpha_j, \quad \alpha_j \equiv \alpha^j \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (13)$$

Вторая основная квадратичная форма поверхности:

$$\Pi = dl^2(\cos \varphi) / \rho = k_{ij}d\alpha^i d\alpha^j = k_{11}(d\alpha_1)^2 + 2k_{12}d\alpha_1 d\alpha_2 + k_{22}(d\alpha_2)^2 \quad (14)$$

где  $k_{ij} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{ij}$  – компоненты второго метрического тензора поверхности,  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{,ij}$  – вторые производные радиус-вектора;  $\rho$  – радиус кривизны линии на поверхности,  $\varphi$  – угол между главной нормалью  $\nu$  линии и нормалью  $\mathbf{n}$  поверхности. Т.к.  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i = 0$ , то после дифференцирования этого уравнения можно получить другой способ определения коэффициентов  $\Pi$ :  $k_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_j$ , где  $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{,i}$ .

Для соотношений (13), (14) необходимы выражения первых и вторых производных параметрических функций ОП (8), (9) по координатам  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Введем обозначения:

$$\zeta_s(\alpha_1, \alpha_2) = L_s + K_s x_{1s}(1 - z_s / L_s) + K_s x_{0s} z_s / L_s, \quad \eta_s(\alpha_2) = (y_{1s} - y_{0s}) / (x_{1s} - x_{0s}) \quad (15)$$

Тогда получим

$$X_s = \zeta_s^{-1} [x_{0s}(L_s + K_s x_{1s}) + z_s(x_{1s} - x_{0s})], \quad Y_s = \eta_s(X_s - x_{0s}), \quad Z_s = z_s + X_s(C_{0s} + K_s z_s / L_s) \quad (16)$$

Формулы для первых производных функций (15), (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta_{s,1} &= (K_s / L_s)(x_{0s} - x_{1s}), \quad \zeta_{s,2} = K_s[x_{1s,2}(1 - z_s / L_s) + x_{0s,2} z_s / L_s] \\ X_{s,1} &= \zeta_s^{-1} (x_{1s} - x_{0s}) - \zeta_s^{-2} \zeta_{s,1} [L_s + K_s x_{1s} + z_s(x_{1s} - x_{0s})] \\ Y_{s,1} &= \eta_s X_{s,1}, \quad Z_{s,1} = 1 + X_{s,1}(C_{0s} + K_s z_s / L_s) + (K_s / L_s) X_s \\ X_{s,2} &= \zeta_s^{-1} [x_{0s,2}(L_s + K_s x_{1s}) + K_s x_{0s} x_{1s,2} + z_s(x_{1s,2} - x_{0s,2})] - \\ &- \zeta_s^{-2} \zeta_{s,2} [x_{0s}(L_s + K_s x_{1s}) + z_s(x_{1s} - x_{0s})] \\ Y_{s,2} &= y_{0s,2} + \eta_{s,2}(X_s - x_{0s}) + \eta_s(X_{s,2} - x_{0s,2}), \quad Z_{s,2} = X_{s,2}(C_{0s} + K_s z_s / L_s) \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы для вторых производных параметрических функций ОП даны в [31].

Далее, можно определить:

$$X'_{s,j} = X_{s,j} \cos \theta_s - Z_{s,j} \sin \theta_s, \quad Y'_{s,j} = Y_{s,j}, \quad Z'_{s,j} = X_{s,j} \sin \theta_s + Z_{s,j} \cos \theta_s$$

$$\mathbf{r}'_j = X'_{s,j} \mathbf{i}'_x + Y'_{s,j} \mathbf{i}'_y + Z'_{s,j} \mathbf{i}'_z \quad (s = 1, \dots, N)$$

$$g_{jj} = (X'_{s,j})^2 + (Y'_{s,j})^2 + (Z'_{s,j})^2 \quad (j = 1, 2); \quad g_{12} = X'_{s,1} X'_{s,2} + Y'_{s,1} Y'_{s,2} + Z'_{s,1} Z'_{s,2}$$

$$n'_x = (Y'_{s,1} Z'_{s,2} - Y'_{s,2} Z'_{s,1}) g^{-1}, \quad n'_y = (X'_{s,2} Z'_{s,1} - X'_{s,1} Z'_{s,2}) g^{-1}$$

$$n'_z = (X'_{s,1} Y'_{s,2} - X'_{s,2} Y'_{s,1}) g^{-1}; \quad \mathbf{n}' = n'_x \mathbf{i}'_x + n'_y \mathbf{i}'_y + n'_z \mathbf{i}'_z$$

$$\mathbf{r}'_{ij} = X'_{s,ij} \mathbf{i}'_x + Y'_{s,ij} \mathbf{i}'_y + Z'_{s,ij} \mathbf{i}'_z \quad (i, j = 1, 2)$$

$$k_{ij} = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}'_{ij} = n'_x X'_{s,ij} + n'_y Y'_{s,ij} + n'_z Z'_{s,ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (18)$$

Здесь  $\kappa_{11} = 0$ , поскольку образующие ОП модуль-элементов – прямые линии, что позволяет внести упрощения в уравнения колебаний оболочек общей геометрии.

Вернемся к отдельному модуль-элементу. На ОП векторы  $\mathbf{e}_j = \mathbf{r}_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$  образуют основной базис (е-триедр). Векторы взаимного базиса  $\mathbf{e}_i = g^{ij}\mathbf{e}_j$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}'$ . Синус угла между векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ :  $\sin \psi = g/(g_{11}g_{22})^{1/2}$ . Контравариантные и смешанные компоненты метрических тензоров связаны соотношениями:

$$g^{11} = g_{11}g^{-2}, \quad g^{12} = g^{21} = -g_{12}g^{-2} = -g_{21}g^{-2}, \quad g_j^i = \delta_j^i, \quad \kappa_j^i = g^{ik}\kappa_{kj}, \quad \kappa^{ij} = g^{ik}g^{im}\kappa_{km} \quad (19)$$

Формулы дифференцирования векторов основного базиса имеют вид

$$\mathbf{e}_{k,i} = \Gamma_{ki}^m \mathbf{e}_m + \kappa_{ki} \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_{,i}^k = -\Gamma_{ki}^m \mathbf{e}^m + \kappa_i^k \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_{,i} = -\kappa_i^m \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{e}_m = -\kappa_{im} \mathbf{e}^m$$

$$\Gamma_{ki}^m = g^{mi}\Gamma_{kij}, \quad \Gamma_{kij} = 0,5(g_{kj,i} + g_{ij,k} - g_{ki,j}) \quad (i, k, m = 1, 2) \quad (20)$$

где  $\Gamma_{kij}$ ,  $\Gamma_{ki}^m$  – символы Кристоффеля первого (СК1) и второго (СК2) рода. В данном случае

$$\Gamma_{111} = 0,5g_{11,1}, \quad \Gamma_{121} = \Gamma_{211} = 0,5g_{11,2}, \quad \Gamma_{221} = g_{12,2} - 0,5g_{22,1}, \quad \Gamma_{222} = 0,5g_{22,2}$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = 0,5g_{22,1}, \quad \Gamma_{112} = g_{12,1} - 0,5g_{11,2}$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0,5g^{-2}(g_{11,1}g_{22} + g_{11,2}g_{12} - 2g_{12}g_{12,1}), \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0,5g^{-2}(g_{22}g_{11,2} - g_{12}g_{22,1})$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0,5g^{-2}[g_{11}(2g_{12,2} - g_{22,1}) - g_{12}g_{22,2}]$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0,5g^{-2}(g_{22,2}g_{11} + g_{22,1}g_{12} - 2g_{12}g_{12,2})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,5g^{-2}(g_{11}g_{22,2} - g_{12}g_{11,2}),$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0,5g^{-2}(2g_{12,1} - g_{11,2}) - g_{12}g_{11,1} \quad (21)$$

Формулы ковариантного дифференцирования произвольного вектора имеют вид

$$\mathbf{u}_{,k} = \nabla_k u^i \mathbf{e}_i = \nabla_k u_i \mathbf{e}^i$$

$$\nabla_k u^i = u_{,k}^i + \Gamma_{km}^i u^m - \kappa_k^i u^3, \quad \nabla_k u^3 = u_{,k}^3 + \kappa_{km} u^m$$

$$\nabla_k u_i = u_{,i,k} - \Gamma_{ki}^m u_m - \kappa_{ki} u_3, \quad \nabla_k u_3 = u_{,3,k} + \kappa_k^m u_m \quad (i, k, m = 1, 2) \quad (22)$$

Для дальнейших построений можно воспользоваться квадратичным вариантом уравнений геометрически нелинейной теории оболочек общего вида, развернутый и обоснованный вывод которых в координатной форме предоставлен И.И. Воровичем. Уравнения вошли в справочник по устойчивости оболочек (далее, [С]), разработанный в начале 1970-х годов и оставшийся в рукописном виде. Целесообразность построений на основе нелинейных уравнений связана с актуальностью вибрационных задач для предварительно напряженных оболочек. Уравнения малых колебаний получают линейризацией в окрестности статического НДС.

Вводится параметризация пространства в окрестности основной поверхности в специальной системе криволинейных координат, образуемой параллельным переносом триедра ОП  $\mathbf{e}_j = \mathbf{r}'_j$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}'$  по нормали в точки пространства. Положение точек пространства определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{r}'(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \mathbf{n}'(\alpha_1, \alpha_2) \quad (23)$$

где координата  $\alpha_3$  по модулю равна расстоянию по нормали от поверхности до точки ( $\mathbf{n}'$  – единичная нормаль). Метрическому тензору пространства соответствуют компо-



$$H_{ij} = g_{ij}, \quad H^{ij} = g^{ij} \quad (i, j = 1, 2); \quad H_{13} = H_{23} = H^{13} = H^{23} = 0; \quad H_{33} = H^{33} = 1 \quad (24)$$

Формулы дифференцирования (24) векторов трехгранника и произвольного вектора (26) дополняются соотношениями

$$\mathbf{e}_{j,3} = \mathbf{e}_{,3}^j = 0; \quad \nabla_3 u^p = u_{,3}^p; \quad \nabla_3 u_p = u_{p,3} \quad (25)$$

Полный набор символов Кристоффеля специальной системы координат включает формулы (21) плюс следующие:

$$\begin{aligned} \Gamma_{113} &= \kappa_{11}, \quad \Gamma_{123} = \kappa_{12}, \quad \Gamma_{131} = -\kappa_{11}, \quad \Gamma_{132} = -\kappa_{12} \\ \Gamma_{133} &= 0, \quad \Gamma_{213} = \kappa_{21}, \quad \Gamma_{223} = \kappa_{22}, \quad \Gamma_{231} = -\kappa_{21}, \quad \Gamma_{232} = -\kappa_{22} \\ \Gamma_{311} &= \Gamma_{312} = \Gamma_{313} = \Gamma_{321} = \Gamma_{322} = \Gamma_{323} = \Gamma_{331} = \Gamma_{332} = \Gamma_{333} = 0. \\ \Gamma_{k3}^m &= -\kappa_k^m, \quad \Gamma_{kj}^3 = \kappa_{kj}, \quad \Gamma_{k3}^3 = 0 \quad (m, k, j = 1, 2); \quad \Gamma_{3j}^p = 0 \quad (p = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (26)$$

В е-триедре специальной системы не всегда выполняется симметрия по нижним индексам СК2 (например,  $\Gamma_{13}^1 \neq \Gamma_{31}^1$ ). Это означает, что е-триедру не соответствует никакая  $\alpha$ -параметризация трехмерного пространства, т.е. пространство имеет аффинную связность с кручением.

Рассмотрим основную поверхность на участках с непрерывными кривизнами. Предположим, что в каждой точке  $P(\alpha_1, \alpha_2)$  по нормали к ОП построен отрезок длиной  $h(\alpha_1, \alpha_2)$ , середина которого принадлежит ОП. Величина  $h$  предполагается малой по сравнению с кривизнами ОП. При непрерывном движении точки  $P$  по поверхности отрезок ометет некоторый объем  $V$  и образует оболочку с геометрической точки зрения. При этом основная поверхность будет срединной.

Пусть в результате деформации оболочки ее точки получают перемещения, определяемые вектором  $\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Вектор перемещений задан ковариантными и контравариантными компонентами в базисных триедрах. Компоненты первого тензора конечной деформации (Коши – Грина) [3] разбиваются на линейные и нелинейные составляющие:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + 0,5\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j} \\ e_{ij} &= 0,5(\mathbf{R}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{R}_{,j} \cdot \mathbf{u}_{,i}) = 0,5(\gamma_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \gamma_j \cdot \mathbf{u}_{,i}) \\ \gamma_i &= \mathbf{e}_i + \alpha^3 \kappa_i^m \mathbf{e}_m \end{aligned} \quad (27)$$

где  $e_{ij}$  – компоненты малой (линейной) деформации. Далее, для упрощений используются предположения квадратичного варианта геометрически-нелинейной теории оболочек (среднего изгиба): малость относительных удлинений, сдвигов и квадратов углов поворота по сравнению с единицей. В результате для основных компонент (27) получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} 2e_{ij} &= u_{,j}^p g_{ip} + u_{,i}^p g_{jp} + g_{ij,p} u^p - \\ &- 2\kappa_{ij} u^3 + \alpha^3 \left[ (u_{,j}^p + \Gamma_{im}^p u^m - \kappa_j^p u^3) \kappa_{ip} + (u_{,i}^p + \Gamma_{im}^p u^m - \kappa_i^p u^3) \kappa_{jp} \right], \\ 2e_{i3} &= u_{,3}^p (g_{ip} + \alpha^3 \kappa_{ip}) + u_{,i}^3 + \kappa_{im} u^m \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + 0,5\nabla_i u^3 \nabla_j u^3, \quad \varepsilon_{i3} \approx e_{i3} \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (28)$$

или

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= g_{1p}u_{,1}^p + 0,5g_{11,m}u^m - \kappa_{11}u^3 + \\
 &+ \alpha^3\kappa_{1p}(u_{,1}^p + u^m\Gamma_{1m}^p - \kappa_{1p}^p u^3) + 0,5(u_{,1}^3 + \kappa_{1m}u^m)^2 \\
 2\varepsilon_{13} &= u_{,3}^p(g_{1p} + \alpha^3\kappa_{1p}) + u_{,1}^3 + \kappa_{1p}u^p \quad (1 \leftrightarrow 2) \\
 2\varepsilon_{12} &= u_{,1}^p g_{2p} + u_{,2}^p g_{1p} + g_{12,p}u^p - 2\kappa_{12}u^3 + \\
 &+ \alpha^3 \left[ u_{,1}^p \kappa_{2p} + u_{,2}^p \kappa_{1p} + (\Gamma_{1m}^p \kappa_{2p} + \Gamma_{2m}^p \kappa_{1p})u^m - (\kappa_{1p}^p \kappa_{2p} + \kappa_{2p}^p \kappa_{1p})u^3 \right] + \\
 &+ (u_{,1}^3 + \kappa_{1m}u^m)(u_{,2}^3 + \kappa_{2m}u^m)
 \end{aligned} \tag{29}$$

После применения гипотез Кирхгофа теории оболочек

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) &= \mathbf{u}_0(\alpha^1, \alpha^2) + \alpha^3 \mathbf{u}_1(\alpha^1, \alpha^2) \\
 \mathbf{u}_0 &= u^k \mathbf{e}_k; \quad \mathbf{u}_1 = v^k \mathbf{e}_k \quad (k=1,2,3); \quad \varepsilon_{13} \sim \varepsilon_{23} \sim 0, \quad \sigma_{33} \approx 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

сводка формул для компонент деформации получает вид:

$$\begin{aligned}
 e_{ij} &= \hat{e}_{ij} + \alpha^3 \hat{e}_{ij}^1, \quad \varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} + \alpha^3 \hat{\varepsilon}_{ij}^1 \\
 2\hat{e}_{ij} &= (u^p g_{ip})_{,j} + (u^p g_{jp})_{,i} + u^p (g_{ij,p} - g_{ip,i} - g_{jp,j}) - 2\kappa_{ij}u^3 = \\
 &= u_{i,j} + u_{j,i} - 2\Gamma_{ij}^p u_p - 2\kappa_{ij}u^3 \\
 2\hat{e}_{ij}^1 &= (v^p g_{ip})_{,j} + (v^p g_{jp})_{,i} + v^p (g_{ij,p} - g_{ip,i} - g_{jp,j}) = \\
 &= v_{i,j} + v_{j,i} - 2\Gamma_{ij}^p v_p \approx v_{i,j} + v_{j,i}, \quad \text{так как } v_3 \approx 0 \\
 \nabla_i u^3 &= u_{,i}^3 + \alpha^3 v_{,i}^3 + \kappa_{ip}(u^p + \alpha^3 v^p) \approx u_{,i}^3 + \kappa_{ip}u^p \\
 \hat{\varepsilon}_{ij} &= \hat{e}_{ij} + (u_{,i}^3 + \kappa_{ip}u^3)(u_{,j}^3 + \kappa_{jp}u^p), \quad \hat{\varepsilon}_{ij}^1 = \hat{e}_{ij}^1
 \end{aligned} \tag{31}$$

На основе гипотез Кирхгофа  $v_1$  и  $v_2$  можно выразить через компоненты вектора  $\mathbf{u}_0$ :

$$\begin{aligned}
 v_p &= -\nabla p u^3, \quad \text{и преобразовать } \hat{e}_{ij}^1: \\
 2\hat{e}_{ij}^1 &= -\nabla_i \nabla_j u^3 - \nabla_j \nabla_i u^3 = \\
 &= -2u_{,ij}^3 + 2\Gamma_{ij}^p u_{,p}^3 - \kappa_{ip}u_{,j}^p - \kappa_{jp}u_{,i}^p - (\kappa_{jp,i} + \kappa_{ip,j} - 2\Gamma_{ij}^m \kappa_{mp})u^p = \\
 &= -2u_{,ij}^3 + 2\Gamma_{ij}^p u_{,p}^3 - (\kappa_{ip}^p u_{,j})_{,j} - (\kappa_{jp}^p u_{,i})_{,i} + 2\Gamma_{ij}^m \kappa_{mp}^p u_p
 \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, для компонент тензора деформации имеется следующая сводка формул:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_{11} &= g_{1p} \nabla_1 u^p = u_{,1}^p g_{1p} + 0,5g_{11,p}u^p - \kappa_{11}u^3 = u_{,1,1} - \Gamma_{11}^p u_p - \kappa_{11}u^3 \quad (1 \leftrightarrow 2) \\
 2\hat{e}_{12} &= g_{1p} \nabla_2 u^p + g_{2p} \nabla_1 u^p = u_{,1}^p g_{p2} + u_{,2}^p g_{p1} + \\
 &+ g_{12,p}u^p - 2\kappa_{12}u^3 = u_{,1,2} + u_{,2,1} - 2\Gamma_{12}^p u_p - 2\kappa_{12}u^3
 \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{e}_{11} + 0,5(u_{,1}^3 + \kappa_{1p} u^p)^2 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$2\dot{\varepsilon}_{12} = 2\dot{e}_{12} + (u_{,1}^3 + \kappa_{1p} u^p)(u_{,2}^3 + \kappa_{2p} u^p)$$

$$\dot{e}_{11} = -\nabla_1 \nabla_1 u^3 = -2u_{,11}^3 + \Gamma_{11}^p u_{,p}^3 - 2\kappa_{1p} u_{,1}^p - 2(\kappa_{1p,1} - \Gamma_{11}^m \kappa_{mp}) u^p \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$2\dot{e}_{12} = -\nabla_1 \nabla_2 u^3 - \nabla_2 \nabla_1 u^3 =$$

$$= -2u_{,12}^3 + 2\Gamma_{12}^p u_{,p}^3 - \kappa_{1p} u_{,2}^p - \kappa_{2p} u_{,1}^p - (\kappa_{2p,1} + \kappa_{1p,2} - 2\Gamma_{12}^m \kappa_{mp}) u^p. \quad (33)$$

Последующие этапы вывода полной системы уравнений включают: получение выражений для потенциальной и кинетической энергий; введение обобщенных внутренних усилий, построение соотношений упругости конструктивно-анизотропных оболочек, применение принципа Гамильтона – Остроградского для вывода уравнений движения, естественных краевых условий и условий сопряжения на дискретных шпангоутах. Ряд важных этапов построения основной системы по-существу проделан И.И. Воровичем в [С]. Данные им развернутые сводки уравнений удобны для формирования вычислимых вибрационных моделей оболочек сложной геометрии. Построение разрешающих уравнений и сведение краевых задач к системам ОДУ может быть выполнено модальным методом [18, 19, 21, 23, 24].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жаблон К., Симон Ж.-К. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике. М.: Наука, 1983. 235 с.
2. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 583 с.
3. Крамишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.
4. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 212 с.
5. Шепелева В.Г., Юдин А.С. Вынужденные колебания подкрепленной оболочки вращения под действием несимметричной нагрузки // Тр. 12-й. Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1980. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. 1980. Т. 3. С. 276–280.
6. Юдин А.С., Рукина Т.И., Шевченко В.И. О расчете собственных частот и форм подкрепленных осесимметричных оболочек // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1981. № 3. С. 32–36.
7. Юдин А.С., Шевченко В.Г., Шепелева В.Г., Макарова Л.М., Рукина Т.И. Резонансные частоты цилиндрических и бочкообразных подкрепленных оболочек // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1983. № 4. С. 37–39.
8. Ворович И.И., Ционский А.Я., Юдин А.С. Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами, в жидкости // Акуст. ж. 1983. Т. 29. № 6. С. 774–778.
9. Баурбуртян В.А., Дроздов А.Ю., Сафроненко В.Г., Ционский А.Я. Расчет поля давления при вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек вращения в жидкости // Акуст. ж. 1984. Т. 30. № 5. С. 702.
10. Емельянова Л.А., Шепелева В.Г., Юдин А.С. Влияние внутреннего трения на амплитуды вынужденных колебаний подкрепленных оболочек вращения в жидкости // Механика сплошной среды: Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. 1985. С. 61–67.
11. Попов О.Н., Ционский А.Я., Юдин А.С. Итерационный метод решения задачи о вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек вращения в жидкости // Акуст. ж. 1987. Т. 33. № 3. С. 539–542.
12. Шепелева В.Г., Юдин А.С., Емельянова Л.А. Собственные и вынужденные колебания

- составных оболочек вращения с дискретными ребрами // Деп. в ВИНТИ 16.10.87, № 7319-B87. Ростов-на-Дону: Рост. ун-т. 1987. 19 с. Библиогр. 10.
13. Гончар Г.В., Юдин А.С., Яценко М.Н. Экономичные алгоритмы расчета собственных и вынужденных колебаний многосвязных подкрепленных оболочек вращения // Механика сплошной среды: Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. 1988. С. 63–66.
  14. Юдин А.С., Юдина Л.М. Колебания соосных связанных подкрепленных оболочек вращения // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1988. № 2. С. 75–79.
  15. Юдин А.С., Шепелева В.Г., Сафроненко В.Г. Влияние коэффициентов потерь элементов подкрепленной оболочки, колеблющейся в жидкости, на ее динамические характеристики // Взаимодействие акустических волн с упругими телами: Всесоюз. симпоз. Таллинн: Таллинск. техн. ун-т, 1989. С. 176–178.
  16. Юдин А.С., Амбалова Н.М. Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью // Приклад. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 63–68.
  17. Гончар Г.В., Епифанова З.Г., Юдин А.С. Повышение эффективности расчетов вынужденных колебаний сложных оболочечных конструкций // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1991. № 3. С. 19–22.
  18. Юдин А.С., Яценко М.Н. Вынужденные колебания подкрепленных оболочек вращения с неосесимметричными жесткостными и массовыми неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 161–166.
  19. Юдин А.С., Яценко М.Н. Метод модального анализа виброакустики составных двумерно-неоднородных подкрепленных оболочек // Фундам. и прикл. проблемы механики деформируемых сред и конструкций. 1993. Вып. 1. С. 157–163.
  20. Ционский А.Я. Излучение и рассеяние звука оболочечными конструкциями // Техн. акустика. 1993. Т. 2. Вып. 3. С. 9–15.
  21. Юдин А.С., Яценко М.Н. Виброакустика оболочки с кольцевыми ребрами переменной жидкости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. 1995. Вып. 2. С. 97–105.
  22. Юдин А.С., Сафроненко В.Г., Шепелева В.Г. Комплексное исследование статики и динамики составной подкрепленной оболочки вращения // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 2-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 1996. Ростов-на-Дону: МП "Книга". 1996. Т. 3. С. 149–155.
  23. Юдин А.С., Яценко М.Н. Модальный метод анализа вынужденных колебаний некруговых цилиндрических оболочек // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 3-й Междунар. научной конф.: Ростов-на-Дону, 1997. Ростов-на-Дону: МП "Книга". 1997. Т. 2. С. 189–193.
  24. Сафроненко В.Г., Юдин А.С. Модальные уравнения вибродинамики композитных структурно-неоднородных оболочек // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 4-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 1998. Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. 1998. Т. 2. С. 154–157.
  25. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии: (Геометрические вопросы теории оболочек). Методическое пособие. Изд-во Казан. ун-та. 1985. 163 с.
  26. Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Снигирев В.Ф. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. М.: Наука, 1989. 208 с.
  27. Вороненко Е.Я., Пайли О.М., Сочинский С.В. Метод редуцированных элементов для расчета конструкций. Л.: Судостроение, 1990. 224 с.
  28. Постнов В.А., Тарануха Н.А. Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1990. 320 с.
  29. Ашик В.В., Богданов А.А., Мараева И.Б., Шебалов А.Н. Методы проектирования и согласования судовой поверхности с помощью ЭВМ. Л.: Судостроение, 1978. 80 с.
  30. Белкин Ю.В. Инженерная графика в судостроении: Справочник. Л.: Судостроение, 1983. 192 с.
  31. Кривошеева Т.Н., Юдин А.С. Параметризация составной оболочки сложной геометрии // Изв. вузов Сев.-Кавказ. Регион. Естеств. науки. 2000. № 1. С. 37–40.