

УДК 539.375

© 2000 г. А.В. АНДРЕЕВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, Ю.В. ЖИТНИКОВ

## РАВНОВЕСИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ РАЗРЕЗОВ С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ ОБЛАСТЕЙ НАЛЕГАНИЯ, СКОЛЬЖЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ

Разрушение материалов и конструкций может сопровождаться реализацией таких напряженно-деформированных состояний, при которых на поверхностях трещин возникают сжимающие напряжения, что приводит к ситуации, когда противоположные берега их смыкаются, налегая друг на друга. Причиной этого может являться как действие внешней нагрузки, так и особенности формы трещины. Так, например, одноосное растяжение упругой плоскости, ослабленной криволинейной трещиной, в ряде случаев вызывает контакт ее берегов [1]. Кроме того, образование областей налегания на поверхностях трещины на границе раздела двух сред может быть обусловлено различием их упругих характеристик [2]. Контакт берегов трещины приводит к перераспределению полей напряжений и смещений в ее окрестности, что оказывает существенное влияние на равновесное состояние. Таким образом, значительный интерес представляет исследование равновесия произвольной криволинейной трещины с возможным контактом берегов в сложно-напряженном состоянии. Следует отметить, что особенностью построения решения такой задачи является необходимость одновременного определения как полей напряжений и смещений, так и неизвестных границ областей налегания и раскрытия, а при наличии трения на поверхности контакта, – границ областей сцепления и взаимных сдвиговых смещений.

Ранее рассматривались пространственные задачи теории упругости о трещинах вдоль криволинейных поверхностей [3]. Проводился также анализ смешанных пространственных задач для плоских в плане трещин с областями налегания [4–7]. В рамках плоской задачи с учетом контактного трения рассматривались случаи прямолинейной трещины конечной длины [8–11] и дугообразной трещины [12, 13]. В [14, 15] исследовались численные методы решения плоских задач о равновесии криволинейных трещин. Для произвольной плоской криволинейной трещины рассматривались [16] предельные случаи гладкого контакта и полного сцепления берегов.

В данной работе исследуется равновесное состояние произвольной плоской криволинейной трещины с учетом контактного трения берегов посредством определения неизвестных областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления и построения соответствующих им полей напряжений и смещений. Предложенный подход допускает обобщение на случай системы криволинейных разрезов, а также может быть использован для анализа эволюции равновесного состояния и роста криволинейной трещины в процессе нагружения.

**1. Постановка граничной задачи.** Рассмотрим граничную задачу линейной теории упругости для бесконечной изотропной плоскости, ослабленной гладким криволинейным разрезом  $L$ . Предположим, что под действием объемных и поверхностных сил на части трещины  $L_f$  имеет место раскрытие ее берегов. При этом в области налегания на некоторой ее части  $L_c$  возникает скольжение, а остальная часть  $L_a$  находится в состоянии сцепления. Пусть  $t$  – переменная точка контура. Граничные

условия на криволинейной трещине  $L$  имеют вид

$$N^+ + iT^+ = N^- + iT^-, (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = 0, t \in L_a \quad (1.1)$$

$$v_n^+ - v_n^- = 0, T^\pm = \rho |N^\pm|, t \in L_c \quad (1.2)$$

$$N^\pm + iT^\pm = 0, t \in L_f \quad (1.3)$$

где  $N^\pm$  и  $T^\pm$  – нормальная и касательная компоненты напряжения на поверхностях трещины,  $u^\pm$  и  $v^\pm$  – компоненты вектора смещений берегов трещины относительно прямоугольной декартовой системы координат,  $\rho = \mu(v_\tau^+ - v_\tau^-) / |v_\tau^+ - v_\tau^-|$ ,  $v_n^\pm$  и  $v_\tau^\pm$  – нормальная и касательная компоненты вектора смещений,  $\mu$  – коэффициент трения Кулона,  $\sqrt{i} = -1$ . В областях реализации того или иного взаимодействия берегов трещины справедливы следующие условия

$$N^\pm < 0, t \in L_c \cup L_a \quad (1.4)$$

$$\mu |N^\pm| > |T^\pm|, t \in L_a \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что напряжения и смещения являются непрерывными функциями координат.

**2. Основные уравнения.** На основании соотношения [16, с. 18]:

$$\frac{d}{dt} [(u + iv)^+ - (u + iv)^-] = \frac{i(1 + \kappa)}{2G} g'(t), t \in L \quad (2.1)$$

где  $u^\pm$  и  $v^\pm$  – компоненты вектора смещений берегов трещины, представим производную от скачков смещений на трещине  $g'(t)$  в виде суммы двух функций

$$g'(t) = \varphi'_n(t) + \varphi'_\tau(t) \quad (2.2)$$

выражающихся, соответственно, через скачки нормальных  $v_n^\pm$  и касательных  $v_\tau^\pm$  компонент смещений на контуре  $L$ :

$$\varphi_n(t) = \frac{2G}{1 + \kappa} (v_n^+ - v_n^-) \frac{dt}{ds} \quad (2.3)$$

$$\varphi_\tau(t) = -\frac{2iG}{1 + \kappa} (v_\tau^+ - v_\tau^-) \frac{dt}{ds} \quad (2.4)$$

Здесь  $\kappa = 3 - 4\nu$  при плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  при плоском напряженном состоянии,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $G$  – модуль сдвига,  $s$  – параметр длины дуги.

Предположим, что под действием внешней нагрузки вдоль некоторого множества дуг имеют место взаимные сдвиговые смещения берегов трещины, а на определенных участках контура возникает раскрытие. Совокупность частей контура  $L$ , вдоль которых имеют место взаимные сдвиговые смещения берегов трещины ( $t \in L_c \cup L_f$ ) обозначим  $(a_d, b_d)$  ( $d = 1, 2, \dots, N_{cr}$ ), а участки контура, вдоль которых возникает раскрытие ( $t \in L_f$ ), обозначим  $(c_r, f_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, N_{fr}$ );  $N_{cr}$  и  $N_{fr}$  количество областей взаимных сдвиговых смещений и областей раскрытия соответственно.

В зоне сцепления взаимные смещения не возникают, а напряжения непрерывны, поэтому она будет рассматриваться как континуум. В соответствии с этим, удовлетворяя граничным условиям (1.2) и (1.3) с помощью известных интегральных представлений комплексных потенциалов (см., например, [16, с. 18]), с учетом соотношений (2.2), (2.3) и (2.4) получим систему  $N_{fr} + N_{cr}$  сингулярных интегральных

уравнений

$$\Omega(t') = 0, \quad t' \in L_f \quad (2.5)$$

$$\text{Im} \Omega(t') = \rho |\text{Re} \Omega(t')|, \quad t' \in L_c \quad (2.6)$$

для определения значения функции  $\varphi'_n(t)$  на  $N_{fr}$  участках  $(c_r, f_r)$  и функции  $\varphi'_\tau(t)$  на  $N_{cr}$  участках  $(a_d, b_d)$ . Здесь

$$\begin{aligned} \Omega(t') = & \frac{1}{2\pi} \int_{L_f} \left[ \frac{2\varphi'_n(t)}{t-t'} dt + k_1(t, t') \varphi'_n(t) dt + k_2(t, t') \overline{\varphi'_n(t)} dt \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{L_f \cup L_c} \left[ \frac{2\varphi'_\tau(t)}{t-t'} dt + k_1(t, t') \varphi'_\tau(t) dt + k_2(t, t') \overline{\varphi'_\tau(t)} dt \right] - p_0(t') \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $p_0(t) = -N_0 - iT_0$ ,  $N_0$  и  $T_0$  – напряжения на линии разреза в сплошной плоскости, а регулярные ядра  $k_1(t, t')$  и  $k_2(t, t')$  определены соотношениями

$$k_1(t, t') = \frac{d}{dt'} \ln \frac{t-t'}{\bar{t}-\bar{t}'}, \quad k_2(t, t') = -\frac{d}{dt'} \frac{t-t'}{\bar{t}-\bar{t}'} \quad (2.8)$$

Система интегральных уравнений (2.5), (2.6) имеет единственное решение в классе функций, не ограниченных на концах контуров интегрирования, при выполнении  $N_{fr} + N_{cr}$  дополнительных условий

$$\int_{(c_r, f_r)} \varphi'_n(t) dt = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N_{fr}) \quad (2.9)$$

$$\int_{(a_d, b_d)} \varphi'_\tau(t) dt = 0 \quad (d = 1, 2, \dots, N_{cr}) \quad (2.10)$$

которые обеспечивают однозначность соответствующих компонент смещений при обходе контуров  $L_c \cup L_f$  и  $L_f$ , а также равенств, следующих из соотношений (2.3) и (2.4) в силу вещественности поля смещений

$$\text{Im}[\varphi_n(t) d\bar{t} / ds] = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Re}[\varphi_\tau(t) d\bar{t} / ds] = 0 \quad (2.12)$$

Перепишем систему (2.5), (2.6) в виде

$$\text{Re} \Omega(t') = 0, \quad t' \in L_f \quad (2.13)$$

$$\text{Im} \Omega(t') = \rho |\text{Re} \Omega(t')|, \quad t' \in L_c \cup L_f \quad (2.14)$$

Отметим, что уравнение (2.13) выполняется на  $t \in L_f$ , а уравнение (2.14) – на  $t \in L_c \cup L_f$ . Поскольку функции  $\varphi_n(t)$  и  $\varphi_\tau(t)$  определены на тех же множествах значений  $t$  соответственно, это позволяет предложить итерационный алгоритм последовательного нахождения областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления и определить нормальную и касательную компоненты смещения берегов трещины.

**3. Алгоритм расчета неизвестных границ.** Алгоритм основан на установленном в [7] свойстве непрерывности скачков смещений на трещине при малой вариации как нагрузки, так и областей раскрытия и взаимных сдвиговых смещений. В данном случае, малая вариация границ каждой из областей приводит к малой вариации поля смещений.

За начальное приближение примем значения областей  $(a_d^{(0)}, b_d^{(0)})$ ,  $(c_r^{(0)}, f_r^{(0)})$ , определяемые из условий (1.4) и (1.5), в которых в качестве нормальной и касательной компонент напряжения выбираются напряжения  $N_0$  и  $T_0$  на линии разреза в

сплошной плоскости. Далее, на основе решения задачи (2.9)–(2.14), определяем коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) на границах областей раскрытия берегов трещины [16, с. 22]:

$$k_1^\pm = \mp \lim_{t \rightarrow l_r^\pm} \left[ \sqrt{2|t - l_r^\pm|} \operatorname{Re} g'(t) \right] \quad (r = 1, 2, \dots, N_{\text{fr}}) \quad (3.1)$$

и на границах областей взаимных сдвиговых смещений

$$k_2^\pm = \pm \lim_{t \rightarrow l_d^\pm} \left[ \sqrt{2|t - l_d^\pm|} \operatorname{Im} g'(t) \right] \quad (d = 1, 2, \dots, N_{\text{ср}}) \quad (3.2)$$

Здесь нижние знаки относятся к левому концу области (началу)  $t = c_r = l_r^-$  и  $t = a_d = l_d^-$ , а верхние – к правой (концу)  $t = f_r = l_r^+$  и  $t = b_d = l_d^+$ . В общем случае  $k_1^{\pm(0)} \neq 0$  и  $|k_2^{\pm(0)}| > 0$ . Следует отметить, что области раскрытия и области взаимных сдвиговых смещений не могут иметь общих граничных точек, за исключением случая, когда область раскрытия примыкает к одному из концов трещины. Действительно, область раскрытия всегда содержится в области взаимных сдвиговых смещений, при этом, однако, область взаимных сдвиговых смещений может не содержать в себе область раскрытия [4, 7]. Следствием этого является невозможность возникновения общей границы областей раскрытия и сцепления.

Поскольку сингулярные положительные нормальные напряжения на разрезе в окрестности границы области свободной поверхности всегда приведут к раскрытию сжатого участка трещины, и, напротив, отрицательные напряжения приведут к сжатию раскрытого участка [12, 13], на этих границах строится несингулярное решение согласно следующему алгоритму. В случае, если  $k_1^{\pm(0)} > 0$ , соответствующую границу области раскрытия следует переместить на малую величину  $\delta_1$  в направлении примыкающей к ней области налегания, и, напротив, если  $k_1^{\pm(0)} < 0$ , границу области следует переместить в противоположном направлении. Данное правило является следствием того, что знак нормальной компоненты напряжения вблизи границ областей раскрытия определяется главным членом асимптотического разложения.

Аналогично, сингулярные сдвиговые напряжения вблизи границы области скольжения всегда приведут к относительному сдвигу поверхностей разреза [12, 13]. Как следствие, границы областей взаимных сдвиговых смещений следует переместить на малую величину  $\delta_2$  в направлении скольжения в соответствии со свойством непрерывности изменения скачка сдвиговых смещений при малой вариации границы области скольжения [7]. При этом адекватным является такое изменение положения границ, при котором  $|k_2^{\pm(i+1)}| < |k_2^{\pm(i)}|$  ( $i$  – номер итерации).

Таким образом, на  $i$ -ом итерационном шаге проводится решение задачи (2.9)–(2.14) с расчетом КИН на границах областей  $(a_d^{(i)}, b_d^{(i)})$ ,  $(c_r^{(i)}, f_r^{(i)})$  и, в соответствии с вышеизложенными правилами, определяется новое положение границ областей  $(a_d^{(i+1)}, b_d^{(i+1)})$ ,  $(c_r^{(i+1)}, f_r^{(i+1)})$ . Расчет заканчивается, когда коэффициенты интенсивности напряжений на границах областей раскрытия и скольжения, которые не совпадают с концами трещины, становятся равными нулю с заданной точностью.

Отметим, что для улучшения точности вычислений положения неизвестных границ целесообразно в процессе расчета уменьшать величины вариаций границ  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Изменяя начальные величины вариаций границ и законы их уменьшения можно добиться односторонней сходимости итерационного процесса, т.е. не изменять направление перемещения границ областей раскрытия и скольжения в процессе их уточне-

ния. Однако, как показывает численный расчет, необходимая точность может быть достигнута достаточно быстро в неодностороннем процессе.

**4. Численная реализация решения.** Пусть форма гладкого криволинейного разреза  $L$  определяется параметрическим уравнением

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad |\xi| \leq 1 \quad (4.1)$$

Тогда переменная точка контура представляется в следующем виде

$$t = \omega(\xi) = x(\xi) + iy(\xi), \quad t' = \omega(\eta) \quad (4.2)$$

Отметим, что для гладких контуров функции  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$  имеют непрерывные производные  $x'(\xi)$ ,  $y'(\xi)$ , которые не обращаются одновременно в нуль.

Обозначим промежутки изменения параметра  $\xi$ , соответствующие вышеуказанным участкам контура  $(a_d, b_d)$  и  $(c_r, f_r)$ , через  $(\xi_d^-, \xi_d^+)$  ( $d = 1, 2, \dots, N_{cr}$ ) и  $(\xi_r^-, \xi_r^+)$  ( $r = 1, 2, \dots, N_{fr}$ ), соответственно. Таким образом, используя замену переменных (4.2) и сохраняя обозначения неизвестных функций, выражение (2.7) можно преобразовать к виду

$$\Omega(\eta) = \frac{1}{\pi \omega'(\eta)} \left\{ \sum_{r=1}^{N_{fr}} \int_{\xi_r^-}^{\xi_r^+} [K(\xi, \eta) \varphi_n'(\xi) + L(\xi, \eta) \overline{\varphi_n'(\xi)}] d\xi + \sum_{d=1}^{N_{cr}} \int_{\xi_d^-}^{\xi_d^+} [K(\xi, \eta) \varphi_n'(\xi) + L(\xi, \eta) \overline{\varphi_n'(\xi)}] d\xi \right\} - p_0(\eta), \quad |\eta| < 1 \quad (4.3)$$

Здесь  $p_0(\eta) = p_0(\omega(\eta))$ , а интегральные ядра имеют следующий вид

$$K(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \frac{\omega'(\eta)}{\omega(\xi) - \omega(\eta)}, \quad L(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\omega(\xi) - \overline{\omega(\eta)}} \quad (4.4)$$

Будем полагать, что ядро  $K(\xi, \eta)$  можно представить в виде

$$K(\xi, \eta) = 1/(\xi - \eta) + k(\xi, \eta)$$

при этом ядра  $k(\xi, \eta)$ ,  $L(\xi, \eta)$  и свободный член  $p_0(\eta)$  – непрерывные на отрезке  $[-1, 1]$  функции своих аргументов.

Перепишем выражение (4.3) в виде

$$\Omega(\eta) = -p_0(\eta) + \frac{1}{\pi \omega'(\eta)} \left\{ \sum_{r=1}^{N_{fr}} \Delta_r \int_{-1}^1 [K(\xi(\hat{\xi}_r), \eta) \varphi_n'(\xi(\hat{\xi}_r)) + L(\xi(\hat{\xi}_r), \eta) \overline{\varphi_n'(\xi(\hat{\xi}_r))}] d\hat{\xi}_r + \sum_{d=1}^{N_{cr}} \Delta_d \int_{-1}^1 [K(\xi(\hat{\xi}_d), \eta) \varphi_n'(\xi(\hat{\xi}_d)) + L(\xi(\hat{\xi}_d), \eta) \overline{\varphi_n'(\xi(\hat{\xi}_d))}] d\hat{\xi}_d \right\} \quad (4.5)$$

$$\xi(\hat{\xi}_\gamma) = \Sigma_\gamma + \hat{\xi}_\gamma \Delta_\gamma \quad (4.6)$$

$$\Sigma_\gamma = (\xi_\gamma^+ + \xi_\gamma^-) / 2, \quad \Delta_\gamma = (\xi_\gamma^+ - \xi_\gamma^-) / 2 \quad (\gamma = r, d)$$

Введем вспомогательные функции

$$u_n(\xi(\hat{\xi}_r)) = \varphi_n'(\xi(\hat{\xi}_r)) \sqrt{1 - \hat{\xi}_r^2} \quad (r = 1, 2, \dots, N_{fr}) \quad (4.7)$$

$$u_n(\xi(\hat{\xi}_d)) = \varphi_n'(\xi(\hat{\xi}_d)) \sqrt{1 - \hat{\xi}_d^2} \quad (d = 1, 2, \dots, N_{cr})$$

которые непрерывны в областях своего определения.

Для численного решения интегральных уравнений (2.13), (2.14) воспользуемся квадратурными формулами Гаусса [16, с. 53]. Для сингулярного интеграла имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-\eta)\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k)}{\xi_k-\eta} + \pi f(\eta) \frac{U_{n-1}(\eta)}{T_n(\eta)}, \quad |\eta| < 1 \quad (4.8)$$

где  $U_{n-1}(\eta) = \sin(n \arccos \eta) / \sqrt{1-\eta^2}$  – полином Чебышева второго рода, а корни полинома Чебышева первого рода  $T_n(\xi) = \cos(n \arccos \xi)$  являются множеством значений  $\xi_k$ , т.е.

$$\xi_k = \cos[\pi(2k-1)/2n] \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.9)$$

Обычная квадратурная формула Гаусса имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \quad (4.10)$$

Для нахождения функции  $f(\xi)$  по узлам  $\xi_k$  следует использовать интерполяционный полином Лагранжа [16, с. 54]

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f(\xi_k) \frac{T_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_k} \quad (4.11)$$

Применив квадратурные формулы (4.8) и (4.10) к выражению (4.5), с учетом (4.7) и (4.11), получим

$$\Omega(\eta) = -p_0(\eta) + \quad (4.12)$$

$$+ \frac{1}{\omega'(\eta)} \left\{ \sum_{r=1}^{N_{fr}} \frac{\Delta_r}{N_{fr}^{(r)}} \sum_{k=1}^{N_{fr}^{(r)}} [(K(\xi_{kr}, \eta) + M_k^{(r)}(\xi_{kr}, \eta))u_n(\xi_{kr}) + L(\xi_{kr}, \eta)\overline{u_n(\xi_{kr})}] + \right. \\ \left. + \sum_{d=1}^{N_{cr}} \frac{\Delta_d}{N_{cr}^{(d)}} \sum_{j=1}^{N_{cr}^{(d)}} [(K(\xi_{jd}, \eta) + M_j^{(d)}(\xi_{jd}, \eta))u_\tau(\xi_{jd}) + L(\xi_{jd}, \eta)\overline{u_\tau(\xi_{jd})}] \right\}$$

где  $N_{fr}^{(r)}$  – число точек, выбираемое для представления соответствующего интеграла в виде суммы, на участке раскрытия с номером  $r$ ,  $N_{cr}^{(d)}$  – число точек на участке без сцепления с номером  $d$ , ядра

$$M_k^{(r)}(\xi_{kr}, \eta) = \begin{cases} (-1)^k U_{N_{fr}^{(r)}-1} \left( \frac{\eta - \Sigma_r}{\Delta_r} \right) \frac{\sqrt{1-\hat{\xi}_{kr}^2}}{\xi_{kr}-\eta}, & \eta \in (\xi_r^-, \xi_r^+) \\ 0, & |\eta| < 1, \quad \eta \notin (\xi_r^-, \xi_r^+) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$M_j^{(d)}(\xi_{jd}, \eta) = \begin{cases} (-1)^j U_{N_{cr}^{(d)}-1} \left( \frac{\eta - \Sigma_d}{\Delta_d} \right) \frac{\sqrt{1-\hat{\xi}_{jd}^2}}{\xi_{jd}-\eta}, & \eta \in (\xi_d^-, \xi_d^+) \\ 0, & |\eta| < 1, \quad \eta \notin (\xi_d^-, \xi_d^+) \end{cases}$$

а параметры  $\xi_{kr}$  и  $\xi_{jd}$  принимают значения

$$\xi_{kr} = \Sigma_r + \hat{\xi}_{kr} \Delta_r \quad (4.14)$$

$$\hat{\xi}_{kr} = \cos[\pi(2k-1)/2N_{fr}^{(r)}] \quad (k = 1, 2, \dots, N_{fr}^{(r)}, \quad r = 1, 2, \dots, N_{fr})$$

$$\xi_{jd} = \Sigma_d + \hat{\xi}_{jd} \Delta_d \quad (4.15)$$

$$\hat{\xi}_{jd} = \cos[\pi(2j-1)/2N_{cr}^{(d)}] \quad (j=1,2,\dots,N_{cr}^{(d)}, \quad d=1,2,\dots,N_{cr})$$

Отметим, что представление (4.12) позволяет независимо характеризовать раскрытие и сдвиг поверхностей трещины в каждой из областей, где они имеют место.

Рассмотрим группу уравнений (2.9) – (2.12). В соответствии с квадратурной формулой (4.10) интегралы (2.9) и (2.10) преобразуются к виду

$$\sum_{k=1}^{N_{fr}^{(r)}} u_n(\xi_{kr}) = 0 \quad (r=1,2,\dots,N_{fr}) \quad (4.16)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{cr}^{(d)}} u_n(\xi_{jd}) = 0 \quad (d=1,2,\dots,N_{cr}) \quad (4.17)$$

Равенства (2.11) и (2.12), в силу вышеизложенной дискретизации, следует переписать в виде

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\hat{\eta}_{mn}}{\omega'(\eta_{mn})} \int_{-1}^{\hat{\eta}_{mn}} \frac{u_n(\xi(\hat{\xi}_n))}{\sqrt{1-\hat{\xi}_n^2}} d\hat{\xi}_n \right] = 0$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\hat{\eta}_{ls}}{\omega'(\eta_{ls})} \int_{-1}^{\hat{\eta}_{ls}} \frac{u_\tau(\xi(\hat{\xi}_s))}{\sqrt{1-\hat{\xi}_s^2}} d\hat{\xi}_s \right] = 0$$

$$\eta_{mn} = \Sigma_n + \hat{\eta}_{mn} \Delta_n \quad (4.18)$$

$$\hat{\eta}_{mn} = \cos[\pi m / N_{fr}^{(n)}] \quad (m=1,2,\dots,N_{fr}^{(n)}-1, \quad n=1,2,\dots,N_{fr}) \quad (4.19)$$

$$\eta_{ls} = \Sigma_s + \hat{\eta}_{ls} \Delta_s,$$

$$\hat{\eta}_{ls} = \cos[\pi l / N_{cr}^{(s)}] \quad (l=1,2,\dots,N_{cr}^{(s)}-1, \quad s=1,2,\dots,N_{cr})$$

Используя интерполяционный полином Лагранжа (4.11), окончательно получим следующие уравнения

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\hat{\eta}_{mn}}{\omega'(\eta_{mn})} \sum_{\beta=1}^{N_{fr}^{(n)}} (-1)^{\beta+1} \sqrt{1-\hat{\xi}_{\beta n}^2} u_n(\xi_{\beta n}) I_{mn}^{(\beta)} \right] = 0 \quad (4.20)$$

$$(m=1,2,\dots,N_{fr}^{(n)}-1, \quad n=1,2,\dots,N_{fr})$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\hat{\eta}_{ls}}{\omega'(\eta_{ls})} \sum_{\gamma=1}^{N_{cr}^{(s)}} (-1)^{\gamma+1} \sqrt{1-\hat{\xi}_{\gamma s}^2} u_\tau(\xi_{\gamma s}) I_{ls}^{(\gamma)} \right] = 0 \quad (4.21)$$

$$(l=1,2,\dots,N_{cr}^{(s)}-1, \quad s=1,2,\dots,N_{cr})$$

Здесь и далее интегралы  $I_{mn}^{(\beta)}$  и  $I_{ls}^{(\gamma)}$  имеют вид

$$I_{mn}^{(\beta)} = \int_{-1}^{\hat{\eta}_{mn}} \frac{T_{N_{fr}^{(n)}}(\hat{\xi}_n) d\hat{\xi}_n}{(\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_{\beta n}) \sqrt{1-\hat{\xi}_n^2}}, \quad I_{ls}^{(\gamma)} = \int_{-1}^{\hat{\eta}_{ls}} \frac{T_{N_{cr}^{(s)}}(\hat{\xi}_s) d\hat{\xi}_s}{(\hat{\xi}_s - \hat{\xi}_{\gamma s}) \sqrt{1-\hat{\xi}_s^2}}$$

и находятся численно, методом параболических трапеций Симпсона.

Для получения замкнутой системы уравнения (2.13) и (2.14) следует переписать в виде

$$\operatorname{Re}\Omega(\eta_{mn}) = 0 \quad (4.22)$$

$$\operatorname{Im}\Omega(\eta_{ls}) = \rho|\operatorname{Re}\Omega(\eta_{ls})| \quad (4.23)$$

Здесь  $\Omega(\eta)$  имеет вид (4.12), а множество значений  $\eta_{mn}$  и  $\eta_{ls}$  дается выражениями (4.18) – (4.19).

Система уравнений (4.16) – (4.17), (4.20) – (4.23) позволяет однозначно определить неизвестные функции  $u_n(\xi_{kr})$  и  $u_\tau(\xi_{jd})$ , и в соответствии с формулами

$$k_1^\pm = \mp \sqrt{\Delta_r} \frac{|\omega'(\xi_r^\pm)| u_n(\xi_r^\pm) / \omega'(\xi_r^\pm)}{\omega'(\xi_r^\pm)} \quad (r=1, 2, \dots, N_{\text{fr}})$$

$$k_2^\pm = \mp i \sqrt{\Delta_d} \frac{|\omega'(\xi_d^\pm)| u_\tau(\xi_d^\pm) / \omega'(\xi_d^\pm)}{\omega'(\xi_d^\pm)} \quad (r=1, 2, \dots, N_{\text{cr}})$$

которые следуют из (3.1) и (3.2), рассчитать коэффициенты интенсивности напряжений. Используя интерполяционный полином Лагранжа (4.11), получим

$$k_1(c_r) = \frac{\sqrt{\Delta_r} |\omega'(\xi_r^-)|}{\omega'(\xi_r^-)} \frac{1}{N_{\text{fr}}^{(r)}} \sum_{k=1}^{N_{\text{fr}}^{(r)}} (-1)^{k+N_{\text{fr}}^{(r)}} u_n(\xi_{kr}) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4N_{\text{fr}}^{(r)}} \pi$$

$$k_1(f_r) = \frac{\sqrt{\Delta_r} |\omega'(\xi_r^+)|}{\omega'(\xi_r^+)} \frac{1}{N_{\text{fr}}^{(r)}} \sum_{k=1}^{N_{\text{fr}}^{(r)}} (-1)^k u_n(\xi_{kr}) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4N_{\text{fr}}^{(r)}} \pi \quad (r=1, 2, \dots, N_{\text{fr}}) \quad (4.24)$$

$$k_2(a_d) = i \frac{\sqrt{\Delta_d} |\omega'(\xi_d^-)|}{\omega'(\xi_d^-)} \frac{1}{N_{\text{cr}}^{(d)}} \sum_{j=1}^{N_{\text{cr}}^{(d)}} (-1)^{j+N_{\text{cr}}^{(d)}} u_\tau(\xi_{jd}) \operatorname{tg} \frac{2j-1}{4N_{\text{cr}}^{(d)}} \pi$$

$$k_2(b_d) = i \frac{\sqrt{\Delta_d} |\omega'(\xi_d^+)|}{\omega'(\xi_d^+)} \frac{1}{N_{\text{cr}}^{(d)}} \sum_{j=1}^{N_{\text{cr}}^{(d)}} (-1)^j u_\tau(\xi_{jd}) \operatorname{ctg} \frac{2j-1}{4N_{\text{cr}}^{(d)}} \pi \quad (d=1, 2, \dots, N_{\text{cr}}) \quad (4.25)$$

После определения неизвестных границ областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления скачки смещений определим по формулам

$$v_n^+ - v_n^- = \frac{1+\kappa}{2G} \frac{\Delta_n}{N_{\text{fr}}^{(n)}} \frac{|\omega'(\eta_{mn})|}{\omega'(\eta_{mn})} \sum_{\beta=1}^{N_{\text{fr}}^{(n)}} (-1)^{\beta+1} \sqrt{1 - \hat{\xi}_{\beta n}^2} u_n(\xi_{\beta n}) I_{mn}^{(\beta)} \quad (4.26)$$

$$t = \omega(\eta_{mn}) \quad (m=1, 2, \dots, N_{\text{fr}}^{(n)} - 1, \quad n=1, 2, \dots, N_{\text{fr}})$$

$$v_\tau^+ - v_\tau^- = -\frac{1+\kappa}{2iG} \frac{\Delta_s}{N_{\text{cr}}^{(s)}} \frac{|\omega'(\eta_{ls})|}{\omega'(\eta_{ls})} \sum_{\gamma=1}^{N_{\text{cr}}^{(s)}} (-1)^{\gamma+1} \sqrt{1 - \hat{\xi}_{\gamma s}^2} u_\tau(\xi_{\gamma s}) I_{ls}^{(\gamma)} \quad (4.27)$$

$$t = \omega(\eta_{ls}) \quad (l=1, 2, \dots, N_{\text{cr}}^{(s)} - 1, \quad s=1, 2, \dots, N_{\text{cr}})$$

Напряжения на берегах трещины

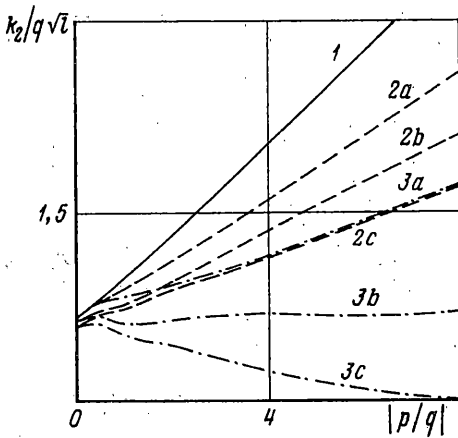
$$N + iT|_{r=\omega(\eta)} = -p_0(\eta) + \quad (4.28)$$

$$+ \frac{1}{\omega'(\eta)} \left\{ \sum_{r=1}^{N_{\text{fr}}} \frac{\Delta_r}{N_{\text{fr}}^{(r)}} \sum_{k=1}^{N_{\text{fr}}^{(r)}} [(K(\xi_{kr}, \eta) + M_k^{(r)}(\xi_{kr}, \eta)) u_n(\xi_{kr}) + L(\xi_{kr}, \eta) \overline{u_n(\xi_{kr})}] + \right.$$

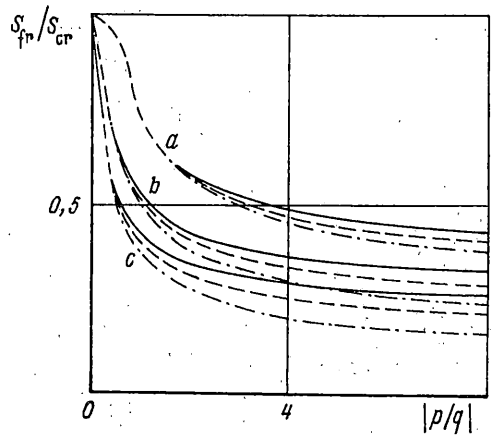
$$\left. + \sum_{d=1}^{N_{\text{cr}}} \frac{\Delta_d}{N_{\text{cr}}^{(d)}} \sum_{j=1}^{N_{\text{cr}}^{(d)}} [(K(\xi_{jd}, \eta) + M_j^{(d)}(\xi_{jd}, \eta)) u_\tau(\xi_{jd}) + L(\xi_{jd}, \eta) \overline{u_\tau(\xi_{jd})}] \right\}$$

Здесь значения параметра  $|\eta| < 1$  определяются только необходимой точностью опре-





Фиг. 1



Фиг. 2

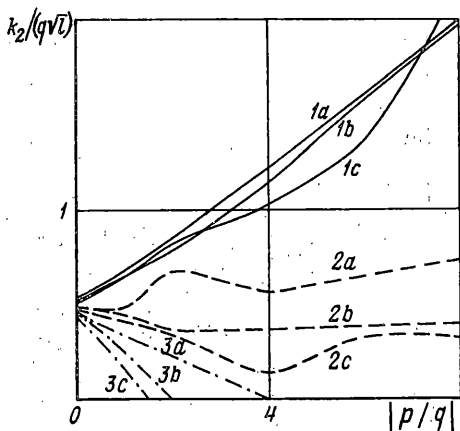
деления напряжений по построенному приближенному полю перемещений. Расчет нормальной и касательной компонент напряжения на поверхностях трещины позволяет осуществить проверку адекватности положения границ областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления в соответствии с (1.4), (1.5).

Отметим, что предлагаемый метод численной реализации можно использовать для решения ряда других задач о равновесии трещин с областями контакта, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению первого рода с ядром Коши (или системе таких уравнений). В случае краевых трещин в ограниченных или полугограниченных областях для перехода от сингулярного интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений следует использовать квадратурную формулу для функции, ограниченной на одном из концов промежутка интегрирования [17].

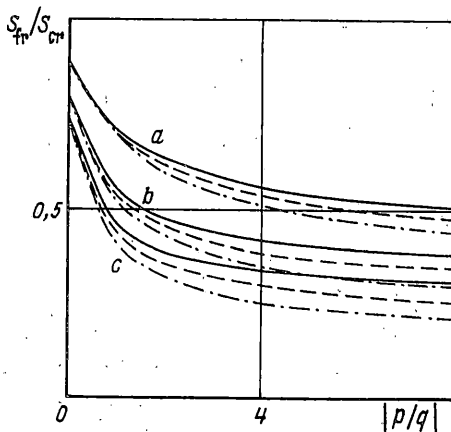
**5. Результаты расчета.** В качестве примера рассмотрим задачи о равновесии криволинейных разрезов заданной геометрии в бесконечной плоскости, с учетом образования областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления. На бесконечности действуют во взаимно перпендикулярных направлениях напряжения  $p, q$  ( $p \leq 0, q > 0$ ), причем  $p$  направлено под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Рассмотрим два вида разрезов – в форме дуги параболы и в форме полуэллипса. При этом для параболы (4.2) принимает вид  $\omega(\xi) = l[\xi + i\varepsilon(\xi^2 - 1)]$ , а для полуэллипса  $\omega(\xi) = l[2\xi - i\varepsilon(1 - \xi^2)]/(1 + \xi^2)$ . В обоих случаях параметр  $\varepsilon$  характеризует кривизну трещины с вершинами в точках  $(\pm l, 0)$ , проходящей через точку  $(0, -i\varepsilon)$ .

На фигурах представлены расчетные зависимости коэффициента интенсивности напряжений  $k_2$ , длины области свободной поверхности и длины области взаимных сдвиговых смещений от отношения  $p/q$  ( $\alpha = 0$ ). Отметим, что зоны раскрытия и скольжения поверхностей указанных разрезов симметричны относительно оси  $Ox$  при  $\alpha = 0$ , при этом  $k_2^\pm = \pm k_2$ . Для всех параметров расчета, за исключением одноосного растяжения параболического разреза, вблизи вершин трещины образуются зоны контакта, вследствие чего  $k_1^\pm = 0$ . Увеличение отношения  $p/q$  (при  $p \neq 0$ ) приводит к возникновению в зонах налегания областей сцепления, примыкающих к концам трещины.

На фиг. 1 приведены результаты расчета коэффициента интенсивности напряжений  $k_2$  (отнесенного к  $q\sqrt{l}$ ) на концах криволинейного разреза по дуге параболы. Расчет проводился для различных величин коэффициента трения: сплошные кривые (1) –  $\mu = 0$ , штриховые (2) –  $\mu = 0,2$ , штрихпунктирные (3) –  $\mu = 0,4$ . Приведена также зависимость КИН от величины  $\varepsilon$ : кривые (a) построены для  $\varepsilon = 1$ , кривые (b) – для  $\varepsilon = 1,5$ , кривые (c) – для  $\varepsilon = 2$ . При отсутствии трения КИН уменьшается с ростом



Фиг. 3



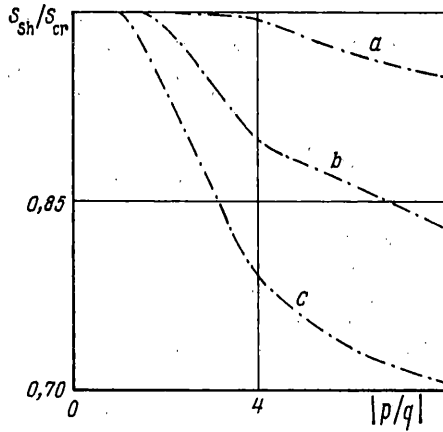
Фиг. 4

величины  $\epsilon$ , однако, для расчетных значений  $1 \leq \epsilon \leq 2$ , весьма слабо, в пределах 5%, поэтому соответствующие зависимости не приведены на фиг. 1. Отметим, что при увеличении коэффициента трения в зависимости КИН от отношения  $p/q$  появляется слабая нелинейность.

На фиг. 2 приведены результаты расчета длины области свободной поверхности  $S_{fr}$  (отнесенной к полной длине трещины  $S_{cr}$ ), полученные для этой же задачи. Маркировка кривых и ее соответствие значениям параметров расчета то же, что и на фиг. 1. Отметим, что в рамках каждой группы кривых ( $a$ ,  $b$  и  $c$ ), полученной для различных значений кривизны  $\epsilon$ , наблюдается монотонное уменьшение длины области свободной поверхности с ростом коэффициента трения. Размер каждой из областей налегания  $S_{cont} = (S_{cr} - S_{fr})/2$ . Относительная длина области взаимных сдвиговых смещений при  $\mu = 0,4$ ;  $\epsilon = 2$ ;  $|p/q| = 8$  составляет  $S_{sh}/S_{cr} = 0,958$ .

Аналогичные результаты расчета для полуэллипса приведены на фиг. 3 и 4. Маркировка кривых и параметры расчета те же, что и для параболического разреза. Следует отметить, что контактные напряжения большой величины, близкие к напряжениям сцепления, и ориентация концов разреза существенно меняют характер зависимости между КИН и напряжениями на бесконечности. Так, зависимость  $k_2$  от отношения  $p/q$  становится сильно нелинейной. Кроме того, зоны сцепления образуются вблизи вершин трещины уже при  $p/q > 4$  ( $\epsilon = 1$ ). Отметим, что при  $p = 0$  вблизи вершин трещины образуются небольшие зоны контакта, размер которых очень слабо зависит от величины коэффициента трения, чего не наблюдалось для параболического разреза. Это означает, что одноосное растяжение на бесконечности может приводить к образованию областей налегания на берегах криволинейной трещины-разреза, что отмечалось в [1]. На фиг. 5 также приведены результаты расчета длины области взаимных сдвиговых смещений  $S_{sh}$  (отнесенной к полной длине трещины  $S_{cr}$ ). Как отмечалось выше, вблизи вершин трещины возникают области сцепления, размер которых увеличивается с ростом отношения  $p/q$ . Длина каждой из областей сцепления  $S_{ad} = (S_{cr} - S_{sh})/2$ .

Следует отметить одну из особенностей решения, связанную с криволинейностью формы трещины и, как следствие, невозможностью разделения задачи на нормальную и сдвиговую. В [6] исследовались свойства пространственных смешанных задач теории упругости о полостях с областями налегания поверхности. Для таких задач было показано, что при выборе начального приближения, аналогичном изложенному в п. 3, область раскрытия, соответствующая равновесному состоянию, содержит в себе область раскрытия начального приближения, т.е.  $L_f^{(eq)} \supset L_f^{(0)}$ .



Фиг. 5

В данном же случае указанное свойство может и не выполняться, т.е. могут существовать напряженно-деформированные состояния, для которых  $L_f^{(0)} \supset L_f^{(eq)}$ . Примером такого состояния, помимо вышеупомянутого одноосного растяжения полуэллиптического разреза, служит слабое сжатие при большой кривизне трещины с образованием одной зоны контакта (параболический разрез,  $\alpha = \pi/2$ ,  $\varepsilon = 2$ ,  $0 < |p/q| \leq 2$ ).

Предлагаемый численный метод решения задач двумерной теории упругости и его программная реализация позволяют проанализировать широкий класс задач о равновесии криволинейных трещин с контактирующими берегами в сложнапряженном состоянии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р.В., Савова Л.Н. Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 69–78.
2. Cotinon M. Interface crack with friction in the contact zone // Trans ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 780–781.
3. Линьков А.М., Могилевская С.Г. Конечночастные интегралы в задачах о пространственных трещинах // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 844–850.
4. Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 276–285.
5. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 826–834.
6. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Численно-аналитический метод решения пространственных смешанных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. Ч. 1. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 75–85.
7. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Анализ процесса скольжения поверхностей трещины с учетом сил трения при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 139–148.
8. Walsh J.V. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. № 2. P. 399–411.
9. Житников Ю.В., Тулинов Б.М. Взаимодействие между берегами разреза в сложнапряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 168–172.
10. Беркович Л.Е., Моссаковский В.И., Рыбка В.М. Влияние истории внешнего нагружения на напряженно-деформированное состояние трещиноватой среды при наличии трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 137–142.

11. *Chau K.T., Wang Y.B.* Singularity analysis and boundary integral equation method for frictional crack problems in two-dimensional elasticity // Intern. J. Fracture. 1998. V. 90. № 3. P. 251–274.
12. *Житников Ю.В., Тулинов Б.М.* Равновесие разреза по дуге окружности в сложно-напряженном состоянии // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 521–524.
13. *Житников Ю.В., Тулинов Б.М.* Равновесие разреза по дуге окружности при неоднородном взаимодействии берегов // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 874–880.
14. *Линьков А.М., Могилевская С.Г.* Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 116–122.
15. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
16. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
17. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.01.2000