МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.374

© 2000 г. Д.Д. ИВЛЕВ, Л.А. МАКСИМОВА

О ВДАВЛИВАНИИ ИНДЕНТОРА В ИДЕАЛЬНУЮ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКУЮ ПОЛОСУ

Предельное состояние идеального жесткопластического тела при одной и той же предельной нагрузке может допускать различную кинематику деформирования. На эти возможности указал Хилл [1], на примере решения Прандтля о вдавливании жесткого штампа в пластическое полупространство. В дальнейшем это обстоятельство обсуждалось в [2–5]. Онат и Прагер [6] рассмотрели кинематику течения растягиваемой полосы из идеального жесткопластического материала, когда пластическое течение локализуется в виде шейки. Ниже рассматриваются обобщения течения, приведенного в [6], применительно к вдавливанию индентора в полосу из идеального жесткопластического материала. В пределе имеет место решение Оната и Прагера [6]. Отметим решение задачи о полосе с возмущенными границами, данное А.Ю. Ишлинским [7].

1. Рассмотрим течение плоской полосы шириной $2h$ из идеального жесткопластического материала (фиг. 1). Условие пластичности

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2,\quad k-\text{const} \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты напряжения в декартовой системе координат, оси координат направлены, как указано на фиг. 1.

Для рассматриваемой полосы

$$\sigma_x=2k,\quad \sigma_y=\tau_{xy}=0 \tag{1.2}$$

Поле скоростей перемещений определяется из условий несжимаемости и изотропии

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y=0,\quad (\sigma_x-\sigma_y)\varepsilon_{xy}=(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\tau_{xy} \tag{1.3}$$

где ε_x, ε_y, ε_{xy} – компоненты скорости деформации. Имеет место

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

где u, v – компоненты скоростей перемещения.

Предположим, что прямая L (фиг. 2) является линией действия максимальных касательных напряжений $\tau=k$, характеристикой. Компоненты скорости перемещения, нормальные к характеристикам, непрерывны, касательные компоненты скорости перемещения могут терпеть разрыв. При разрыве в результате возникающего сдвига, на характеристиках происходит пластическое деформирование материала. Предположим, что слева от L материал движется со скоростью V_1, справа скорость материала V_2. Из условия равенства нормальных компонент скорости следует

$$V_1\sin\alpha=V_2\sin\beta \tag{1.5}$$

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (фиг. 2). За единицу времени точка A сместится в положение A_1, точка B займет положение B_1, точка C – положение C_1, линия BC – положение B_1C_1. В следующий момент времени точка A займет положение A_2, точки B_1, C_1, D_1 соответственно положения B_2, C_2, D_2, прямоугольник $ABCD$ деформируется в параллелограмм $A_2B_2C_2D_2$. Очевидно, их площади равны между собой. Величина сдвига определяется углом φ (фиг. 2), имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin^2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \tag{1.6}$$

Величина разрыва касательных компонент скорости на линии L равна

$$[V] = \frac{V_1}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\beta) = \frac{V_2}{\sin\beta}\sin(\alpha+\beta) \tag{1.7}$$

В работе [6] рассмотрено деформирование полосы с образованием локального утоньшения – шейки, когда части полосы $AOBE$, $CODF$ (фиг. 1) движутся как жесткое целое вправо и влево со скоростями $V = 1$ относительно начала координат. Материал в областях AOC, BOD движется как жесткое целое соответственно вертикально вниз и вверх. Промежуточное положение показано на фиг. 3 (верхняя часть полосы). Первоначальная свободная граница материала AC займет положение ef. Материал, занимавший первоначально положение квадрата $abcd$ займет положение параллелограмма $a_2b_2c_2d_2$. Очевидно, треугольникам Aab, bce соответствуют треугольники $A_2a_2b_2$, $b_2c_2e_2$. Отметим, что $Ad = de = AA_2$. Область пластически деформированного материала в момент разрыва на фиг. 3 заштрихована. В случае, рассмотренном в [6], $\alpha = \beta = \pi/4$, согласно (1.6) $\operatorname{tg}\varphi = 1/2$. Можно предположить, что скорость движения материала в области AOC направлена под углом α к оси y (фиг. 4). Из условия равенства нормальных скоростей движения на AO и CO получим, что жесткая часть материала AOE движется вправо относительно начала координат со скоростью

$$V_1 = V(\cos\alpha + \sin\alpha) \tag{1.8}$$

жесткая часть материала COF – влево со скоростью

$$V_2 = V(\cos\alpha - \sin\alpha) \tag{1.9}$$

Области пластического деформирования в момент разрыва на фиг. 4 заштрихованы, причем $MA = AA_1$, $CM = C_1C$. Из (1.8), (1.9) следует

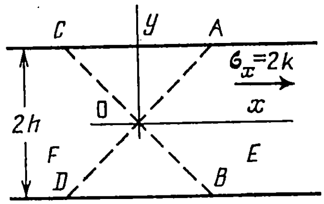
$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{V_1^2 + V_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \tag{1.10}$$

Согласно (1.10) скорости движения жестких частей материала V_1, V_2 относительно начала координат (точки разрушения материала) определяют величину V и направление скорости движения α в зоне пластически деформируемого материала. При $\alpha = \pi/4$ согласно (1.8), (1.9) $V_2 = 0$, скольжение материала происходит вдоль линии CO. Конечное положение деформирования показано на фиг. 5.

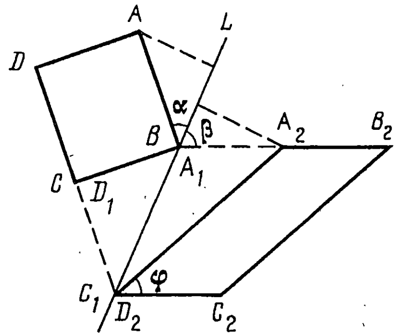
Величины V, α могут быть переменными и зависеть от параметра λ (1.5), характеризующего, например глубину шейки в области пластического деформирования (фиг. 3). В этом случае приращение перемещения свободной границы жесткой области вдоль направления растяжения (ось x) определяется согласно (1.8), (1.9):

$$ds_1 = V_1 d\lambda = V(\lambda)(\cos\alpha + \sin\alpha)d\lambda \tag{1.11}$$

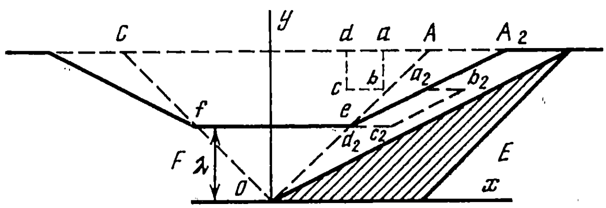
$$ds_2 = V_2 d\lambda = V(\lambda)(\cos\alpha - \sin\alpha)d\lambda, \quad \alpha = \alpha(\lambda)$$



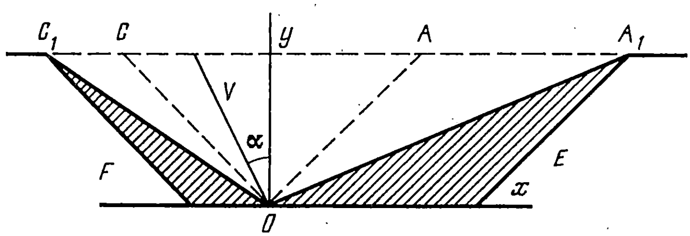
Фиг. 1.



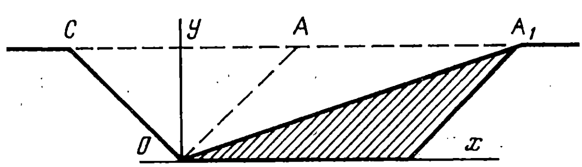
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Очевидно,

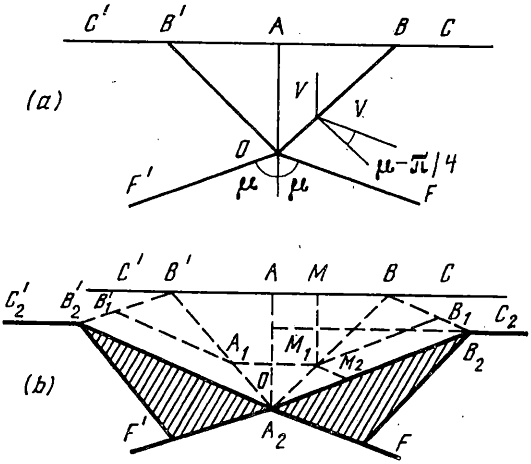
$$V(\lambda)\cos\alpha d\lambda = dy \tag{1.12}$$

Интегрируя выражение (1.9), (1.10) в пределах от λ до y, получим

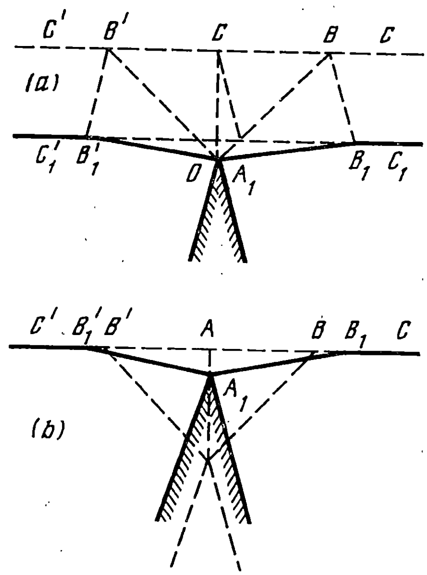
$$S_1(y) = y - \lambda + S, \quad S_2(y) = y - \lambda - S \tag{1.13}$$

$$S = \int_{\lambda}^{y} V\sin\alpha d\lambda, \quad S_1(\lambda) = S_2(\lambda) = S(\lambda) = 0$$

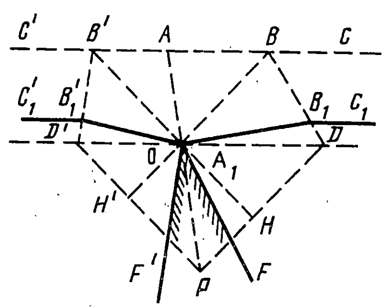
2. Предположим, что первоначальное положение пластического материала (фиг. 6, *а*) ограничено прямыми $C'C$, $F'OF$, причем по $F'OF$ имеет место жесткое гладкое основание. Предположим, что раствор угла $F'OF$ равен 2μ. Предположим далее, что очаг пластического материала имеет место в зоне BOB', в которой постоян-



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

ная скорость движения V направлена вдоль AO. Жесткая часть материала $CBOF$ движется со скоростью V_1 вдоль OF, жесткая часть материала $C'B'OF$ движется со скоростью V_1 вдоль OF'. Из условия равенства нормальных компонент скорости V и V_1 на границах BO, $B'O$ будем иметь

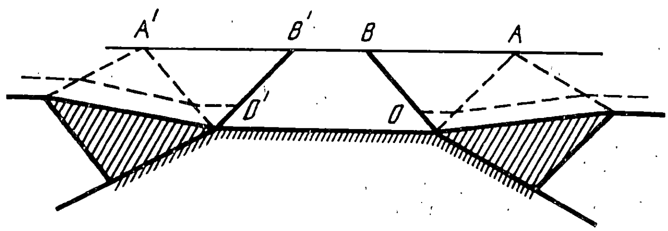
$$V\cos(\pi/4) = V_1\cos(\mu - \pi/4) \tag{2.1}$$

Очевидно, что рассмотренный выше случай образования шейки в растягиваемом образце имеет место при $\mu = \pi/2$. На фиг. 6, *б* показано положение материала в момент разрыва, при котором точка A достигает положения точки O. Промежуточное состояние показано на фиг. 6, *в* линией $B_1'M_1'A_1M_1B_1$, окончательное – линией $C_2'B_2'A_2B_2C_2$. Если обозначить $AO = h$, $BB_2 = S$, то, согласно (1):

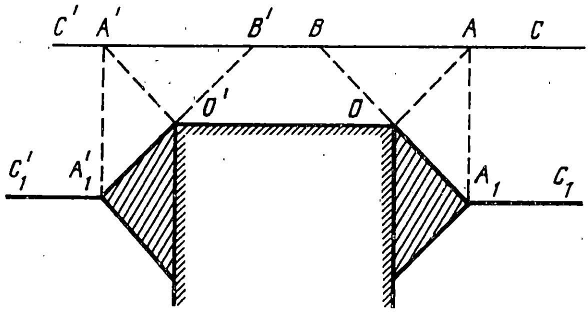
$$S = \frac{\sqrt{2}h}{2\cos(\mu - \pi/4)} \tag{2.2}$$

Очевидно, ширина шейки равна

$$B_1B_2' = 2B_2D = 2h\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\mu}{2\cos(\mu - \pi/4)}\right) \tag{2.3}$$



Фиг. 9



Фиг. 10

глубина шейки характеризуется величинами

$$AD = S\cos\mu, \quad OD = h\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos\mu}{2\cos(\mu - \pi/4)}\right) \tag{2.4}$$

На фиг. 7, *а* показано деформирование материала при достаточно малом угле раствора μ режущего инструмента *F'OF*.

На фиг. 7, *в* тот же процесс представлен в обратимом виде: линия *C'C* фиксирована и деформирование осуществляется за счет внедрения индентора.

Рассмотрим случай несимметричного индентора (фиг. 8). Часть материала движется как жесткое целое со скоростью, направленной вдоль *OF*. Предположим, что вектор скорости совпадает с отрезком *BD*. Часть материала *C'B'OF'* движется как жесткое целое со скоростью, направленной вдоль *OF'*. Предположим, что вектор скорости совпадает с отрезком *B'D'*. В этом случае вертикальные компоненты скорости равны и полупрямые *CB, C'B'* смещаются параллельно себе по вертикали с одной скоростью.

Компоненты скорости, нормальные к отрезкам *BO, B'O*, ограничивающим очаг пластического деформирования *BOB'*, определяются отрезками *OH, OH'*. Таким образом, скорость в очаге пластического деформирования определяется вектором *OP*.

В момент окончания деформирования точка *A* займет положение *A'*, аналогично другие точки займут соответствующие положения с индексом единица. Очевидно, $AB = BC$, $AB' = B'C'$. Обращая движение, рассмотренный процесс можно интерпретировать как вдавливание жесткого индентора в идеальнопластическую среду.

На фиг. 9 показан случай пробоя пластического слоя затупленным индентором. Жесткий материал движется вдоль линий *OF, O'F'*, в очагах пластического деформирования *ABO, A'O'B'* скорость пластического материала направлена соответственно вдоль линий *BO, B'O'*, часть материала *BOO'B'* остается жесткой, показано конечное положение материала, области деформированного состояния материала заштрихованы.

На фиг. 10 показан случай индентора с вертикальными стенками, область деформированного состояния материала заштрихована.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. *Жалнин В.А., Ивлев Д.Д.* К теории вдавливания штампа в пластическую среду // ПМТФ. 1960. № 3. С. 214–216.
3. *Быковцев Г.И.* О поле скоростей при вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 552–553.
4. *Кузнецов А.И.* Замечание о теории вдавливания штампа в пластическую среду // ПМТФ. 1962. № 1. С. 162–163.
5. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
6. *Онат Е., Прагер В.* Образование шейки при плоском течении растягиваемого плоского образца // Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. 1955. № 4. С. 93–97.
7. *Ишлинский А.Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеальнопластической полосы переменного сечения // Док. АН УР СР, Киев: 1958. № 1. С. 12–15.

Чебоксары

Поступила в редакцию
8.10.1998