

УДК 539.3

© 2000 г. А.Г. НИКОЛАЕВ, В.С. ПРОЦЕНКО

**КОЛЬЦЕВАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЩЕЛЬ
НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В УПРУГОМ ШАРЕ**

Рассматривается задача о кольцевой щели нормального разрыва, расположенной в диаметральной плоскости упругого шара. Эта задача, насколько известно авторам, другими исследователями не изучалась. Предложен новый подход к удовлетворению смешанных граничных условий в плоскости щели. Он основан на описании плоской щели в сжатой сфероидальной системе координат. В результате такого подхода смешанные условия на щели приводят к парным рядовым уравнениям по функциям Лежандра с нечетными индексами. Совместное использование сферических и сфероидальных координат позволяет точно удовлетворить граничным условиям на поверхности шара. Формулы переразложения базисных векторных решений уравнения Ламе [1] из одной системы координат в другую дают возможность свести задачу к интегро-алгебраической системе уравнений с фредгольмовым оператором в некотором гильбертовом пространстве.

Полученная система допускает применение метода редукции. Проведен численный анализ задачи.

Осесимметричные задачи о кольцевых щелях нормального разрыва в упругих телах, таких как пространство, полупространство, слой исследованы в работах [2–7].

Упругий шар радиуса R с кольцевой щелью, центр которой совпадает с центром шара, свободен от нагрузки по всей поверхности. К берегам щели приложена нормальная постоянная нагрузка p . Пусть a и c – внутренний и внешний радиусы кольца щели. Введем одинаково направленные сферическую (r, θ, φ) и сжатую сфероидальную (ξ, η, φ) системы координат с началами, совмещенными с центром шара. Координаты этих систем связаны формулами $\rho = r \sin \theta = c \operatorname{ch} \xi \sin \eta$, $z = r \cos \theta = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta$; $0 \leq \theta, \eta \leq \pi$, $0 \leq r, \xi < \infty$, c – размерный параметр сфероидальной системы.

Напряженно-деформированное состояние в рассматриваемой задаче определяется следующими граничными условиями:

$$\sigma_r(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = \tau_{r\varphi}(R, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1)$$

$$\tau_{\xi\eta}(0, \eta) = \tau_{\xi\varphi}(0, \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi \quad (2)$$

$$U_\xi(0, \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0, \quad \pi - \eta_0 < \eta \leq \pi \quad (3)$$

$$\sigma_\xi(0, \eta) = -p, \quad \eta_0 < \eta \leq \pi - \eta_0, \quad \eta_0 = \arcsin(a/c). \quad (4)$$

Симметрия задачи относительно плоскости щели диктует искать ее решение в виде

$$U = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1) \frac{a_{ns}}{R^{2n}} W_{s,2n+1}^-(r, \theta) + \frac{b_{ns}}{Q_{2n+1}(i0)} W_{s,2n+1}^+(\xi, \eta) \right] \quad (5)$$

где a_{ns} , b_{ns} – неизвестные коэффициенты, а осесимметричные базисные решения

уравнения Ламе для шара и сфероида определены равенствами [1]:

$$\mathbf{W}_{1,n}^- = \frac{r^n}{n!} \left[\frac{\mathbf{e}_\rho}{n+1} P_n^{(1)}(\cos \theta) + P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_z \right] \quad (6)$$

$$\mathbf{W}_{2,n}^- = \frac{r^n}{n!} \left[\frac{n-1}{2n-1} P_n^{(1)}(\cos \theta) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{n^2}{2n-1} - \chi \right) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_z \right]$$

$$\mathbf{W}_{1,n}^+ = -[Q_n^{(-1)}(i \operatorname{sh} \xi) P_n^{(1)}(\cos \eta) \mathbf{e}_\rho + Q_n(i \operatorname{sh} \xi) P_n(\cos \eta) \mathbf{e}_z]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{2,n}^+ = & -i \operatorname{sh} \xi (n+2) Q_{n+1}^{(-1)}(i \operatorname{sh} \xi) P_n^{(1)}(\cos \eta) \mathbf{e}_\rho - \\ & - \mathbf{e}_z P_n(\cos \eta) [\chi Q_n(i \operatorname{sh} \xi) + i \operatorname{sh} \xi (n+1) Q_{n+1}(i \operatorname{sh} \xi)] \end{aligned} \quad (7)$$

где $\chi = 3-4\nu$, ν – коэффициент Пуассона.

Преобразование решений (6), (7) полностью к одной из рассматриваемых систем координат осуществляется при помощи теорем сложения решений уравнения Ламе [1]. С использованием этих теорем компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в сферических координатах на фокальном диске вычисляются по формулам

$$U_\xi(0, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} (b_{n1} + \chi b_{n2}) P_{2n+1}(\cos \eta)$$

$$\sigma_\xi(0, \eta) = \frac{2G}{c |\cos \eta|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n!} \Gamma(n+3/2) [b_{n1} + 2(1-\nu) b_{n2}] - \gamma_n \right\} P_{2n+1}(\cos \eta) \quad (8)$$

$$\tau_{\eta\xi}(0, \eta) = - \frac{2G}{c |\cos \eta|} \sum_{n=0}^{\infty} [b_{n1} + (1-2\nu) b_{n2}] P_{2n+1}^{(1)}(\cos \eta)$$

$$\gamma_n = \frac{4n+3}{\sqrt{\pi}} i (-1)^n \frac{\Gamma(n+3/2)}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{R^{2k}} \left\{ \left[\frac{R^2}{4k+1} \beta_{k-1,n} + 2(1-\nu) \beta_{kn} \right] a_{k2} - \beta_{kn} a_{k1} \right\}$$

$$\beta_{kn} = \sqrt{\pi} \left(-\frac{ic}{2} \right)^{2k+1} \frac{1}{(k-n)! \Gamma(k+n+5/2)}$$

В силу условий симметрии достаточно потребовать выполнения краевых условий (2) – (4) только на верхней поверхности фокального диска $\{\xi = 0, 0 \leq \eta \leq \pi/2\}$. В результате относительно коэффициентов b_{ns} получаем систему уравнений

$$(2\nu - 1) b_{n2} = b_{n1} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n2} P_{2n+1}(\cos \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2\Gamma_n^2 b_{n2} - \gamma_n) P_{2n+1}(\cos \eta) = -\frac{cp \cos \eta}{2G}, \quad \eta_0 \leq \eta < \pi/2 \quad (11)$$

$$\Gamma_n = \Gamma(n+3/2)/n!$$

Положим $(2n + 3/2)c_n = 2\Gamma_n^2 b_{n2} - \gamma_n + cp\delta_{n0} / 2G$, δ_{nk} – символ Кронекера, и преобразуем (10), (11) к следующим парным сумматорным уравнениям по функциям Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{-2} [(2n + 3/2)c_n + \gamma_n] P_{2n+1}(\cos \eta) = \frac{2cp \cos \eta}{\pi G}, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 3/2)c_n P_{2n+1}(\cos \eta) = 0, \quad \eta_0 \leq \eta < \pi/2 \quad (13)$$

Согласно [8] будем искать решение уравнений (12), (13) в виде

$$c_n = \int_0^{\eta_0} \Phi(t) \cos[(2n + 3/2)t] dt, \quad \Phi(t) \in C^1[0, \eta_0]$$

При этом уравнение (13) удовлетворяется при любой функции $\Phi(t)$. Из первого получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определений функции $\Phi(t)$

$$\Phi(t) + \int_0^{\eta_0} [K(x+t) + K(x-t)] \Phi(x) dx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{-2} \gamma_n \cos[(2n + 3/2)t] = \frac{4cp}{\pi G} \cos \frac{3}{2}t \quad (14)$$

$$K(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \{(2n + 3/2)\Gamma_n^{-2} - 2\} \cos[(2n + 3/2)t] - \frac{\sec \frac{1}{2}t}{2\pi}$$

Асимптотика при $n \rightarrow \infty$ выражения

$$(2n + 3/2)\Gamma_n^{-2} - 2 = -\frac{1}{4}(2n + 3)^{-2} \left[1 + \frac{3}{2n + 3} + O(n^{-2}) \right]$$

гарантирует абсолютную и равномерную сходимость ряда, входящего в ядро $K(t)$.

Граничные условия на поверхности шара также удовлетворяются в результате применения теоремы сложения [1]. В конечном итоге исходная задача теории упругости сводится к следующей разрешающей интегро-алгебраической системе

$$\Psi(t) + \int_0^{\eta_0} \Psi(x) [K(x+t) + K(x-t)] dx + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj}(t) \alpha_{kj} = \frac{4}{\pi^2} \cos \frac{3}{2}t \quad (15)$$

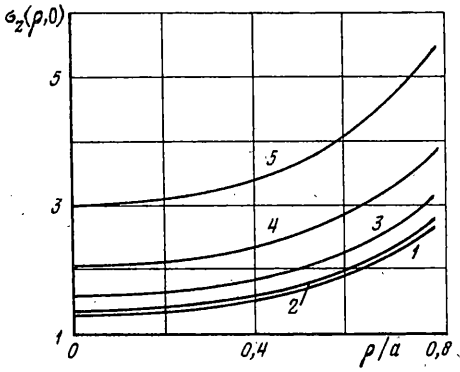
$$\alpha_{nj} + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} t_{nk}^{(jl)} \alpha_{kl} + \int_0^{\eta_0} A_{nj}(t) \Psi(t) dt = d_{nj} \quad (j = 1, 2; n = 0, 1, \dots)$$

$$t_{nk}^{(jl)} = (-1)^{j+l+1} \frac{2}{\Delta_n} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2k+2n+3} \sum_{p=0}^{\min(n,k)} \omega_{kp} r_{kp}^{(l)} S_{np}^{(j)} \Gamma_p^2$$

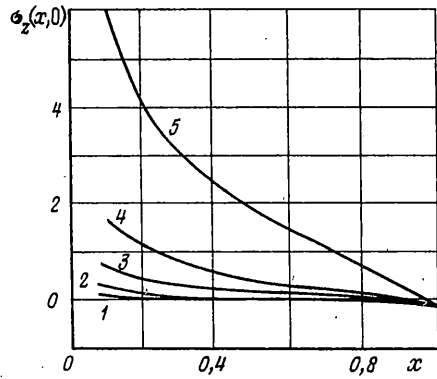
$$A_{nj}(t) = (-1)^{j+1} \frac{2}{\Delta_n} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2n+3} \sum_{k=0}^n (2k + 3/2) S_{np}^{(j)} \cos(2k + 3/2)t$$

$$B_{kj}(t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2k} \sum_{n=0}^k (2n + 3/2) \omega_{kn} h_{kn} \cos(2n + 3/2)t$$

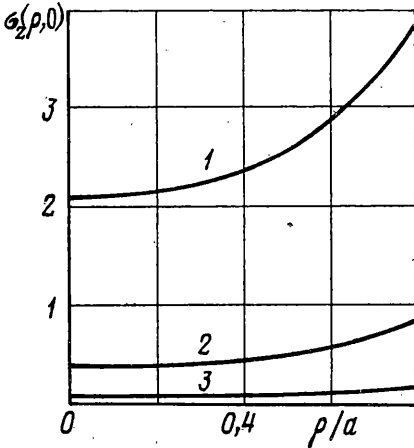
$$\omega_{kn} = (-1)^{k+n} \frac{(2k+1)!n!}{\Gamma(n+3/2)(k-n)!\Gamma(k+n+5/2)}, \quad r_{kn}^{(l)} = \delta_{l1} + h_{kn} \delta_{l2}$$



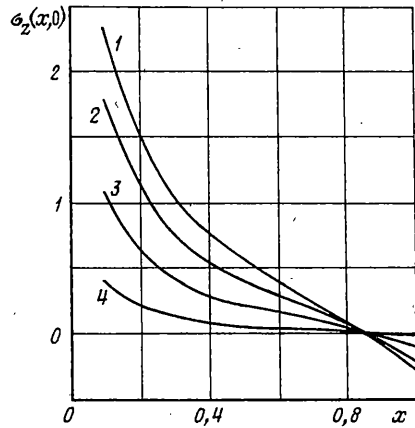
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$h_{kn} = 2 \left[1 - \nu \frac{4\varepsilon^{-2}}{4k+1} (k-n) \left(k+n+\frac{3}{2} \right) \right], \quad d_{nj} = (-1)^{j+1} \frac{1}{\Delta_n} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2n+3} S_{n0}^{(j)}$$

$$S_{nk}^{(1)} = 2(n+1)\omega_{nk} \left[\frac{2n+2}{2n+1} (2n+1-\chi)(h_{nk}-\chi) + \frac{8(\nu-1)(n+1)(n+2)}{2n+1} \frac{1}{4n+5} + 1 - 2\nu \right] + 2(2n+2+\chi) \left[\frac{n(2n-1)}{4n+1} + \nu \right] + \frac{2(n+1)(2n+1)}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$S_{nk}^{(2)} = 2(n+1)\omega_{nk} \left[\frac{4n+3}{2n+1} (h_{nk}-\chi) + 2n+2+\chi \right], \quad \Delta_n = \frac{2(4n^2+2n+1)}{4n+1} + 2\nu$$

а в качестве новых неизвестных выбраны безразмерные величины

$$\alpha_{nj} = \frac{G}{p} a_{nj}, \quad \psi(t) = \frac{G}{cp} \Phi(t), \quad \varepsilon = \frac{c}{R}$$

Проведенный анализ матричных коэффициентов и ядер полученной интеграл-алгебраической системы показывает, что при условии $\varepsilon < 1$ оператор системы является фредгольмовым в пространстве $L_2[0, 1] \times l_2$. Условие $\varepsilon < 1$ является естественным в случае, когда щель находится внутри шара.

a/c	$c/R = 0,1$	0,3	0,5	0,7	0,9
0	0,64	0,66	0,74	0,92	1,49
0,2	0,96	0,99	1,08	1,28	1,70
	0,58	0,59	0,64	0,75	1,05
0,5	0,61	0,62	0,64	0,69	0,79
	0,47	0,48	0,49	0,53	0,66
0,8	0,42	0,42	0,43	0,43	0,46
	0,31	0,31	0,31	0,31	0,34

Выясним характер распределения напряжений σ_z в плоскости щели. Отметим, что эти напряжения непосредственно выражаются через решения системы (15). Так, для коэффициентов интенсивности напряжений $\sigma_z(\rho, 0)$ на внутренней и внешней окружностях щели получены выражения

$$k_a = \lim_{\rho \rightarrow a-0} \sigma_z(\rho, 0) \rho^{-1} \left[2 \frac{(a-\rho)}{c} \right]^{1/2} = \left(\frac{c}{a} \right)^{1/2} \frac{\Phi(\eta_0)}{\sqrt{1-(a/c)^2}}$$

$$k_c = \lim_{\rho \rightarrow c+0} \sigma_z(\rho, 0) \rho^{-1} \left[2 \frac{(a-c)}{c} \right]^{1/2} = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \Phi(\eta_0) \Omega(\eta_0) - \int_0^{\eta_0} \Phi'(t) \Omega(t) dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{2k} \sum_{n=0}^k (2n+3/2) \left[\frac{(2k+1)!}{(k-n)!} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+n+3/2)} h_{nk} a_{k2} - a_{k1} \right] \right\}$$

$$\Omega(t) = -(2 \cos t)^{-1/2} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{\cos t - \cos^2 t}}{\cos t - 1/2} \right] + \pi H \left(t - \frac{\pi}{3} \right)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Система (15) решалась численно при $\nu = 0,25$ заменой интегралов квадратурными формулами Филона (число узлов 11) и усечением алгебраической части (максимальное значение $n = 5$). Результаты проверялись независимо путем аппроксимации ядра интегральной части вырожденным, которая предложена в работе [3].

О характере распределения напряжений σ_z в плоскости щели можно судить по графикам, представленным на фиг. 1–4 (фиг. 1 соответствует σ_z при $\rho < a$, а фиг. 2 – σ_z при $\rho \in (c, R]$). Фиг. 1 и 2 соответствуют значению $a/c = 0,2$; сериям 1–5 на них отвечают значения $c/R = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$ ($x = (\rho - c)/(R - c)$). Фиг. 3 и 4 соответствуют значению $c/R = 0,7$. Сериям 1–3 (фиг. 3) на них отвечают значения $a/c = 0,2; 0,5; 0,8$; сериям 1–4 (фиг. 4) отвечают значения $a/c = 0; 0,2; 0,5; 0,8$. Значения КИН k_a и k_c представлены в таблице (верхнее значение k_a , нижнее k_c). Графики показывают, что напряжения σ_z растут с ростом параметра c/R и убывают с ростом параметра a/c . Такая же закономерность изменения k_a и k_c . При $c/R = 0,1, a/c = 0$ (круговая щель), когда влиянием поверхности шара можно пренебречь, значение $k_c = 0,638$ хорошо согласуется с известным значением КИН для круговой щели в упругом пространстве, равным 0,637. Такое же совпадение имеет место и в общем случае кольцевой щели [2, 3]. В результате анализа напряжения σ_z было обнаружено, что в широком диапазоне изменения геометрических параметров задачи существуют области сжимающих напряжений σ_z , расположенные вблизи к поверхности шара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Проценко В.С., Кошавец П.Т.* Формулы переразложения векторных решений уравнения Лапе в сферической и сжатой сфероидальной системах координат // Математические методы анализа динамических систем. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1985. С. 90–95.
2. *Сметанин Б.И.* Задача о растяжении упругого пространства, содержащего плоскую кольцевую щель // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 3. С. 458–462.
3. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленном кольцевой щелью // Приклад. механика. 1965. Т. 1. № 10. С. 61–64.
4. *Губенко В.С.* Задача о круговом штампе, сцепленном с полупространством, и о слое, ослабленном кольцевой щелью // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 5. С. 151–153.
5. *Андрейкив А.Е.* Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наук. думка, 1982. 347 с.
6. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 223 с.
7. *Кит Г.С., Хай М.В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 273 с.
8. *Минков И.М.* Электростатическое поле разрезанного сферического конденсатора // Журн. техн. физики. 1962. Т. 32. № 12. С. 1409–1412.

Харьков

Поступила в редакцию

29.07.1999