МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. С.А. НАЗАРОВ

ТЕНЗОР И МЕРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ. 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ДЕФЕКТАМИ

Рассматривается анизотропное тело, содержащее мелкие внутренние дефекты. В предположении, что расстояния между дефектами много больше их диаметров, выводятся асимптотические формулы для напряженно-деформированного состояния и потенциальной энергии деформации. Указываются оценки погрешностей таких формул. Асимптотики содержат специальные решения упругой задачи о пространстве с дефектом единичного размера и его интегральные характеристики – матрицы (тензоры) упругой поляризации и емкости. Дается универсальное определение таких характеристик и изучаются их свойства, в том числе для предельных ситуаций, когда дефект является полостью или абсолютно жестким включением.

1. Постановка задачи. Пусть Ω_0 – однородное анизотропное тело, ограниченное гладкой поверхностью Γ, к которой приложена самоуравновешенная нагрузка p. Уравнения равновесия в Ω_0 и краевые условия на Γ имеют вид

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji}(v^0;x)=0,\quad x\in\Omega_0\quad (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(n)}(v^0;x)=p(x),\quad x\in\Gamma \tag{1.2}$$

Здесь $(\sigma_{ji})_{j,i=1}^3$ – тензор напряжений, $\sigma_j^{(n)}=\sigma_{ji}n_i$, $n=(n_1,n_2,n_3)^t$ – единичный вектор внешней нормали к Γ, по повторяющимся индексам производится суммирование, а символ t означает транспонирование (векторы в декартовом представлении реализуются как столбцы). Далее будет удобно переписать уравнения (1.1), (1.2) в иной форме. Введем 3×6-матрицу $D(x)$ со столбцами

$$\begin{gathered}D^i(x)=x_ie^i\quad (i=1,2,3);\quad D^4(x)=2^{-1/2}(0,x_3,x_2)^t\\ D^5(x)=2^{-1/2}(x_3,0,x_1)^t,\quad D^6(x)=2^{-1/2}(x_2,x_1,0)^t\end{gathered} \tag{1.3}$$

Через e^i обозначен орт оси x_i. Заменяя переменные x_i производными $\partial/\partial x_i$, получаем матричный дифференциальный оператор $D(\nabla_x)$, где $\nabla_x=\mathrm{grad}$. Введем еще столбец деформаций $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_6)^t$ с компонентами $\varepsilon_1=\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2=\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3=\varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4=2^{1/2}\varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5=2^{1/2}\varepsilon_{31}$, $\varepsilon_6=2^{1/2}\varepsilon_{12}$ и аналогичный шестимерный столбец напряжений σ. Множители $2^{1/2}$ предназначены для уравнивания норм вектора и тензора деформаций (напряжений). Принимая во внимание формулы (1.3), можно выстроить симметрическую положительно определенную 6×6-матрицу A упругих постоянных так, чтобы

$$\varepsilon(v^0)=D(\nabla_x)^t v^0,\quad \sigma(v^0)=A\varepsilon(v^0)=AD(\nabla_x)^t v^0 \tag{1.4}$$

Теперь в силу (1.3) и (1.4) задача (1.1), (1.2) приобретает вид

$$L(\nabla_x)v^0(x) \equiv -D(\nabla_x)AD(\nabla_x)^t v^0(x) = 0, \quad x \in \Sigma_0 \tag{1.5}$$

$$B(x, \nabla_x)v^0(x) \equiv D(n(x))AD(\nabla_x)^t v^0(x) = p(x), \quad x \in \Gamma \tag{1.6}$$

Подчеркнем, что L и B – 3×3-матрицы операторов второго и первого порядков ($L(\nabla_x)$ – оператор Ламе). Матрица $D(n)$ из (1.6) получается заменой в (1.3) x_k на n_k.

Перейдем к описанию задачи о теле с дефектами. Масштабированием сведем характерный размер области Ω_0 к единичному и фиксируем внутри Ω_0 точки $Q^1,\dots, Q^N$, центры дефектов. Пусть $h > 0$ – малый безразмерный параметр, $\xi^j = h^{-1}(x - Q^j)$ – "быстрые" переменные, ω^j – ограниченные замкнутые множества в $\mathbf{R}^3$, а $\omega_h^j = \{x : \xi^j \in \omega^j\}$ – объем, занимаемый дефектом с номером j. Параметр h считаем настолько малым, что $\omega_h^1,\dots, \omega_h^N$ содержатся в Ω_0 и попарно не пересекаются. Наконец, однородная часть поврежденного тела Ω_h имеет вид $\Omega(h) = \Omega_0 \setminus \{\omega_h^1 \cup \dots \cup \omega_h^N\}$.

Упругие свойства дефекта ω_h^j охарактеризуем аналогичной (1.4) матрицей A^j; при этом ее элементы – функции быстрых переменных $\xi^j \in \omega^j$. Положим

$$A_h(x) = \begin{cases} A & , \ x \in \Omega(h) \\ A^j(\xi^j), & x \in \omega_h^j \end{cases} \tag{1.7}$$

Задача о деформации поврежденного тела Ω_h записывается так:

$$-D(\nabla_x)A_h(x)D(\nabla_x)^t u^h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h \tag{1.8}$$

$$-D(n(x))A_h(x)D(\nabla_x)^t u^h(x) = p(x), \quad x \in \Gamma \tag{1.9}$$

Зависимость A^j от ξ^j позволяет рассматривать неоднородные дефекты. Кроме того, в качестве дефекта ω_h^j можно взять полость или абсолютно жесткое включение: нужно положить $A^j(\xi^j) = \alpha A$ и перейти к пределу при $\alpha \to +0$ или $\alpha \to +\infty$ соответственно (см., например, [1] и разд. 3 далее).

2. Матрицы поляризации. Для асимптотического анализа задачи (1.8), (1.9) нужны специальные интегральные характеристики дефектов – так называемые матрицы (тензоры) упругой поляризации. Определение этих объектов вполне аналогично классическому определению [2] тензора виртуальной массы. В [1, 3–7] подобные матрицы вводились для изотропных материалов с включениями или полостями. В данном разделе предлагается универсальное их определение, использующее матрицу D из (1.3).

Приведем известные факты (см., например, [8, 9], § 6.4 [7] и др.) о поведении на бесконечности решений задачи о деформации составного пространства

$$-D(\nabla_\xi)AD(\nabla_\xi^t)w(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^3 \setminus \omega^j \tag{2.1}$$

$$-D(\nabla_\xi)A^j(\xi)D(\nabla_\xi)^t w^\omega(\xi) = F(\xi), \quad \xi \in \omega^j \tag{2.2}$$

$$D(n(\xi))[A^j(\xi)D(\nabla_\xi)^t w^\omega(\xi) - AD(\nabla_\xi)^t w(\xi)] = \Psi(\xi) \tag{2.3}$$

$$w^\omega(\xi) = w(\xi), \quad \xi \in \partial\omega^j$$

Здесь w^ω – сужение поля w с $\mathbf{R}^3$ на ω^j, индекс j у переменной ξ^j не пишется, F – массовые силы, а Ψ – скачок вектора нормальных напряжений на $\partial\omega^j$ (причины постановки нефизических условий контакта становятся ясными далее). Для описания асимптотики (при $|\xi|\to\infty$) решения w задачи (2.1) – (2.3) понадобится матрица T фундаментальных решений для оператора $L(\nabla_\xi)$ в $\mathbf{R}^3$ (аналог тензора Кельвина – Сомильяны; см. [10]). Эта матрица составляется из столбцов T^1, T^2, T^3, являющихся решениями уравнений

$$L(\nabla_\xi)T^i(\xi)=\delta(\xi)e^i, \quad \xi\in\mathbf{R}^3 \quad (i=1,2,3) \tag{2.4}$$

При этом δ – функция Дирака, а элементы T суть однородные степени -1 функции переменных ξ, т.е. $T(\xi)=|\xi|^{-1}\,T(\xi|\xi|^{-1})$.

Известно (см., например, [11], § 6.4 [7]), что (обобщенное) решение задачи (2.1) – (2.3) существует и единственно при условии

$$F\in L_2(\omega^j), \quad \Psi\in L_2(\partial\omega^j) \tag{2.5}$$

Оно обладает конечной упругой энергией, исчезает на бесконечности и оказывается гладким на $\mathbf{R}^3\backslash\omega^j$. Согласно [8–10] (см. также § 6.4 [7]) справедливо асимптотическое разложение при $|\xi|\to\infty$

$$\omega(\xi)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{6}\{a_k d_i^k(-\nabla_\xi)+b_k D_i^k(-\nabla_\xi)\}T^i(\xi)+O(|\xi|^{-3}) \tag{2.6}$$

$$d(\xi)=(d_i^k(\xi))_{k,i=1}^{6,3}; \quad d^p(\xi)=e^p, \quad d^{3+p}(\xi)=2^{-1/2}e^p\times\xi \quad (p=1,2,3) \tag{2.7}$$

Крестом обозначено векторое произведение. Подчеркнем, что $d(\xi)c$ – жесткое смещение при любом столбце $c\in\mathbf{R}^6$, а поля $d_i^k(-\nabla_\xi)T^i(\xi)$ отвечают сосредоточенным силам ($k=1,2,3$) и моментам ($k=4,5,6$).

Столбцы $a=(a_1,\ldots,a_6)^t$ и $b=(b_1,\ldots,b_6)^t$ коэффициентов из (2.6) восстанавливаются по нагружению F, Ψ (см. [12], а также § 3.5, 6.4 [7]). В частности

$$a=\int_{\omega^j} d(\xi)^t F(\xi)d\xi+\int_{\partial\omega^j} d(\xi)^t\Psi(\xi)ds_\xi \tag{2.8}$$

При этом a_i и $2^{1/2}a_{i+3}$ – компоненты главного вектора и главного момента нагрузок (2.5); $i=1,2,3$. Для того чтобы вычислить b, введем исчезающие на бесконечности решения X^{jk} задачи (2.1) – (2.3) с правыми частями

$$\begin{aligned}F^{jk}(\xi)&=D(\nabla_\xi)A^j(\xi)D(\nabla_\xi)^t D^k(\xi)\\ \Psi^{jk}(\xi)&=D(n(\xi))(A-A^j(\xi))D(\nabla_\xi)^t D^k(\xi)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Из столбцов $X^{j1},\ldots,X^{j6}$ составим 3×6-матрицу X^j и положим

$$\zeta^{jk}(\xi)=D^k(\xi)+X^{jk}(\xi) \tag{2.10}$$

В силу (2.9) суммы (2.10) являются решениями однородной задачи (2.1) – (2.3); образуем 3×6-матрицу $\zeta^j=(\zeta^{j1},\ldots,\zeta^{j6})$ и проверим представление

$$b=\int_{\omega^j}\zeta^j(\xi)^t F(\xi)d\xi+\int_{\partial\omega^j}\zeta^j(\xi)^t\Psi(\xi)ds_\xi \tag{2.11}$$

Обозначим $t(\xi)$ члены асимптотики, выделенные в (2.6). При $k=1,\ldots,6$:

$$\int_{\omega^j}\zeta^{jk}(\xi)\cdot F(\xi)d\xi+\int_{\partial\omega^j}\zeta^{jk}(\xi)\cdot\Psi(\xi)ds_\xi=\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|=R}\{\sigma^{(n)}(\zeta^{jk};\xi)\cdot w(\xi)-$$

$$-\sigma^{(n)}(w;\xi)\cdot\zeta^{jk}(\xi)\}ds_\xi = \lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|=R}\{\sigma^{(n)}(D^k;\xi)\cdot t(\xi)-\sigma^{(n)}(t;\xi)\cdot D^k(\xi)\}ds_\xi = \tag{2.12}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|<R} D^k(\xi)\cdot L(\nabla_\xi)t(\xi)d\xi = = \int_{\mathbf{R}^3} D^k(\xi)\cdot\{d(-\nabla_\xi)a + D(-\nabla_\xi)a + D(-\nabla_\xi)b\}\delta(\xi)d\xi =$$

$$= \{|\, d(\nabla_\xi)a]^t + [D(\nabla_\xi)b]^t\}D^k(\xi)\,|_{\xi=0} = b_k$$

Здесь несколько раз применялось интегрирование по частям. Кроме того, после замены w^j и ζ^{jk} главными членами t и D^k их асимптотик использовались уравнения (2.4), а интеграл по $\mathbf{R}^3$ понимался в смысле теории распределений. Наконец, учитывалось, что в силу (1.3) и (2.7):

$$\begin{aligned} &D(\nabla_\xi)^t D(\xi)\,|_{\xi=0} = d(\nabla_\xi)^t d(\xi)\,|_{\xi=0} = \mathbf{1} \\ &D(\nabla_\xi)^t d(\xi)\,|_{\xi=0} = d(\nabla_\xi)^t D(\xi)\,|_{\xi=0} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Через $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ обозначены единичная и нулевая 6×6-матрицы. Из (2.13) вытекает, что 3×6-матрицы F^j и Ψ^j, построенные по векторам (2.9), имеют вид

$$F^j = D(\nabla_\xi)A^j(\xi), \quad \Psi^j = D(n(\xi))(A - A^j(\xi)) \tag{2.14}$$

Отметим, что интегральное представление (2.8) выводится при помощи преобразований (2.12), в которых $\zeta^j(\xi)$ заменено на $d(\xi)$. Решения X^{jk} сами допускают разложения вида (2.6). Согласно (2.14) и (2.13):

$$\int_{\omega^j} d(\xi)^t F^j(\xi)d\xi = \int \omega^j d(\xi)^t D(\nabla_\xi)(A^j(\xi) - A)d\xi =$$

$$= \int_{\partial\omega^j} d(\xi)^t D(n(\xi))(A^j(\xi) - A)ds_\xi = -\int_{\omega^j} d(\xi)^t \Psi^j(\xi)ds_\xi$$

Поэтому коэффициенты a_k в формулах (2.6) для X^{jk} аннулируются, т.е.

$$X^{jk}(\xi) = -\sum_{m=1}^{6} P^j_{km}\sum_{i=1}^{3} D^m_i(-\nabla_\xi)T^i(\xi) + O(|\,\xi\,|^{-3}) \tag{2.15}$$

По сравнению с (2.6) в (2.15) сменен знак при асимптотическом слагаемом. Объединенная запись всех шести ($k = 1,\dots, 6$) соотношений (2.15) такова:

$$X^j(\xi) = [P^j D(\nabla_\xi)^t T(\xi)]^t + O(|\,\xi\,|^{-3}) \tag{2.16}$$

В ней фигурирует 6×6-матрица P^j, составленная из коэффициентов в (2.15) – именно она и называется матрицей упругой поляризации для дефекта ω^j. Матрица P^j всегда оказывается симметрической. Кроме того, если разность $A^j(\xi) - A$ – неположительно определенная матрица при $\xi\in\omega^j$ (т.е. материал включения ω^j менее жесткий, чем материал, заполняющий $\mathbf{R}^3\backslash\omega^j$), то P^j отрицательно определена. Оба этих свойства вытекают из представления

$$\begin{aligned} -P^j_{km} = &\int_{\mathbf{R}^3\backslash\omega^j} (D(\nabla_\xi)^t X^m(\xi))^t A D(\nabla_\xi)^t X^k(\xi)d\xi + \\ &+ \int_{\omega^j} (D(\nabla_\xi)^t X^m(\xi))^t A^j(\xi)D(\nabla_\xi)^t X^k(\xi)d\xi + \\ &+ \int_{\omega^j} (D(\nabla_\xi)^t D^m(\xi))^t (A - A^j(\xi))D(\nabla_\xi)^t D^k(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{2.17}$$

Оно выводится из формулы (2.11) при помощи многократных интегрирований по частям и будет проверено в 3 для более простого случая полости ω^j.

3. Предельные ситуации. Пусть $A^j = \mathbf{0}$, т.е. ω^j – полость. Предельный переход $A^j \to \mathbf{0}$, упоминавшийся после (1.7), устраняет уравнение (2.2) и замещает (см. [1]) условия сопряжения (2.3) краевыми условиями

$$D(-n(\xi))AD(\nabla_\xi)^t w(\xi) = \Psi(\xi), \quad \xi \in \partial\omega^j \tag{3.1}$$

Итак, матрица X^j специальных решений удовлетворяет системе уравнений

$$L(\nabla_\xi)X^j(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^3 \setminus \omega^j$$

Правая часть соответствующих краевых условий (3.1) имеет вид $\Psi^j(\xi) = D(n(\xi))A$. В силу (2.17) и (2.10)

$$P^j = \int_{\partial\omega^j} X^j(\xi)^t D(n(\xi))AD(\nabla_\xi)^t X^j(\xi)ds_\xi - \int_{\partial\omega^j} D(\xi)^t D(n(\xi))Ads_\xi \tag{3.2}$$

Ввиду формулы Бетти первый интеграл I_1 справа принимает вид

$$I_1 \equiv -2(E(X^{jk}, X^{jp};\ \mathbf{R}^3 \setminus \omega^j))_{k,p=1}^6 \equiv -2\Upsilon^j \tag{3.3}$$

$$E(X, Y; \Xi) = \frac{1}{2}\int_\Xi [D(\nabla_\xi^t)X]^t AD(\nabla_\xi)^t Yd\xi \equiv \frac{1}{2}\int_\Xi \sigma(X)\cdot\varepsilon(Y)d\xi \tag{3.4}$$

Здесь $E(X, X; \Xi)$ – упругая энергия поля X в области Ξ. В соответствии с (2.13) второй интеграл I_2 из (3.2) равен

$$\int_{\omega^j} [D(\nabla_\xi)^t D(\xi)]^t AD(\nabla_\xi)^t D(\xi)d\xi = 2(E(D^k, D^p; \omega^j))_{k,p=1}^6 = A\,\mathrm{mes}_3\,\omega^j$$

Следовательно, в случае полости равенство (2.17) конкретизируется так:

$$P^j = -A\,\mathrm{mes}_3\,\omega^j - 2\Upsilon^j \tag{3.5}$$

Матрица Υ^j, указанная в (3.3), является (симметрической) 6×6-матрицей Грама, построенной по решениям $X^{j1},\dots, X^{j6}$ при помощи скалярного произведения (3.4). Если $\mathrm{mes}_3\,\omega^j > 0$, то обе матрицы в правой части (3.5) положительно определены ($\Upsilon^j > \mathbf{0}$, поскольку решения $X^{j1},\dots, X^{j6}$ линейно независимы). Таким образом, матрица поляризации для полости ω^j ненулевого объема $\mathrm{mes}_3\,\omega^j$ отрицательно определена. Интерпретируя плоскую трещину, как вырожденную полость, находим, что $P^j = -2\Upsilon^j$. При этом $\det \Upsilon^j = 0$, так как трещина не реагирует на продольное нагружение и потому $X^{j1},\dots, X^{j6}$ линейно зависимы. Значит, в случае плоской трещины P^j – лишь неположительно определенная матрица. Если поверхность трещины не является цилиндрической (в частности, плоской), то матрица поляризации сохраняет свойство отрицательности.

После предельного перехода $A^j \to \infty$ (абсолютно жесткое включение ω^j) уравнения (2.2) исчезают и вместо (2.3) возникают условия [1]:

$$w(\xi) = \Phi(\xi) + d(\xi)C, \quad \xi \in \partial\omega^j, \tag{3.6}$$

$$\int_{\partial\omega^j} d(\xi)^t D(n(\xi))AD(\nabla_\xi)^t w(\xi)ds_\xi = \psi. \tag{3.7}$$

Данные $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^t$ и $\psi \in \mathbf{R}^6$ восстанавливаются по F и Ψ из (2.2) и (2.3), но явные формулы здесь не понадобятся.

Нелокальные краевые условия (3.6), (3.7) связаны с условиями Дирихле

$$w(\xi) = \Phi(\xi), \quad \xi \in \partial\omega^j \tag{3.8}$$

Поясним эту связь, определив попутно еще одну интегральную характеристику абсолютно жесткого включения – матрицу (тензор) упругой емкости, возникающую при рассмотрении классической задачи Робэна.

Пусть $\eta^{j1},\ldots,\eta^{j,12}$ – решения однородной ($\Phi = 0$) задачи (2.1), (3.8):

$$\begin{gathered}
\eta^{jk}(\xi) = d^k(\xi) + Y^{jk}(\xi) = d^k(\xi) - \sum_{m=1}^{6}\sum_{i=1}^{3}(M^j_{k,m} d^m_i(-\nabla_\xi) + \\
+ M^j_{k,6+m} D^m_i(-\nabla_\xi))T^i(\xi) + O(|\xi|^{-3}) \\
\eta^{j,6+k}(\xi) = D^k(\xi) + Y^{j,6+k}(\xi) = D^k(\xi) - \sum_{m=1}^{6}\sum_{i=1}^{3}(M^j_{6+k,m} d^m_i(-\nabla_\xi) + \\
+ M^j_{6+k,6+m} D^m_i(-\nabla_\xi))T^i(\xi) + O(|\xi|^{-3})
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $k = 1,\ldots, 6$, а M^j_{pq} – элементы матрицы M размером 12×12. Повторением вывода формул (2.8), (2.11) и (3.5) получаем, что $M^j_{pq} = 2E(\eta^{jp}, \eta^{jq}; \mathbf{R}^3 \setminus \omega^j)$. Следовательно, матрица Грама M положительно определена и симметрична. Ее можно разбить на 6×6-блоки M^{jik}:

$$M^j = \begin{Vmatrix} M^{j11}, & M^{j12} \\ M^{j21}, & M^{j22} \end{Vmatrix} \tag{3.10}$$

При этом M^{j11} и M^{j22} наследуют свойства положительности и симметричности $M^{j21} = (M^{j12})^t$. Блок M^{j11} называем матрицей упругой емкости, а саму M^j – расширенной матрицей упругой емкости.

Сравним теперь решение w задачи (2.1), (3.6), (3.7) с решением $\mathbf{w}$ задачи (2.1), (3.8). Оказывается, что при некотором $b \in \mathbf{R}^6$:

$$w(\xi) = \mathbf{w}(\xi) + Y^j b \tag{3.11}$$

В самом деле, согласно (3.9) $Y^j = (Y^{j1},\ldots, Y^{j6})^t = -d$ на $\partial\omega^j$, т.е. в (3.6) $C = -b$. Кроме того, обозначив $\mathbf{J}(w)$ левую часть (3.7) и повторив приведшие к (2.8), (2.11) выкладки для вычисления $\mathbf{J}(d^k)$, при учете (3.11) находим

$$\mathbf{J}(w) = \mathbf{J}(\mathbf{w}) + M^{j11} b \tag{3.12}$$

Рассмотрим столбец ζ^j решений однородной ($\Phi = 0$, $\psi = 0$) задачи (2.1), (3.6), (3.7), который можно получить из (2.10) предельным переходом. Положив $\eta^j = (\eta^{j7},\ldots, \eta^{j12})$, ищем ζ^j как сумму $\eta^j + Y^j N$ с подходящей матрицей N. Условия (3.6) с $\Phi = 0$ соблюдены. Подобно (3.12):

$$(\mathbf{J}(\zeta^{j1}),\ldots, \mathbf{J}(\zeta^{j6})) = M^{j21} + M^{j11} N$$

Значит, соотношение $N = -(M^{j11})^{-1} M^{j21}$ обеспечивает выполнение (3.7) при $\psi = 0$. Сравнивая представление для $X^j = \zeta^j - D$, полученное на основе (3.9), с нужным представлением (2.15), видим, что они совпадают, если

$$P^j = M^{j22} - M^{j12}(M^{j11})^{-1} M^{j21} \tag{3.13}$$

Итак, матрица поляризации (3.13) для абсолютно жесткого включения выражается через блоки его расширенной матрицы упругой емкости (3.10). Положительная определенность матрицы (3.13) очевидна. Ввиду непрерывной зависимости от упругих модулей матрица поляризации наследует знакоопределенность для мягких или жестких упругих включений.

4. Асимптотические конструкции. Найдем асимптотику решения u^h задачи (1.8), (1.9), придерживаясь общей схемы [13–15, 7] исследования задач с сингулярными возмущениями. В качестве основного приближения к u^h естественно взять решение v^0 задачи (1.5), (1.6). Оба решения определены с точностью до жестких смещений; нормируем их условиями

$$\int_\Gamma d(x)^t u^h(x)ds_x = 0, \quad \int_\Gamma d(x)^t u^0(x)ds_x = 0 \tag{4.1}$$

Гладкое вблизи точки Q^j поле v^0 допускает разложение в ряд Тейлора

$$v^0(x) = d(y^j)\alpha^j + D(y^i)\varepsilon^j + \gamma^j(y^j) + O(|y^j|^3) \tag{4.2}$$

$$\alpha^j = d(\nabla_x)v^0(Q^j), \quad \varepsilon^j = D(\nabla_x)v^0(Q^j) \tag{4.3}$$

Здесь $y^j = x - Q^j$, d и D – матрицы из (2.7) и (1.3). Векторы $(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)^t$ и $2^{1/2}$ $(\alpha_4^j, \alpha_5^j, \alpha_6^j)^t$ описывают жесткие поступательное и вращательное перемещения точки Q^j, а ε^j – столбец деформаций. Наконец, γ^j – однородный квадратичный векторный полином

$$L(\nabla_x)\gamma^j(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 / 0 \tag{4.4}$$

Применим метод составных разложений из [13, 15] (альтернативой ему служит метод сращиваемых разложений; см. [14], [7, § 6.5] и др.). Асимптотика решения задачи (1.8), (1.9) ищется в виде формального ряда

$$u^h(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} h^k \left\{ v^k(x) + \sum_{j=1}^{N} w^{kj}(h^{-1}y^j) \right\} \tag{4.5}$$

Под v^k подразумеваются решения гладкого типа, а w^{kj} – решения типа пограничного слоя. Сначала построим функции w^{kj} с малыми номерами. Вектор v^0 удовлетворяет условию (1.9) и системе (1.8) на части $\Omega(h)$ тела Ω_h – иными словами, невязка основного приближения v^0 в системе (1.8) концентрируется на дефектах ω_h^j. Помимо этого возникают невязки в условиях сопряжения на $\partial\omega_h^j$. Пользуясь быстрыми переменными $\xi^j = h^{-1}y^j$ и учитывая соотношения (4.2), (4.4) и (1.3), (2.7), представим упомянутые невязки так:

$$\begin{gathered} h^{-1}F^j(\xi^j)\varepsilon^j + h^0 f^j(\xi) + O(h^1), \quad h^0\Psi^j(\xi^j)\varepsilon^j + h^1\psi^j(\xi^j) + O(h) \\ f^j(\xi) = D(\nabla_\xi)(A^j(\xi) - A)D(\nabla_\xi)^t\gamma^j(\xi) \\ \psi^j(\xi) = -D(n(\xi))(A^j(\xi) - A)D(\nabla_\xi)^t\gamma^j(\xi) \end{gathered} \tag{4.6}$$

При этом F^j и Ψ^j определены в (2.14). Следовательно, $w^{0j} = 0$ и

$$w^{1j}(\xi) = X^j(\xi)\varepsilon^j \tag{4.7}$$

Кроме того, w^{2j} – решение задачи (2.1)–(2.3) с правыми частями (4.6). Применяя (2.8) и (4.6), убеждаемся, что столбец a коэффициентов в разложении (2.6) решения w^{2j} аннулируется. Поэтому $w^{2j}(\xi) = O(|\xi|^{-2})$ и

$$h^1 w^{1j}(h^{-1}y^j) + h^2 w^{2j}(h^{-1}y^j) = h^3 V^j(x) + O(h^4 |y^j|^{-3}) \tag{4.8}$$

В соответствии с (2.16) и (2.15) векторы $V^j(x)$ имеют вид

$$V^j(x)=[P^jD(\nabla_x)^tT(y^j)]^t\varepsilon^j=\sum_{k,m=1}^{6}\varepsilon^j_kP^j_{km}\sum_{i=1}^{3}D^m_i(\nabla_x)T^i(y^j) \tag{4.9}$$

Сумма $hw^{1j}+h^2w^{2j}$ порождает дополнительные невязки $O(h^3)$ в системе (1.8) на дефектах ω^p_h при $p\neq j$, однако они учитываются лишь при построении членов h^5w^{5p}. Основная погрешность $O(h^3)$ возникает в (1.9) – она в главном компенсируется членом h^3v^3, так как в силу (4.8) равна

$$h^3\sum_{j=1}^{N}B^0(x,\nabla_x)V^j(x)+O(h^4)\equiv h^3\varphi(x)+O(h^4) \tag{4.10}$$

Теперь можно определить поправки гладкого типа. Благодаря (4.10) $v^1=v^2=0$. Нагрузка φ самоуравновешенная, а v^3 – решение задачи

$$L(\nabla_x)v^3(x)=0,\quad x\in\Omega;\quad B(x,\nabla_x)v^3(x)=-\varphi(x),\quad x\in\partial\Omega \tag{4.11}$$

5. Обоснование асимптотики. Из асимптотических членов составим частичную сумму ряда (4.5) – приближенное решение задачи (1.8), (1.9)

$$\mathbf{u}^h(x)=v^0(x)+h^3v^3(x)+h\sum_{j=1}^{N}[X^j(h^{-1}y^j)\varepsilon^j+hw^{2j}(h^{-1}y^j)] \tag{5.1}$$

Справедлива энергетическая оценка

$$\|u^h-\mathbf{u}^h;\ W^1_2(\Omega)\|\leq ch^{7/2} \tag{5.2}$$

Ее проверка достигается обычным путем: вектор (5.1) подставляется в (1.8), (1.9), невязка оценивается по норме пространства $W^1_2(\Omega)^*$, а затем при учете (4.1) применяется неравенство Корна (см. [11, 16, 17] и др.). Далее будет использоваться иное соотношение

$$\|u^h-\mathbf{u}^h;\ L_2(\Omega)\|\ +\ \|u^h-\mathbf{u}^h;\ W^1_2(\Gamma)\|\leq Ch^4 \tag{5.3}$$

Постоянные c и C в (5.2) и (5.3) не зависят от $h\in(0,h_0]$. Обращаясь к локальным оценкам решений эллиптических задач, из (5.2) можно вывести (5.3) с меньшим показателем 7/2 степени h. Тем самым, оценка (5.3) уточняет (5.2), однако в ней отсутствует норма в $L_2(\Omega)$ градиента разности $u^h-\mathbf{u}^h$, для которого показатель 7/2 неулучшаем. Само неравенство (5.3) возникает в результате упрощения (загрубления) асимптотически точных весовых оценок решений задач в сингулярно возмущенных областях (см. [13, 15], а также [18]). Не останавливаясь на проверке (5.3), обсудим еще один вопрос, в котором весовые нормы играют решающую роль.

Положим $G^j=(G^{j1},\ldots,G^{j6})$, где G^{jk} – нормированное условие (4.1) решение задачи (1.5), (1.6) с сингулярной правой частью

$$L(\nabla_x)G^{jk}(x)=D^k(\nabla_x)\delta(x-Q^j),\quad x\in\Omega_0 \tag{5.4}$$
$$B(x,\nabla_x)G^{jk}(x)=0,\quad x\in\Gamma$$

Поля $G^{j1},\ldots,G^{j6}$ описывают деформации тела Ω_0 воздействиями, сосредоточенными в точке Q^j (двойная сила, центр расширения и т.п.). Ввиду (2.4) справедливы представления (с гладкими регулярными частями $\mathbf{G}^{jk}$):

$$G^{jk}(x)=\sum_{i=1}^{3}D^k_i(\nabla_x)T^i(x-Q^j)+\mathbf{G}^{jk}(x) \tag{5.5}$$

Согласно (4.9)–(4.11) сумма $\mathbf{V} = \upsilon^3 + V^1 + \ldots + V^N$ переписывается в виде

$$\mathbf{V}(x) = \upsilon^3(x) + \sum_{j=1}^{N} V^j(x) = \sum_{j=1}^{N} G^j(x) P^j \varepsilon^j \tag{5.6}$$

В рамках метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [19, 14, 7] и др.) вектор (5.6) интерпретируется как второй член внешнего представления (поправка типа "дальнего поля"), причем вне окрестностей дефектов ω_h^j в качестве приближения к решению u^h выбирается сумма

$$\mathbf{v}^h(x) = \upsilon^0(x) + h^3\mathbf{V}(x) = \upsilon^0(x) + h^3 \sum_{j=1}^{N} G^j(x) P^j \varepsilon^j \tag{5.7}$$

В силу (5.4) $\mathbf{v}^h$ есть ничто иное, как решение задачи (1.5), (1.6) с дополнительными сосредоточенными воздействиями, интенсивность которых пропорциональна деформациям $\varepsilon^j = \varepsilon(\upsilon^0, Q^j)$, порождаемых полем смещений в бездефектном теле. Конструкция (5.7) приближенного решения вполне согласуется с предложенной в [20, 21] концепцией, которая каждому дефекту приписывает четырехвалентный тензор и объявляет линейную комбинацию вида (5.7) решением задачи о теле с точечными дефектами. В разд. 7 будет показано, что упомянутый тензор порождается матрицей упругой поляризации дефекта.

Вопрос об оправдании аппроксимации u^h сингулярным полем (5.7) не может быть решен на основе обычных оценок, оперирующих с "равномерными" нормами, – в силу (4.8) разность $\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h$ неограниченно возрастает при $x \to Q^j$. Тем не менее, удается подобрать весовые нормы так, чтобы они "подавляли" влияние пограничных слоев, обеспечивали близость $\mathbf{v}^h$ к u^h и, что особенно важно, гарантировали "хорошие" свойства оператора в соответствующих функциональных пространствах. Такой подход реализован в статьях [22, 23], базирующихся на идеях, высказанных в [24] и интенсивно применяемых в теории рассеяния (см. [25] и др.). В [23] задаче (1.8), (1.9) сопоставляется самосопряженный оператор в подходящем весовом классе и проверяется, что его атрибуты дают достаточно точную аппроксимацию реальных объектов. Подчеркнем, что результаты [22, 23] доставляют математическое обоснование методики, развитой в работах [20, 21] и др.

6. Асимптотика потенциальной энергии деформации. Рассмотрим функционал потенциальной энергии деформации поврежденного тела

$$\mathbf{U}_h = \mathbf{E}_h - \int_\Gamma u^h(x) \cdot p(x) ds_x \tag{6.1}$$

$$\mathbf{E}_h = \frac{1}{2} \int_\Omega [D(\nabla_x)^t u^h(x)]^t A_h(x) D(\nabla_x)^t u^h(x) dx \tag{6.2}$$

Вычитаемое – работа внешних сил и в соответствии с (3.4), (1.7) $\mathbf{E}_h$ – упругая энергия. Обращаясь к формуле Бетти и к оценке (5.3), находим, что

$$\mathbf{U}_h = -\frac{1}{2} \int_\Gamma u^h(x) \cdot p(x) ds_x = -\frac{1}{2} \int_\Gamma \mathbf{u}^h(x) \cdot p(x) ds_x + O(h^4) \tag{6.3}$$

Вычислим последний интеграл в (6.3). В силу (4.8) $\mathbf{u}^h(x) - \mathbf{v}^h(x) = O(h^4)$ при $x \in \Gamma$, т.е. в (6.3) можно заменить $\mathbf{u}^h(x)$ на (5.7). Будучи решениями задач (5.4), векторы (5.5) исполняют роль аналогов функции Грина и потому, учитывая (1.8), (1.9) и (5.4), а также (1.4) и (4.3), получаем

$$\int_\Gamma G^j(x)^t p(x) ds_x = \int_\Omega [L(\nabla_x) G^j(x)]^t \upsilon^0(x) dx =$$

$$= \int_\Omega [D(\nabla_x)\delta(x - Q^j)]^t \upsilon^0(x) dx = -D(\nabla_x)^t \upsilon^0(x)\Big|_{x=Q^j} = -\varepsilon^j \tag{6.4}$$

В соответствии с (5.7) и (6.3):

$$\mathbf{U}_h = -\frac{1}{2}\int_\Gamma \mathbf{v}^h(x)\cdot p(x)ds_x + O(h^4) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Gamma v^0(x)^t p(x)ds_x - \frac{1}{2}h^3\sum_{j=1}^N \int_\Gamma [G^j(x)P^j\varepsilon^j]^t p(x)ds_x + O(h^4)$$

Первое слагаемое справа совпадает с $\mathbf{U}_0$, потенциальной энергией для тела Ω_0. В силу (6.4) второе слагаемое равно

$$-\frac{1}{2}h^3\sum_{j=1}^N [P^j\varepsilon^j]^t\int_\Gamma G^j(x)^t p(x)ds_x = \frac{1}{2}h^3\sum_{j=1}^N \varepsilon^j\cdot P^j\varepsilon^j$$

Итак, получена асимптотическая формула для приращения $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}_h - \mathbf{U}_0$ потенциальной энергии деформации тела при появлении в нем дефектов

$$\Delta\mathbf{U} = \frac{1}{2}h^3\sum_{j=1}^N \varepsilon^j\cdot P^j\varepsilon^j + O(h^4) \tag{6.5}$$

В иных ситуациях подобные формулы выводились в [26–30] и др.

7. О тензорном характере интегральных характеристик. Обобщим известную задачу Гриффитса [26] о возникновении трещины: в однородном упругом пространстве, нагруженном на бесконечности усилиями σ^∞, появляется включение; требуется найти приращение $\Delta\mathbf{U}$ потенциальной энергии деформации. Поскольку энергия всего пространства бесконечна, то обычно (см. [26–28] и др.) оно исчерпывается расширяющимися областями G_R, для каждой из них рассчитывается приращение $\Delta\mathbf{U}_R$, а затем вычисляется предел $\Delta\mathbf{U} = \lim\Delta\mathbf{U}_R$ при $R\to+\infty$ (он не должен зависеть от G_R!). Если масштабированием свести область G_R к единичной, то в результате получится задача об исчезающе малом включении, решенная в п. 6. Таким образом

$$\Delta\mathbf{U} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^\infty\cdot P\varepsilon^\infty \tag{7.1}$$

По сравнению с (6.5) в (7.1) множитель $h^3 = R^{-3}$ устраняется при обратной замене координат, а остаток $O(h^4)$ уничтожается предельным переходом. Соотношение (7.1), в частности, показывает, что поляризационным характеристикам можно придать тензорный смысл. Перепишем (7.1) в виде

$$\Delta\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3\sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{ij}^\infty P_{kl}^{ij}\varepsilon_{kl}^\infty \tag{7.2}$$

При этом ε_{ij}^∞ – декартовы компоненты тензора деформаций, а величины P_{kl}^{ij} подчиняются обычным условиям симметричности и связываются с компонентами P_{mn} матрицы поляризации формулами

$$P_{jj}^{ii} = P_{ij},\quad P_{kl}^{ii} = 2^{-1/2}P_{im},\quad P_{kl}^{st} = 2^{-1}P_{nm} \tag{7.3}$$

Здесь $i, j = 1, 2, 3$, а возможные значения для троек (k, l, m) и (s, t, n) таковы: (2, 3, 4), (3, 1, 5) и (1, 2, 6). Величины P_{uv}^{pq}, не указанные в (7.3), находятся в соответствии с равенствами $P_{kl}^{ij} = P_{lk}^{ij} = P_{ij}^{kl}$.

Выражение (7.2) инвариантно относительно замен координат и потому (P_{kl}^{ij}) – четырехвалентный тензор (упругой поляризации дефекта). Так как длина столбца деформаций и норма тензора деформаций совпадают, тензор поляризации наследует все свойства матрицы поляризации.

Объекты M^{j11} и (3.13), связанные с расширенной матрицей упругой емкости (3.10), также имеют тензорный характер. Как обычно (см. [2, 31] и др.), за счет выбора декартовой системы координат матрицу (3.10) можно сделать блочнодиагональной, т.е. $M^{j12} = M^{j21} = \mathbf{0}$.

Автор выражает признательность В.Г. Акимовой за большую техническую помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации // Исследования по упругости и пластичности. Л.: изд-во ЛГУ, 1990. Вып. 16. С. 75–91.
2. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. Физматгиз, 1962. 336 с.
3. *Зорин И.С., Назаров С.А.* О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 79–86.
4. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
5. *Назаров С.А.* Упругие емкость и поляризация дефекта в упругом слое // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 57–65.
6. *Movtchan A.B., Nazarov S.A., Polyakova O.R.* The quasistatic growth of a semi infinite crack in a plane containing small defects // C.r. Acad. sci. Paris. Ser. II. 1991. T. 313. No 11. P. 1223–1228.
7. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 520 p.
8. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
9. *Pazy A.* Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1967. V. 24. No 3. P. 193–218.
10. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелеишвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
11. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенств Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
12. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
13. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1981. 206 с.
14. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
15. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie–Verlag, 1990. 430 S.
16. *Nečas L.* Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques. Paris: Masson, 1967. 351 p.
17. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
18. *Назаров С.А., Шпековиус-Нойгебауер М.* Аппроксимация неограниченных областей ограниченными. Краевые задачи для оператора Ламе // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 5. С. 229–268.
19. *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
20. *Канаун С.К.* О модели точечных дефектов в механике упругой неоднородной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 109–118.
21. *Канаун С.К., Левин В.М.* Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во ПГУ, 1993. 398 с.
22. *Назаров С.А.* Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 2. С. 224–241.

23. *Назаров С.А.* Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых разложений // Тр. СПб. мат. о-ва. 1998. Т. 5.
24. *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
25. *Павлов Б.С.* Теория расширенной и явнорешаемой модели // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–132.
26. *Griffith A.A.* The theory of rupture // Proc. lst. Intern. Congr. Appl. Mech. Delft: 1925. Waltman, P. 55–63.
27. *Sih G.C., Liebowitz H.* On the Griffith energy criterion for brittle fracture // Intern. J. Solids and Structures. 1967. V. 3. № 1. P. 1–22.
28. *Морозов Н.Ф., Назаров С.А.* К вопросу о вычислении изменения энергии в задаче Гриффитса // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. Вып. 14. С. 3–9.
29. *Мазья В.Г., Назаров С.А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
30. *Мазья В.Г., Морозов Н.Ф., Назаров С.А.* Об изменении потенциальной энергии деформации при вариации области вблизи углового концентратора напряжений. Препринт № 4. Л.: Ленингр. филиал ин-та машиноведения им. А.А. Благонравова, 1989. 32 с.
31. *Бабич В.М., Иванов М.И.* Длинноволновая асимптотика в задачах рассеяния упругих волн // Записки научн. семинаров. ЛОМИ АН СССР. 1986. Т. 156. С. 6–19.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
16.11.1998