МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. А.В. БЕЛОКОНЬ

СОБСТВЕННЫЕ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПО ГЛУБИНЕ СЛОЕ

В работах И.И. Воровича [1–3] были изучены основные свойства дисперсионного множества для задачи о распространении волн в неоднородной по толщине анизотропной полосе (двумерная задача). Результаты, полученные в [1–3], удалось распространить на трехмерную область, и они изложены в п. 2 данной работы, без доказательства, а также были доложены в совместном с И.И. Воровичем докладе [4]. В п. 3, 4 устанавливаются границы, в которых расположено вещественное дисперсионное множество однородной краевой задачи для слоя, а также приводится вид однородного решения в слое, позволяющий применить принцип энергетического излучения [7] для слоя.

М.В. Келдышем были введены присоединенные собственные функции и определена их структура для одномерных задач [5]. Здесь в п. 5 введены присоединенные собственные функции для двумерных задач, определена их структура и установлены условия существования. В п. 6, используя присоединенные собственные функции, изучено поведение вещественных дисперсионных поверхностей в окрестности их начала.

1. Постановка задачи. Пусть упругая неоднородная по толщине среда занимает область $\Pi = \{|x_1| < \infty, |x_2| < \infty, 0 \leqslant x_3 < 1\}$. Будем изучать в этой области режим установившихся колебаний, предполагая, что вектор решения представим в форме $\mathbf{U} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$. Рассматривая в дальнейшем только амплитудные характеристики, приходим к следующей краевой задаче: в области Π требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}) - \beta\rho(x_3)\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad \beta = \omega^2 \tag{1.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}) = \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad x_3 = 1; \quad \mathbf{V}(x_1, x_2, 0) = 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{g}(x_1, x_2) = 0$ при $(x_1, x_2) \notin S$ (S – ограниченная область), а

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}) = \mathbf{L}_0(\mathbf{V}) - \mathbf{L}_{1\gamma,1}(\mathbf{V}) - \mathbf{L}_{1\alpha,2}(\mathbf{V}) - \mathbf{L}_{\gamma\alpha,12}(\mathbf{V}) - \mathbf{L}_{2\gamma,11}(\mathbf{V}) - \mathbf{L}_{2\alpha,22}(\mathbf{V}) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}) = \mathbf{M}_0(\mathbf{V}) + \mathbf{M}_{1\gamma,1}(\mathbf{V}) + \mathbf{M}_{1\alpha,2}(\mathbf{V})$$

Здесь $\mathbf{L}_0(\mathbf{V})$, $\mathbf{M}_0(\mathbf{V})$ и т.д. – трехмерные векторы с составляющими

$$\begin{gathered} L_0^k = -(C^{k3m3}(x_3)V_{m,3})_{,3}, \quad L_{1\alpha}^k = C^{k2m3}(x_3)V_{m,3} + (C^{k3m2}(x_3)V_m)_{,3} \\ L_{1\gamma}^k = C^{k1m3}(x_3)V_{m,3} + (C^{k3m1}(x_3)V_m)_{,3}, \quad L_{\gamma\alpha}^k = (C^{k1m2}(x_3) + C^{k2m1}(x_3))V_m \\ L_{2\alpha}^k = C^{k2m2}(x_3)V_m, \quad L_{2\gamma}^k = C^{k1m1}(x_3)V_m \\ M_0^k = C^{k3m3}(x_3)V_{m,3}, \quad M_{1\gamma}^k = C^{k3m1}(x_3)V_m, \quad M_{1\alpha}^k = C^{k3m2}(x_3)V_m \end{gathered} \tag{1.4}$$

В формулах (1.1), (1.4) плотность $\rho(x_3)$ – кусочно-непрерывна и $\rho(x_3) \geqslant \rho_0 > 0$, а компоненты $C^{klmn}(x_3)$ – кусочно-непрерывны вместе со своими первыми производными.

Применяя к уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.2) двойное преобразование Фурье по координатам x_1 и x_2, найдем, что вектор

$$\mathbf{W}(z,x_3)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{V}(\mathbf{x})e^{i\gamma x_1+i\alpha x_2}dx_1dx_2,\quad z=(\gamma,\alpha,\beta) \tag{1.5}$$

определяется из решения следующей одномерной краевой задачи

$$\mathbf{R}(\mathbf{W})-\beta\rho(x_3)\mathbf{W}=0,\quad x_3\in[0,1];\quad \mathbf{W}(0)=0;\quad \mathbf{T}(\mathbf{W})=\mathbf{G},\quad x_3=1 \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{R}(\mathbf{W})=\mathbf{L}_0(\mathbf{W})+i\gamma\mathbf{L}_{1\gamma}(\mathbf{W})+i\alpha\mathbf{L}_{1\alpha}(\mathbf{W})-\gamma\alpha\mathbf{L}_{\gamma\alpha}(\mathbf{W})+\gamma^2\mathbf{L}_{2\gamma}(\mathbf{W})+\alpha^2\mathbf{L}_{2\alpha}(\mathbf{W})\\ \mathbf{T}(\mathbf{W})=\mathbf{M}_0(\mathbf{W})-i\gamma\mathbf{M}_{1\gamma}(\mathbf{W})-i\alpha\mathbf{M}_{1\alpha}(\mathbf{W})\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\mathbf{G}(\gamma,\alpha)=\iint\limits_S \mathbf{g}(x_1,x_2)e^{i\gamma x_1+i\alpha x_2}dx_1dx_2 \tag{1.8}$$

Остальные обозначения совпадают с принятыми в (1.3), (1.4).

2. Спектральные свойства краевой задачи. Ниже приводится без доказательств ряд фактов, которые имеют место в рассматриваемой задаче. Доказательства ряда лемм и теорем, формулируемых здесь для трехмерной задачи, практически полностью совпадают с доказательствами аналогичных факторов, приведенных Воровичем И.И. для двумерной задачи в работах [1–3].

Лемма 2.1. Решение краевой задачи (1.6), (1.7), (1.8) дается формулами

$$W_k=\frac{R_{km}(z,x_3)G_m(\gamma,\alpha)}{D(z)}\quad (k=1,2,3) \tag{2.1}$$

где $R_{km}(z, x_3)$ при фиксированном x_3, а также $\mathbf{G}$ и D – суть целые функции своих аргументов.

Очевидно, что решение (2.1) имеет смысл, если знаменатель не обращается в ноль. Обозначим дисперсионное множество, в котором

$$D(z)=0,\quad z=(\gamma,\alpha,\beta) \tag{2.2}$$

через Γ, и представим z в виде

$$\gamma=|\gamma|e^{i\varphi},\quad \alpha=|\alpha|e^{i\eta},\quad \beta=-|\beta|e^{i\psi}$$

Лемма 2.2. Существуют положительные постоянные m, m_1, m_2, δ_1, $m>\delta_1$ и непустая область Ω:

$$m-m_1|e^{2i\varphi}-1|-m_2|e^{2i\eta}-1|>\delta_1 \tag{2.3}$$

$$\delta_1(|\gamma|^2+|\alpha|^2)+(1-|e^{i\psi}-1|)|\beta|\rho_{\max}>0$$

не содержащая точек $z\in\Gamma$.

Лемма 2.3. Уравнение (2.2) при любых фиксированных (γ, α) имеет счетное число корней $\beta_k(\gamma, \alpha)$ с единственной точкой сгущения на бесконечности. Если же $z\in\Gamma_g$, где Γ_g – действительная проекция множества Γ, то при вещественных фиксированных (γ, α):

$$\beta_1(\gamma,\alpha)\leqslant\beta_2(\gamma,\alpha)\leqslant\ldots\leqslant\beta_k(\gamma,\alpha)\ldots$$

причем $\beta_k(\gamma, \alpha)\to\infty$, если $k\to\infty$.

Лемма 2.4. Γ – замкнутое множество; в каждой точке $z \in \Gamma$ однородная краевая задача (1.6), (1.7) имеет нетривиальное решение $\mathbf{W}(z, x_3)$; размерность собственного подпространства не более трех.

В дальнейшем наряду с переменными γ, α будем использовать переменные l и η полярной системы координат, так что для $z \in \Gamma_g$:

$$\gamma = l\cos\eta, \quad \alpha = l\sin\eta, \quad l = l(\eta) \tag{2.4}$$

Если теперь рассечь дисперсионное множество Γ_g плоскостью

$$\gamma\sin\eta - \alpha\cos\eta = 0 \tag{2.5}$$

то в сечении получим множество $\Gamma_{g\eta}$ плоских кривых l_η^k. Имеют место:

Лемма 2.5. Пусть η фиксировано, а $(l_0, \beta_0) \in \Gamma_{g\eta}$. В этом случае через точку (l_0, β_0) проходит не менее одной и не более трех вещественных кривых. Кроме того, каждая ветвь, выходящая из этой точки, может быть продолжена на всю полупрямую $l > 0$.

Лемма 2.6. Пусть η фиксировано, тогда на кривых l_η^m обязательно найдутся точки l_m, в которых $\beta_{\eta m}(l)$ принимает минимальное значение $\beta_{\eta m}^{cr}$.

Лемма 2.7. При фиксированном $\beta \geqslant \beta^{cr} = \min\limits_{\eta}(\beta_{\eta 1}^{cr}, \beta_{\eta 2}^{cr}, \ldots, \beta_{\eta m}^{cr})$ уравнение (2.2) имеет действительные решения. При комплексном β или $\beta < \beta^{cr}$ вещественных решений уравнения (2.2) нет.

Теорема 2.1. Действительная проекция $\Gamma_{g\eta}$ множества Γ_g есть объединение $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\beta_{\eta m}$ ветвей $\beta_{\eta m}(l)$ на плоскости (2.5).

3. Структура однородных решений для слоя. Будем теперь рассматривать однородные краевые задачи (1.1), (1.2) и (1.6), (1.7), предполагая в дальнейшем

$$\mathbf{g} = 0 \tag{3.1}$$

Прежде всего, заметим, что к краевой задаче (1.6), (1.7) можно прийти, разыскивая решение (1.1), (1.2) в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}(z, x_3)e^{-i\gamma x_1 - i\alpha x_2} \tag{3.2}$$

В этом случае (3.2) будет собственной функцией (1.6), (1.7), если $z \in \Gamma$ при фиксированном β и, очевидно, ограниченной в области Π, если $z \in \Gamma_g$.

Легко заметить, что использование (3.2) в качестве собственной функции приводит к механически нереальному результату – бесконечному потоку энергии. Действительно, если использовать выражения для осредненных за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ и по толщине компонент вектора Умова – Пойтинга [6], и проинтегрировать их по цилиндрической поверхности радиуса $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, то получим

$$P_m = -\frac{\omega}{2}R\int_0^1\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[\sigma_{km}(\mathbf{V})V_k^*]dx_3 d\theta \quad (m = 1, 2)$$

где σ_{km} – компоненты тензора напряжений.

Видно, что полный поток энергии будет ограничен при $R \to \infty$, если только собственные функции краевой задачи будут убывать не медленнее чем $R^{-1/2}$ при $R \to \infty$. Такими свойствами будут обладать собственные функции вида

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \int_Z C(\gamma, \alpha)\mathbf{W}(z, x_3)e^{-i\gamma x_1 - i\alpha x_2}dZ \tag{3.3}$$

где $\mathbf{W}$ – собственная функция краевой задачи (1.6), (1.7), (3.1), а Z – любой контур, получающейся в результате сечения дисперсионного множества Γ_g плоскостью

$\beta = \text{const}$. Действительно, применяя к вычислению интеграла (3.3) метод стационарной фазы [7], можно показать, что при $R \to \infty$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \sum_k \frac{C(\gamma_k, \alpha_k)\mathbf{W}(\gamma_k, \alpha_k, x_3)}{\sqrt{|\chi_k|}} \exp\left\{-i\left[\left(\gamma_k \cos\theta + \alpha_k \sin\theta)R + \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(\gamma''(\alpha_k)\cos\theta\right)\right]\right\} \tag{3.4}$$

Здесь (γ_k, α_k) – точки, являющиеся решением уравнения

$$\gamma'(\alpha) = -\operatorname{tg}\theta \tag{3.5}$$

где θ – угол, определяющий направление, в котором вычисляется асимптотика, $x_1 = R\cos\theta$, $x_2 = R\sin\theta$, и χ_k – кривизна Z в точках (γ_k, α_k).

Необходимо также заметить, что имеет место соотношение $\operatorname{sgn}(\gamma''(\alpha_k)\cos\theta) = \operatorname{sgn}(\alpha''(\gamma_k)\sin\theta)$, которое показывает, что вместо уравнения (3.5) для асимптотического вычисления интеграла (3.3), можно использовать уравнение $\alpha'_\gamma(\gamma) = -\operatorname{ctg}\theta$.

Теперь из (3.4) видим, что если уравнение (3.5) имеет вещественное решение, то собственная функция (3.3) обладает достаточными свойствами для существования конечного оттока энергии. Из вышесказанного вытекают следующие леммы.

Лемма 3.1. Однородным решением краевой задачи (1.6), (1.7), (3.1), обладающим достаточным условием для ограниченности потока энергии на бесконечности, является функция (3.3) при условии $z \in \Gamma_g$.

Лемма 3.2. Пусть $z \in \Gamma$, но $z \notin \Gamma_g$, тогда однородное решение краевой задачи в классе функций, ограниченных на бесконечности ($R \to \infty$), есть тождественный ноль.

4. Оценка границ множества Γ_g. Для дальнейшего понадобится следующая, легко доказываемая, лемма.

Лемма 4.1. Краевая задача (1.6), (1.7), (3.1) эквивалентна следующему операторному уравнению

$$\mathbf{W} = [\alpha\mathbf{G}_1 + \gamma\mathbf{G}_2 - \alpha^2\mathbf{G}_3 - \gamma^2\mathbf{G}_4 - \alpha\gamma\mathbf{G}_5 + \beta\mathbf{G}_6]\mathbf{W} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{G}_k$ – вполне непрерывные самосопряженные операторы в $\mathbf{h}_2$, определяемые при помощи соотношений

$$(\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = \int_0^1 C^{k3m3}(x_3) W_{k,3} A^*_{m,3} dx_3, \quad \mathbf{W}(z,0) = \mathbf{A}(z,0) = 0$$

$$(\mathbf{G}_1\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = -i\int_0^1 C^{k2m3}(x_3)(W_{m,3}A^*_k - W_k A^*_{m,3})dx_3$$

$$(\mathbf{G}_2\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = -i\int_0^1 C^{k1m3}(x_3)(W_{m,3}A^*_k - W_k A^*_{m,3})dx_3$$

$$(\mathbf{G}_3\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = \int_0^1 C^{k2m2}(x_3) W_m A^*_k dx_3, \quad (\mathbf{G}_4\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = \int_0^1 C^{k1m1}(x_3) W_m A^*_k dx_3$$

$$(\mathbf{G}_5\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = \int_0^1 C^{k1m2}(x_3)(W_m A^*_k - W_k A^*_m)dx_3, \quad (\mathbf{G}_6\mathbf{W}, \mathbf{A})_{h_2} = \int_0^1 \rho(x_3) W_k A^*_k dx_3$$

Вычислим теперь для кривой $l_\eta \in \Gamma_{g\eta}$ производную $\partial\beta/\partial l$, имея в виду, что

$$\frac{\partial\beta}{\partial l} = \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\cos\eta + \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\sin\eta \tag{4.2}$$

Дифференцируя (4.1) вначале по γ, а затем по α, легко найдем, учитывая (4.1) и (4.2), что имеет место формула

$$\frac{\partial\beta}{\partial l}(\mathbf{G}_4\mathbf{W},\mathbf{W}) = -(\mathbf{G}_2\mathbf{W},\mathbf{W})\cos\eta - (\mathbf{G}_1\mathbf{W},\mathbf{W})\sin\eta + 2lJ(\eta,\mathbf{W}) \tag{4.3}$$

В формуле (4.3) введены обозначения, которые будут использованы и в дальнейшем

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})_{h_2}$$

$$J(\eta,\mathbf{W}) = (\mathbf{G}_4\mathbf{W},\mathbf{W})\cos^2\eta + (\mathbf{G}_3\mathbf{W},\mathbf{W})\sin^2\eta + (\mathbf{G}_5\mathbf{W},\mathbf{W})\sin\eta\cos\eta$$

Лемма 4.2. Пусть α_0, γ_0, β_0 – точка, лежащая на кривой l_η, тогда существуют такие положительные постоянные M и d, что имеют место оценки

$$\beta(\gamma,\alpha) \leqslant \frac{M(\eta)}{\rho_{\min}} l(l-l_0) + \frac{\beta_0 - d}{l_0} l + d \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial l} \leqslant \frac{M(\eta)}{\rho_{\min}}(2l-l_0) + \frac{\beta_0 - d}{l_0}, \quad \rho_{\min} = \min\rho(x_3)$$

$$l_0^2 = \alpha_0^2 + \gamma_0^2, \quad l^2 = \alpha^2 + \gamma^2 > l_0^2$$

Для доказательства составим выражение, вытекающее из (4.1):

$$\beta(\mathbf{G}_6\mathbf{W},\mathbf{W}) = (\mathbf{W},\mathbf{W}) - \alpha(\mathbf{G}_1\mathbf{W},\mathbf{W}) - \gamma(\mathbf{G}_2\mathbf{W},\mathrm{W}) + l^2J(\eta,\mathbf{W}) \tag{4.5}$$

Из (4.3), (4.5) найдем

$$(l\partial\beta/\partial l - \beta)(\mathbf{G}_6\mathbf{W},\mathbf{W}) = l^2J(\eta,\mathbf{W}) - (\mathbf{W},\mathbf{W}) \tag{4.6}$$

Принимая во внимание тождество

$$J(\eta,\mathbf{W}) = \int_0^1 C^{klmn}(x_3)g_{kl}(\mathbf{W})g^*_{mn}(\mathbf{W})dx_3 \tag{4.7}$$

$$g_{11} = W_1\cos\eta, \quad 2g_{12} = W_1\sin\eta + W_2\cos\eta, \quad g_{22} = W_2\sin\eta \tag{4.8}$$

$$2g_{13} = W_3\cos\eta, \quad 2g_{23} = W_3\sin\eta, \quad g_{33} = 0$$

нетрудно показать с учетом свойств упругих постоянных, что из (4.7), (4.8) следует

$$J(\eta,\mathbf{W}) \leqslant \frac{M(\eta)}{\rho_{\min}}(\mathbf{G}_6\mathbf{W},\mathbf{W}) \tag{4.9}$$

и существование постоянной $M(\eta)$ доказано.

Далее, из очевидного неравенства

$$(\mathbf{W},\mathbf{W}) \geqslant m(\mathbf{G}_6\mathbf{W},\mathbf{W}), \quad m \geqslant \delta > 0$$

вытекает, что функционал $X(\mathbf{W}) = (\mathbf{W},\mathbf{W})/(\mathbf{G}_6\mathbf{W},\mathbf{W})$ имеет точную границу d:

$$d = \inf Z(\mathbf{W}), \qquad \mathbf{W} \in \mathbf{h}_2 \tag{4.10}$$

Используя теперь (4.6), (4.9), (4.10), легко доказать лемму 4.2.

Лемма 4.1 устанавливает важное свойство поведения вещественного дисперсионного множества Γ_g и показывает, что внутри параболоида вращения, уравнение которого дается правой частью первого неравенства (4.4), нет точек принадлежащих кривой, проходящей через l_0. Установим теперь другое свойство (без доказательства), а именно, покажем, что Γ_g целиком располагается внутри некоторого параболоида вращения.

Лемма 4.3. Пусть γ, α, β – вещественные, тогда для $\beta(\gamma, \alpha)$ имеет место следующая оценка

$$\beta(\gamma, \alpha) \geqslant \frac{m_1}{\rho_{\max}}(\gamma^2 + \alpha^2) + m_1 d_1$$

где m_1, d_1 – положительные постоянные, существование которых можно установить.

5. Присоединенные собственные функции однородной краевой задачи (1.1), (1.2), (3.1). Выше было показано, что собственные функции для слоя могут быть представлены в виде интеграла (3.3). В связи с этим будем разыскивать присоединенные собственные функции в форме

$$\mathbf{V}^g = \int\limits_Z C(\gamma, \alpha)\mathbf{B}^g(x_1, x_2, x_3, z)dZ \tag{5.1}$$

$$\mathbf{B}^g = \sum_{s=0}^{q} \frac{(-ix_1 \cos\eta - ix_2 \sin\eta)^s}{(q-s)!} e^{-i(\gamma x_1 + \alpha x_2)} \overset{s}{\mathbf{B}}(z, x_3)$$

Подставляя (5.1) в (4.2), (4.3), получим

$$\mathbf{P}_S(\mathbf{B}) = \mathbf{L}(\overset{s}{\mathbf{B}}) - \beta\rho(x_3)\overset{s}{\mathbf{B}} + \mathbf{\Phi}_1(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + \mathbf{\Phi}_2(\overset{s-2}{\mathbf{B}}) = 0 \tag{5.2}$$

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{B}) = \mathbf{M}(\overset{s}{\mathbf{B}}) - i\cos\eta\mathbf{M}_{1\gamma}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) - i\sin\eta\mathbf{M}_{1\alpha}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) = 0, \quad x_3 = 1 \tag{5.3}$$

$$\overset{s}{\mathbf{B}}(z, 0) = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, q), \quad \overset{-1}{\mathbf{B}} = \overset{-2}{\mathbf{B}} = 0$$

$$\mathbf{\Phi}_1(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) = i\cos\eta\mathbf{L}_{1\gamma}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + i\sin\eta\mathbf{L}_{1\alpha}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + (\gamma\sin\eta + \alpha\cos\eta)\mathbf{L}_{\gamma\alpha}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) +$$

$$+ 2\gamma\cos\eta\mathbf{L}_{1\gamma}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + 2\alpha\sin\eta\mathbf{L}_{1\alpha}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) \tag{5.4}$$

$$\mathbf{\Phi}_2(\overset{s-2}{\mathbf{B}}) = \sin\eta\cos\eta\mathbf{L}_{\gamma\alpha}(\overset{s-2}{\mathbf{B}}) + i\sin\eta\mathbf{L}_{1\alpha}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + \cos^2\eta\mathbf{L}_{2\gamma}(\overset{s-2}{\mathbf{B}}) + \sin^2\eta\mathbf{L}_{2\alpha}(\overset{s-2}{\mathbf{B}})$$

Условия разрешимости краевой задачи (5.2), (5.3) имеют вид

$$Q_s(\mathbf{B}) = \int\limits_0^1 [\mathbf{\Phi}_1(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + \mathbf{\Phi}_2(\overset{s-2}{\mathbf{B}})]\mathbf{A}^* dx_3 - \{i\cos\eta\mathbf{M}_{1\gamma}(\overset{s-1}{\mathbf{B}}) + i\sin\eta\mathbf{M}_{1\alpha}(\overset{s-1}{\mathbf{B}})\}\mathbf{A}^* |_{x_3=1} = 0 \tag{5.5}$$

где $\mathbf{A}$ – любой собственный элемент краевой задачи, сопряженной к (1.4).

Подставляя (2.4) в (1.6), (1.7) и дифференцируя полученное s раз по l, найдем

$$\mathbf{P}_s(\mathbf{B}_1) + \sum_{m=0}^{s-1} \frac{1}{(s-m)!} \overset{m}{\mathbf{B}}_1 \rho(x_3) \frac{\partial^{s-m}\beta}{\partial l^{s-m}} = 0 \tag{5.6}$$

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{B}_1) = 0, \quad x_3 = 1, \quad \overset{s}{\mathbf{B}}_1(z, 0) = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, q), \quad \overset{-1}{\mathbf{B}}_1 = \overset{-2}{\mathbf{B}}_2 = 0 \tag{5.7}$$

$$\overset{s}{\mathbf{B}}_1 = s!\partial^s \mathbf{W} / \partial l^s$$

Поскольку (5.6), (5.7) получено в результате дифференцирования по параметру краевой задачи (1.6), (1.7), (4.1), то в том случае, когда $\overset{0}{\mathbf{B}}_1$ является собственной функцией последней, функции $\overset{s}{\mathbf{B}}_1$ автоматически удовлетворяют как краевым условиям (5.7), так и дифференциальному уравнению (5.6) для любых s. Нетрудно показать, что в этом случае тождественно выполняются и условия вида

$$Q_s(\mathbf{B}_1)+\int_0^1 \rho(x_3)\sum_{m=0}^{s-1}\frac{1}{(s-m)!}\overset{m}{\mathbf{B}}_1\,\mathbf{A}^*\,\frac{\partial^{s-m}\beta}{\partial l^{s-m}}dx_3 \tag{5.8}$$

Из сравнения (5.6)–(5.8) с (5.1), (5.3), (5.5) вытекает

Теорема 5.1. Для того, чтобы однородная краевая задача (1.1), (1.2) допускала решение вида (5.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial\beta}{sl}=\frac{\partial^2\beta}{\partial l^2}=\ldots=\frac{\partial^q\beta}{\partial l^q}=0,\qquad \frac{\partial^{q+1}\beta}{\partial l^{q+1}}=0,\quad \alpha,\gamma\in Z$$

при этом $\overset{s}{\mathbf{B}}=\overset{s}{\mathbf{B}}_1$.

Используя полученные результаты, выясним поведение дисперсионных поверхностей в точках пересечения с осью β.

6. О поведении дисперсионных поверхностей в точках пересечения с осью β. Найдем точки пересечения множества Γ с осью β. Для этого положив в (1.6), (1.7) $\alpha=\gamma=0$, получим, учитывая (3.1):

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{W}^0)=\beta^0\rho(x_3)\mathbf{W}^0,\qquad \mathbf{W}^0(0)=0,\qquad \mathbf{W},^0_3(1)=0 \tag{6.1}$$

Поскольку очевидно, что собственные значения краевой задачи (6.1) вещественны, то в том случае, когда ранг собственного подпространства собственных функций равен единице, они имеют вид

$$\mathbf{W}^0_{(k)}=C_k\varphi_k,\quad \beta=\beta^0_k \tag{6.2}$$

Здесь φ_k – вещественная вектор-функция, а C_k – произвольная постоянная; индекс k означает, что решению отвечает собственное значение β^0_k.

Легко проверяется, что для собственных функций вида (6.2) выполняются равенства

$$(\mathbf{G}_1\mathbf{W}^0_{(k)},\,\mathbf{W}^0_{(k)})=(\mathbf{G}_2\mathbf{W}^0_{(k)},\,\mathbf{W}^0_{(k)})=0 \tag{6.3}$$

а из (6.3) и (4.2). (4.3) следует

$$\partial\beta/\partial\alpha=\partial\beta/\partial\gamma=0 \tag{6.4}$$

Из (6.4) вытекает, что точки $(0, 0, \beta^0_k)$ являются точками, подозрительными на экстремум функции $\beta(\gamma,\alpha)$. Кроме того, из (6.3) и (6.4) следует, что выполнены условия разрешимости для неоднородного операторного уравнения вида

$$\frac{\partial\mathbf{W}^0_{(k)}}{\partial l}=\beta^0_k\mathbf{G}_6\frac{\partial\mathbf{W}^0_{(k)}}{\partial l}+\cos\eta\mathbf{G}_2\mathbf{W}^0_{(k)}+\sin\eta\mathbf{G}_1\mathbf{W}^0_{(k)} \tag{6.5}$$

и, как следует из предыдущего параграфа, наряду с собственной функцией $\mathbf{W}^0_{(k)}$ существует и присоединенная вектор-функция $\partial\mathbf{W}^0_{(k)}/\partial l$.

Будем в дальнейшем называть точки $(0, 0, \beta^0_k)$ точками начала дисперсионных поверхностей.

Покажем теперь как, используя собственные и присоединенные собственные векторы, определить поведение дисперсионных поверхностей в окрестности точек их начала. Для этого вычислим вторую производную $\partial^2\beta/\partial l^2$ при $l=0$, используя при этом (4.2) и (4.1). Имеем

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial l^2}(\mathbf{G}_6\mathbf{W}^0, \mathbf{W}^0)_{h_2} = 2J(\eta, \mathbf{W}^0) - 2\sin\eta\left(\mathbf{G}_1\frac{\partial \mathbf{W}^0}{\partial l},\ \mathbf{W}^0\right)_{h_2} -$$

$$-2\cos\eta\left(\mathbf{G}_2\frac{\partial \mathbf{W}^0}{\partial l},\ \mathbf{W}^0\right)_{h_2} \tag{6.6}$$

При получении формулы (6.6) были учтены тождества (6.3), а присоединенная собственная функция определяется из уравнения (6.5).

Так как множитель, стоящий в (6.6) при $\partial^2\beta/\partial l^2$ ограничен и отличен от нуля, то из (6.6) следует, что вторая производная определяется для любого η единственным образом и является непрерывной функцией η. А это означает, что имеет место лемма.

Лемма 6.1. Пусть ранг собственной функции краевой задачи (1.1), отвечающей собственному значению β_k^0, равен единице. Тогда в окрестности начала дисперсионной поверхности последняя имеет вид

$$\beta_k = \beta_k^0 + l^2\partial^2\beta/\partial l^2 \tag{6.7}$$

Пусть теперь ранг собственного подпространства отличен от единицы, что возможно в силу леммы 2.4. Тогда собственные функции, отвечающие рангу два, имеют вид:

$$\mathbf{W}_{(k)} = C_{k1}\varphi_{k1} + C_{k2}\varphi_{k2} \tag{6.8}$$

а рангу три:

$$\mathbf{W}_{(k)} = C_{k1}\varphi_{k1} + C_{k2}\varphi_{k2} + C_{k3}\varphi_{k3} \tag{6.9}$$

Здесь φ_{kj} – собственные вектор-функции, причем не обязательно вещественные; C_{kj} – произвольные постоянные. Выберем φ_{kj} так, чтобы они удовлетворяли условиям $(\mathbf{G}_6\varphi_{km}, \varphi_{kn})_{h_2} = \delta_{mn}$, где δ_{mn} – символ Кронекера. В этом случае получим

$$C_{kj}\frac{\partial\beta}{\partial l} + (\mathbf{G}_2\mathbf{W}_{(k)},\ \varphi_{kj})_{h_2}\cos\eta + (\mathbf{G}_1\mathbf{W}_{(k)},\ \varphi_{kj})_{h_2}\sin\eta = 0 \tag{6.10}$$

Здесь $j = 1, 2$ для случая (6.8) и $j = 1, 2, 3$ для случая (6.9). Кроме того, производная $\partial\beta/\partial l$ вычислена в точке $l = 0$.

Выражение (6.10) представляет собой систему однородных алгебраических уравнений относительно C_{kj}. Нетривиальное решение этой системы получим лишь в том случае, если ее определитель приравняем к нулю. В результате получим уравнение для определения производной $\partial\beta/\partial l$ при $l = 0$.

Из структуры алгебраической системы (6.10) вытекает, что $\partial\beta/\partial l$ являются собственными числами матрицы (α_{mn}), где

$$\alpha_{mn} = (\mathbf{G}_2\varphi_{km}, \varphi_{kn})\cos\eta + (\mathbf{G}_1\varphi_{km}, \varphi_{kn})\sin\eta$$

и поскольку операторы $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ – самосопряженные, то $\alpha_{mn} = \overline{\alpha_{mn}}$, значит и собственные значения матрицы (α_{mn}) – вещественны. Из предыдущего вытекает лемма.

Лемма 6.2. Пусть ранг собственного подпространства краевой задачи (6.1) равен двум (трем). В этом случае из точки начала дисперсионной поверхности выходят две (три) дисперсионных поверхности, имеющие в окрестности $l = 0$ следующий вид

$$\beta = \beta_m^0 + l\partial\beta/\partial l \tag{6.11}$$

где $\partial\beta/\partial l$ – собственные значения системы (6.10).

В заключение отметим, что для анизотропных материалов, обладающих дополнительными свойствами симметрии, приводящими к тому, что к Γ_g принадлежит не только точка z, но и точка $(-\gamma, -\alpha, \beta)$, собственные значения системы (6.10) имеют вид:

$$\partial\beta / \partial l = \pm\sqrt{\alpha_{11}^2 + |\alpha_{12}|^2} \qquad \text{(ранг 2)}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial l} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2}{2} + |\alpha_{13}|^2 + |\alpha_{23}|^2 + |\alpha_{12}|^2}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial l} = 0 \qquad \text{(ранг 3)}$$

Видно, что в том случае, когда ранг собственного подпространства равен 3, то из точки β_m^0 выходят три дисперсионных поверхности. Две из них в окрестности $l = 0$ имеют вид (6.11), а третья – (6.7).

Автор благодарит Воровича И.И. за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1979.
2. *Ворович И.И.* Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. *Белоконь А.В., Ворович И.И.* Некоторые закономерности образования волновых полей в анизотропном слое при пульсирующей движущейся нагрузке // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 93.
5. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.
6. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
7. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.02.2000