

УДК 539.3

© 2000 г. С.А. ГРИШИН

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕСУРСА ВИНКЛЕРОВА ПОКРЫТИЯ НА УПРУГОЙ ПОДЛОЖКЕ ПРИ ИЗНОСЕ ГЛАДКИМ ВЫПУКЛЫМ ШТАМПОМ

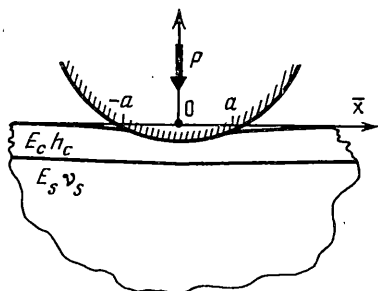
Рассмотрена одна из канонических модельных задач теории износа. Примененный метод решения не использует предположения о монотонном росте пятна контакта и четко отделяет друг от друга пошаговое исследование эволюции во времени упругой системы вследствие износа и решение на шаге собственно упругой контактной задачи с неизвестной площадкой контакта. Выполнена серия вычислений для выявления реально достижимых аппроксимационных возможностей метода. Проведено численное исследование процесса износа мягкого покрытия до его полного истирания хотя бы в одной точке. Отмечены и сопоставлены с данными предшественников основные механические закономерности этого процесса. Получены приближенные формулы для экспресс-оценки размера пятна контакта на разных этапах износа.

1. В плоской постановке рассмотрена задача, схема которой представлена на фиг. 1. Жесткий штамп симметричной относительно замены x на $-x$ формы вдавлируется приложенной без эксцентриситета силой $P > 0$ в поверхность двуслойного основания. Размер a площадки контакта неизвестен. Трением в контакте пренебрегаем. Верхний слой называем *покрытием*, его толщина h_c . Предполагается, что покрытие моделируется как основание Винклера, его коэффициент податливости вычисляется как h_c/E_c , константа E_c называется модулем покрытия. Считается, что покрытие жестко сцеплено с *подложкой*, описываемой моделью упругой полуплоскости с модулем Юнга E_s и коэффициентом Пуассона ν_s .

Начиная с момента времени $t = 0$ установления статического равновесия в системе, происходит медленный износ покрытия, проявляющийся в том, что его толщина становится переменной по оси x , вследствие чего изменяется его жесткость, форма зазора между контактирующими телами, размеры области контакта. Реализовать такой процесс износа можно, например, перемещая штамп перпендикулярно плоскости чертежа, или, если штамп – цилиндр, вращая его вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа. В последнем случае хорошо известно [1], что влияние трения, вызывающего износ, на размеры площадки контакта и на распределение контактных давлений пренебрежимо мало. Считается, что приращение *линейного износа* [2] w за малое время Δt в точке x области контакта является функцией локальных (т.е. в той же точке x) характеристик контакта в момент времени t , предшествующий данному шагу по времени. В остальном же вид этой функции может быть произвольным.

Аналогичные задачи рассматривались ранее различными авторами [3, 4, 5]. Отличия данной постановки и метода будут видны из дальнейшего.

Начнем с рассмотрения упругой контактной задачи с неизвестной площадкой, играющей ключевую роль при пошаговом моделировании износа. В качестве исходного



Фиг. 1



Фиг. 2

примем уравнение [6]:

$$k q(x) + \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a q(y) \left(-\ln \left| \frac{y-x}{a} \right| + C \right) dy = d - f(x), \quad |x| \leq a \quad (1.1)$$

где k – податливость основания Винклера, $E = E_s / (1 - \nu_s^2)$, $q(x)$ – неизвестное контактное давление (сжимающее считается положительным), $f(x)$ – форма штампа – зазор между телами в момент касания в точке $x = 0$. Константа в ядре интегрального оператора и "сближение тел" d в правой части являются неопределенными параметрами, подлежащими исключению. Нагрузка на штамп P предполагается известной. Она связана с контактным давлением равенством

$$\int_{-a}^a q(x) dx = P \quad (1.2)$$

Размер площадки контакта a должен быть определен при решении задачи. Однако именно его удобно выбрать в качестве единицы длины. Выбор единицы массы (силы) безразличен. Введем безразмерную переменную $x = x/a$ (и соответственно $\xi = y/a$), "безразмерную" искомую функцию $q(x) = a^2 q(ax)$, безразмерные зазор $f(x) = f(ax)/a$ и осадку $\delta = d/a$. Уравнения (1.1) (умноженное на a) и (1.2) в новых терминах примут вид

$$\frac{k}{a} q(x) + \frac{2}{\pi E} \int_{-1}^1 q(\xi) (-\ln |\xi - x| + C) d\xi = a^2 (\delta - f(x)), \quad |x| \leq 1 \quad (1.3)$$

$$\int_{-1}^1 q(x) dx = aP \quad (1.4)$$

удобный тем, что пределы интегрирования фиксированы. При заданном $a > 0$ систему (1.3), (1.4) можно рассматривать как уравнения контактной задачи с известной площадкой контакта для штампа фиктивной формы, вдавливаемого в основание с шероховатостью фиктивной жесткости фиктивной силой, и решать ее одним из известных методов. Зная решение, можно корректировать a из дополнительных условий.

Равенства (1.1) (или (1.3)) выражают физический факт, что на всем участке $-a \leq x \leq a$ нормальные перемещения точек поверхности покрытия в точности совпадают с нормальными перемещениями точек подошвы штампа. Тем самым область контакта предполагается односвязной: внутри нее нет участков отставания подошвы от поверхности деформируемого основания. Выпуклость подошвы штампа обеспечивает описанные условия контакта.

Предположим на некоторое время, что a задано. Уравнение (1.3) обычно переписывают в виде, не содержащем неопределенных констант, одним из следующих трех способов.

Первый из них, вполне общий и эффективно применялся в более сложных ситуациях [7]. Обозначим левую часть уравнения (1.3) через $\mathcal{A}q$, рассматривая ее тем самым как линейный оператор, применяемый к вектору q из $L_2[-1, 1]$ (в дальнейшем просто L_2). Обозначим через $\mathcal{J}$ тождественный оператор, а через $\mathcal{P}_1$ – оператор вида

$$\mathcal{P}_1 \bullet = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bullet dx \right) \cdot 1 \quad (1.5)$$

где жирной центрованной точкой обозначено место аргумента, а обычной центрованной точкой – умножение на тождественную единицу, понимаемую как функцию из L_2 . Оператор $\mathcal{P}_1$ является L_2 – ортопроектором на единицу. Оператор $\mathcal{J} - \mathcal{P}_1$ является ортопроектором на ортогональное дополнение единицы. Уравнение (1.4) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}_1 q = 1/2 a P \quad (1.6)$$

Поддействовав же оператором $\mathcal{J} - \mathcal{P}_1$ на левую и правую части уравнения (1.3), получим его следствие

$$(\mathcal{J} - \mathcal{P}_1) \mathcal{A} q = (\mathcal{J} - \mathcal{P}_1)(a^2(\delta - f(x))) = (\mathcal{J} - \mathcal{P}_1)(-a^2 f(x)) \quad (1.7)$$

не содержащее, как это сразу видно, постоянной δ в правой части.

Расшифруем левую часть (1.7) (пределы интегрирования $-1, 1$ опустим)

$$\begin{aligned} (\mathcal{J} - \mathcal{P}_1) \mathcal{A} q &\equiv \frac{1}{a} \left(kq - \frac{1}{2} \int kq dx \right) + \frac{2}{\pi E} \left(\int q(\xi) \left[-\ln |\xi - x| - \frac{1}{2} \int (-\ln |\xi - x|) dx \right] d\xi \right) + \\ &+ \frac{2C}{\pi E} \left(\int q(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \iint q(\xi) d\xi dx \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Последняя скобка правой части (1.8) равна нулю, откуда видно, что постоянная C в уравнении (1.7) также не присутствует. Обратим внимание, что податливость покрытия k в (1.8) постоянной по x не предполагается.

Искомую функцию $q(x)$ представим в виде суммы $q(x) = \bar{q} + \tilde{q}(x)$ константы $\bar{q} \equiv \mathcal{P}_1 q$ и функции с нулевым средним $\tilde{q} \equiv (\mathcal{J} - \mathcal{P}_1)q$. Подставим это разложение в (1.8), воспользуемся линейностью оператора (1.8), а также тем, что в силу (1.6) значение постоянной $\bar{q}$ известно. Перенеся известные слагаемые в правую часть, перепишем (1.7) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} \left(k\tilde{q} - \frac{1}{2} \int k\tilde{q} dx \right) + \frac{2}{\pi E} \left(\int \tilde{q}(\xi) \left[-\ln |\xi - x| - \frac{1}{2} \int (-\ln |\xi - x|) dx \right] d\xi \right) = \\ &= -a^2 \left(f(x) - \frac{1}{2} \int f(x) dx \right) - \frac{P}{2} \left(k - \frac{1}{2} \int k dx \right) - \frac{Pa}{\pi E} \int \left[-\ln |\xi - x| - \frac{1}{2} \int (-\ln |\xi - x|) dx \right] d\xi \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) позволяет однозначно определить $\tilde{q}(x)$ – ортогональную единице составляющую контактного давления – по известной правой части.

Второй путь состоит в том, чтобы вычесть из уравнения (1.3), записанного для произвольной точки x : $|x| \leq 1$, то же самое уравнение, записанное для некоторой фиксированной точки x_0 . Тогда получим

$$\frac{k}{a} q(x) - \frac{k}{a} \Big|_{x=x_0} \cdot q(x_0) + \frac{2}{\pi E} \int_{-1}^1 q(\xi) \left[-\ln \left| \frac{\xi - x}{\xi - x_0} \right| \right] d\xi = a^2 (-f(x) + f(x_0)) \quad (1.10)$$

Точка x_0 выбирается из соображений упрощения уравнения (1.10). В [3], например,

выбирается $x_0 = 1$. Поскольку контактное давление на краю зоны контакта равно нулю для штампа, не имеющего углов, второе слагаемое в (1.10) обращается в нуль, а $f(x_0)$ известно, коль скоро считается известным a . Уравнение (1.4) замыкает систему.

Наконец, третий способ – дифференцирование (1.3) по x . Он приводит к интегродифференциальному уравнению и усиливает особенность ядра интегрального оператора.

Для решения системы (1.3), (1.4), уравнения (1.9) или системы (1.10), (1.4) придется применять различные методы сведения функциональных уравнений к алгебраическим. Будем пользоваться методом Бубнова – Галеркина на базисе из четных ортонормированных многочленов Лежандра $P_{2j}^*(x)$ ($|x| \leq 1, j = 0, 1, 2, \dots$). Удобство такого базиса для рассматриваемой задачи состоит, в частности, в том, что линейная оболочка вектора $P_0^* \equiv 1/\sqrt{2}$ и есть то самое подпространство, проекция на которое известна из равенств (1.4) или (1.6), а оставшиеся функции системы $(P_{2j}^* (j = 1, 2, \dots))$ представляют собой ортонормальный базис его ортогонального дополнения. Поэтому решение представимо рядом $(Q_j (j = 1, 2, \dots))$ – неизвестные коэффициенты

$$q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j P_{2j}^*(x), \quad \tilde{q}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j P_{2j}^*(x), \quad \bar{q} = Q_0 \sqrt{2} = \frac{Pa}{2} \quad (1.11)$$

Подставив ряд для $\tilde{q}(x)$ из (1.11) в уравнение (1.9) и спроектировав это уравнение на базисные векторы P_{2i}^* ($i = 1, 2, \dots$), приходим к алгебраической системе

$$\left(\frac{1}{a} \mathbf{D} + \frac{2}{\pi E} \mathbf{B} \right) \mathbf{Q} = -a^2 \mathbf{F} - \frac{Pa}{\pi E} \mathbf{G} - \frac{P}{2} \mathbf{K} \quad (1.12)$$

где через $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ обозначены симметричные матрицы с компонентами ($i, j = 1, 2, \dots$, интегралы от -1 до 1):

$$D_{ij} \equiv \int k P_{2i}^*(x) P_{2j}^*(x) dx, \quad B_{ij} \equiv \iint (-\ln |\xi - x|) P_{2i}^*(\xi) P_{2j}^*(x) d\xi dx \quad (1.13)$$

а через $\mathbf{Q}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{K}$ – столбцы коэффициентов соответственно: Q_j из (1.11)

$$G_j \equiv \iint (-\ln |\xi - x|) P_{2j}^*(x) d\xi dx \\ F_j \equiv \int f(x) P_{2j}^*(x) dx, \quad K_j \equiv \int k P_{2j}^*(x) dx \quad (1.14)$$

Заметим, что компоненты B_{ij} и G_j никак не зависят от a . Компоненты D_{ij}, F_j, K_j в общем случае зависят от a неявно, через подынтегральные функции. В важном частном случае не зависящей от x жесткости k в силу свойств базисных функций матрица $\mathbf{D}$ становится диагональной с k на главной диагонали, а столбец $\mathbf{K}$ – нулевым.

К той же самой системе (1.12) можно прийти несколько проще. Подставим ряд для $q(x)$ из (1.11) в уравнение (1.3), а потом спроектируем его на базисные векторы P_{2i}^* ($i = 0, 1, 2, \dots$). Получим систему линейных уравнений, из которых, в силу свойств базисных функций, только первое будет содержать неопределенные постоянные C и δ . Отбросим это уравнение. В остальных уравнениях системы подставим вместо коэффициента Q_0 его выражение из последнего равенства (1.11) и перенесем эти члены в правую часть. В результате получим систему (1.12), что совсем не случайно. Переход от (1.3), (1.4) к (1.9) и потом к (1.12) состоял в L_2 -проектировании уравнения (1.3) на подпространство и последующем разложении искомого вектора по базису подпространства. Только что описанную процедуру можно трактовать как обратную последовательность действий, т.е. как разложение искомого вектора по базису всего пространства (включающему в себя базис подпространства) и последующее l_2 -проектирование системы линейных уравнений на подпространство. Роль проектора $\mathcal{P} - \mathcal{P}_1$ игра-

ет единичная матрица, окаймленная нулями слева и сверху. Умножение линейной системы на нее слева приводит к отбрасыванию первого уравнения.

Чтобы перейти от (1.12) к системе, пригодной для численного решения, достаточно оборвать ряды (1.11) после некоторого $j = n$.

Решение Q системы (1.12) существует и единственно $\forall a > 0, \forall k > 0$ при любой правой части. Чтобы показать это, следует придать уравнениям (1.3), (1.4) вариационную интерпретацию, т.е. рассмотреть (1.3) как необходимое условие экстремума (по q при фиксированном a) функционала

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2a}(kq, q) + \frac{1}{\pi E}(\mathcal{A} q, q) - a^2(\delta - f, q) \quad (1.15)$$

при условии (1.4). Круглой скобкой в (1.15) обозначен интеграл по отрезку $[-1, 1]$ от произведения функций

$$(u, v) \equiv \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$$

Обозначим также

$$\mathcal{B}q \equiv \int_{-1}^1 (-\ln |\xi - x|)q(\xi)d\xi, \quad \mathcal{A}q = \mathcal{B}q + C\mathcal{P}_1 q \quad (1.16)$$

Воспользовавшись этими обозначениями, равенством (1.4) и разбиением $q = \bar{q} + \tilde{q}$ (1.12), перепишем (1.15) в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2a}(k\tilde{q}, \tilde{q}) + \frac{1}{\pi E}(\mathcal{B}\tilde{q}, \tilde{q}) + a\left(af + \frac{P}{\pi E}\mathcal{B}1, \tilde{q}\right) + \text{const}_{\tilde{q}} \quad (1.17)$$

В последнее слагаемое (1.17) собраны члены, не зависящие от $\tilde{q}$, и значит, не влияющие на точку экстремума функционала. Варьирование функционала (1.17) по $\tilde{q}$ приводит к уравнению (1.9), а в представлении (1.11), к системе (1.12).

Билинейная форма

$$\frac{1}{2a}(ku, v) + \frac{1}{\pi E}(\mathcal{B}u, v) \quad (1.18)$$

симметрична и непрерывна $\forall u, v \in L_2([-1, 1])$, а при $a > 0, k > 0$ можно показать ее эллиптичность. Эти свойства сохраняются и при сужении формы на подпространство $u, v \perp 1$, в котором разыскивается $\tilde{q}$. Поэтому функционал (1.17) имеет единственный минимум при всяких a, f, P ; приближение точки минимума находится из системы (1.12).

По построению (см. (1.11)) приближенное решение $\tilde{q}$ уравнения (1.9) будет бесконечно-дифференцируемой функцией. То же справедливо и для контактного давления $q(x)$. Однако сказать что-либо о знаке $q(x)$ в области контакта *a priori* нельзя. По физическому смыслу задачи ясно, что контактное давление должно быть неотрицательным (сжимающим) в области контакта и нулевым вне ее, а зазор между штампом и деформируемым телом – нулевым в области контакта и неотрицательным вне ее. Эти требования должны быть использованы для нахождения a (и выяснения непростого в общем случае вопроса о его существовании и единственности).

Удовлетворение названным условиям предполагает поточечную проверку знака функций (одна из которых – зазор – вычисляется квадратурой) на отрезке или полуоси, что достаточно трудоемко. Поэтому фактически полуширина площадки контакта определялась проверкой знака $q(x)$ в единственной точке $x = 1$. Если было $q(1) > 0$, a увеличивалось, если $q(1) < 0$ – a уменьшалось, и так до достижения нужной точности. Начальное приближение выбиралось как большее из значений a для

	$j = 0$	1	2	3
$i = 0$	1,61371			
1	-0,37269	0,83329		
2	-0,03336	-0,18639	0,44993	
3	-0,00861	-0,02694	-0,12027	0,30942
4	-0,00330	-0,00885	-0,01973	-0,08861
5	-0,00158	-0,00395	-0,00712	-0,01543
6	-0,00087	-0,00210	-0,00342	-0,00586
7	-0,00053	-0,00126	-0,00194	-0,00295
8	0,00035	-0,00082	-0,00122	-0,00174

	4	5	6	7	8
$i = 0$					
1					
2					
3					
4	0,23597				
5	-0,07013	0,19074			
6	-0,01266	-0,05804	0,16005		
7	-0,00498	-0,01074	-0,04953	0,13787	
8	-0,00259	-0,00435	-0,00935	-0,04320	0,12103

случаев винклерова покрытия на недеформируемой подложке и задачи Герца для материала основания, в которых a вычисляется по явным несложным формулам.

Такой критерий основан на знании зависимости контактного давления от a в задаче Герца [1] и надежде, что тонкое и мягкое покрытие не внесет в эту зависимость кардинальных изменений. В проведенной серии расчетов процесс всегда сходиллся. Предельные графики контактного давления и зазора вне штампа лежали выше нулевого уровня. Очевидно, существуют формы подошвы штампа, для которых описанный подход неправомерен. Пример такого штампа изображен на фиг. 2.

Итак, решение упругой задачи с неизвестной площадкой контакта сводится к последовательности решения линейных систем (1.12) для различных значений $a > 0$. В силу записи исходных уравнений в виде (1.3), (1.4) матрица $\mathbf{B}$ (1.13), компоненты которой вычисляются наиболее сложным образом по сравнению с другими, входящими в систему (1.12), остается неизменной для всякого a . В этом состоит одно из главных удобств перехода от (1.1), (1.2) к (1.3), (1.4). Значения коэффициентов B_{ij} для $i, j = 0, \dots, 8$ приведены в таблице.

2. Для исследования износа примем модель [2], согласно которой приращение износа Δw в точке x площадки контакта за бесконечно малое время является известной функцией контактного давления в той же самой точке x . Примененный метод позволяет изучать и интегральные модели износа (когда Δw зависит от всей эпюры, например), но расчеты для таких моделей не проводились.

Для определенности возьмем закон износа в форме

$$\Delta w = I_h \Delta L, \quad I_h = M(p/p_*)^{1+\varepsilon}. \quad (2.1)$$

где Δw – уменьшение толщины покрытия на пути трения ΔL (роль времени играет путь трения); I_h – интенсивность линейного износа [2, стр. 277]; p – локальное контактное давление, p_* – предел текучести материала покрытия; M, ε – параметры пары трения, считающиеся известными.

Износ вызывает уменьшение толщины покрытия. Это приводит к тому, что податливость покрытия $k \equiv h_c/E_c$ становится функцией координаты x , и изменяется форма зазора между подошвой штампа и покрытием. Последнее может быть учтено коррекцией формы штампа: именно, функция $f(x)$ в правой части (1.1) заменяется функцией $f(x) + w(x)$, где w – линейный износ, накопленный к рассматриваемому моменту в данной точке поверхности.

Пошаговая схема исследования износа состоит в решении последовательности упругих контактных задач с неизвестной площадкой для неоднородного покрытия при изменяющейся от шага к шагу "форме штампа". Этот алгоритм удобнее описать, пользуясь переменной x , не зависящей от a . На первом шаге решается контактная задача с неизвестной площадкой для покрытия постоянной по x толщины. Отрезок $0 \leq x \leq a$ покрывается равномерной сеткой узлов x_i . В точках сетки вычисляется контактное давление $q(x_i)$, делается шаг ΔL , и по формулам (2.1) вычисляется приращение износа $\Delta w(x_i)$ в точках сетки. Снова решается контактная задача, однако теперь коэффициент при внеинтегральном члене и правая часть уравнения (1.1) являются функциями координаты x , заданными в виде суммы двух слагаемых: аналитического и линейно восполненного по данным на сетке. Процесс поиска a начинается с вычисленного значения первого шага. Если новое a оказывается меньше старого, сетка не меняется. Приращение износа суммируется в узлах старой сетки. Если же a увеличилось, строится новая сетка той же размерности, покрывающая весь затронутый износом участок поверхности покрытия. В этом случае приращения износа в узлах новой сетки вычисляются по формулам (2.1) и суммируются с линейной интерполяцией данных на старой сетке. Таким образом в узлах равномерной сетки, зависящей, вообще говоря, от номера шага, накапливается линейный износ w .

При вычислении интегралов D_j, F_j, K_j (1.13), (1.14) ошибки от такой аппроксимации профиля износа сглаживаются, контактное давление, по построению (1.11), вычисляется как многочлен, и значит приращение износа, по (2.1), – сеточный след очень гладкой функции. Эти соображения позволяют надеяться на устойчивость процесса численного моделирования.

Дальнейшие шаги ничем не отличаются от второго.

3. При расчетах в качестве ориентировочных параметров были выбраны следующие. В золотое покрытие (считаем его модуль близким модулю Юнга золота: $E_c = 7,9 \cdot 10^5$ кГ/см² = 77,473 ГПа [8]) толщиной 1 микрон ($h_c = 10^{-4}$ см) на стальной подложке ($E_s = 2 \cdot 10^6$ кГ/см² = 196,133 ГПа, $\nu_s = 0,3$) вдавливаются длинный цилиндрический валик диаметром $R = 1$ см, нагруженный погонным усилием $P = 1$ кГ/см. Форма подошвы штампа в этом случае может быть взята в виде

$$f(x) = x^2/R \quad (3.1)$$

На фиг. 3 сплошной линией представлен график зависимости контактного давления q (в кГ/см²) от безразмерной координаты $x \equiv x/a \in [0, 1]$ (эпюра контактного давления). Вычисленное значение $a = 6,738 \cdot 10^{-4}$ см. Для сравнения, в отсутствие покрытия, т.е. при вдавливании того же штампа тем же усилием, но прямо в стальную подложку (задача Герца):

$$a_H = \sqrt{\frac{2PR(1-\nu_s^2)}{E_s\pi}} = 5,382 \cdot 10^{-4} \text{ см} \quad (3.2)$$

a в пренебрежении деформируемостью подложки при прочих равных (задача

Винклера):

$$a_W = \left(\frac{3h_c PR}{4E_c} \right)^{1/3} = 4,562 \cdot 10^{-4} \text{ см} \quad (3.3)$$

Эпюры для задач Герца и Винклера, приведенные подобием к реально вычисленной площадке контакта, изображены на фиг. 3 соответственно штриховой и штрих-пунктирными линиями. Как видно, различие между кривыми невелико, но разница в размере площадки контакта заметна.

Эпюра контактной задачи с покрытием должна непрерывно переходить в герцеву при $h_c \rightarrow 0$ и в винклерову при $E_s \rightarrow \infty$. Эти асимптотические проверки подтверждаются расчетом. При этом $a \rightarrow a_H$ или $a \rightarrow a_W$ соответственно.

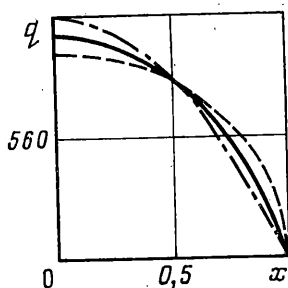
Для штампов более сложной формы ($f(x) \sim x^4$ или x^6 , например) эпюра контактного давления изменяется физически "разумно": появляются "рога" – максимумы ближе к краям штампа. Для еще более сложных форм (типа $f(x) \sim x^2 + \mu \cos Nx$, со значением параметра N , достаточно большим, чтобы в зоне контакта уместилось много волн) сказывается недостаточность аппроксимации (1.11) на основе 8-и четных многочленов Лежандра.

Возвращаясь к рассмотрению фиг. 3, заметим, что максимальное контактное давление, равное примерно 1030 кГ/см^2 , превосходит предел текучести золота в нормальных условиях – контактное взаимодействие вызывает пластическое деформирование поверхности покрытия при очень малой нагрузке на штамп. Однако при низких температурах, например в космосе, предел текучести металлов может возрасти в два – три раза при незначительном (порядка нескольких процентов) увеличении модуля Юнга [9], поэтому рассмотренный пример реалистичен.

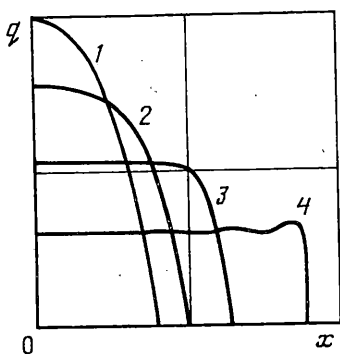
Параметры модели износа (2.1) были взяты следующими: $p_* = 7,9 \cdot 10^2 \text{ кГ/см}^2$, $\epsilon = 5,45$, $M = 5 \cdot 10^{-11}$. Их следует рассматривать как ориентировочные [2, 10, 11] (точных данных по низкотемпературному износу золотого покрытия найти не удалось). Число узлов сетки x_i бралось не меньшим 26-и, шаг по L принимался сначала $\Delta L = 1 \text{ м}$, и мог быть изменен по желанию в процессе вычислений. После каждого шага на экран монитора выводилась эпюра контактного давления, построенная в общих осях с начальной и с эпюрой предыдущего шага, и таблица основных параметров процесса, по которым и контролировалось качество расчета. При постоянном ΔL наблюдался быстрый износ на первых шагах, пятно контакта монотонно увеличивалось, максимум контактного давления соответственно уменьшался (качественная эволюция эпюры представлена на фиг. 4: 1 – исходная; 2, 3 – при износе), процесс постепенно замедлялся. Тенденция изменения эпюры – ее стремление к прямоугольнику – подтверждает выводы [3] и физическую интуицию.

В полной мере предельный переход к равномерному давлению наблюдать не удалось из-за явления Гиббса (кривая 4 на фиг. 4): в окрестности края площадки контакта появляются осцилляции (как при попытке аппроксимировать "ступеньку" слишком коротким отрезком тригонометрического ряда), монотонный рост параметра a сменяется увеличением – уменьшением от шага к шагу (при сохранении общей тенденции к росту a). Все говорит об исчерпании возможностей используемой аппроксимации решения, заставляет приостановить расчет и задуматься о специальном исследовании асимптотики "развитого" износа.

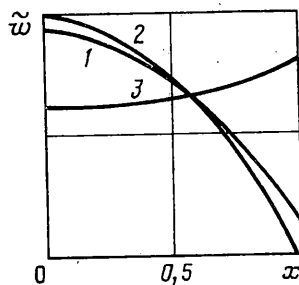
Отметим, что такая картина (для указанных выше значений параметров) наблюдалась при максимальном износе (в точке $x = 0$) около 1% от начальной толщины покрытия. Размер площадки контакта увеличился при этом примерно в полтора раза по сравнению с начальным. Можно сказать, что "приработка" пары трения осуществляется весьма быстро и влияет на ресурс (понимаемый как время до полного истирания покрытия хотя бы в одной точке) прежде всего через значение a в конце этапа приработки и однозначно определяемый по нему уровень давления в контакте.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Отмеченное свойство делает оправданными расчеты начальной стадии износа по упрощенной схеме, когда от шага к шагу считается переменной правая часть уравнения (1.1), а жесткость покрытия k предполагается не зависящей от x . Прямой расчет по такой схеме дает количественно близкие результаты при незначительном выигрыше во времени.

Для так называемого "абразивного износа" ($\epsilon = 0$) приработка наступает несколько позже – при a порядка 3–6 начальных и максимальном износе порядка 5%.

Заметим наконец, что в рамках описанной схемы можно моделировать процессы, эволюция которых во времени прямо обратна последовательности кривых 1, 2, 3 на фиг. 4. Например, если считать, что в контакте выделяется тепло, тем большее, чем больше давление, пара трения плохо теплопроводна, а материал покрытия заметно расширяется от нагревания, то увидим эволюцию эпюры типа 3, 2, 1 – пятно контакта сужается, а максимум давления растет. Это подтверждается непосредственным расчетом. Одновременный учет износа и тепловыделения от трения способен вызвать непредсказуемое поведение контактных характеристик.

4. Для исследования стадии "развитого износа" положим $q(x) = \text{const}_x \forall x \in (-1, 1)$. Это означает, что $\tilde{q} = 0 \forall x \in (-1, 1)$. В уравнении (1.9) заменим $f(x)$ на $f(x) + w(x)$ (где $w(x) = w(x)/a$) и подставим в него $\tilde{q} \equiv 0$. Левая часть обратится в нуль, правую, воспользовавшись формулами $k = h_c/E_c$, $h_c = h_0 - w$ (h_0 – начальная толщина покрытия), можно преобразовать к виду

$$\tilde{w} = \frac{1}{P/(2E_c a) - 1} \left(\tilde{f} + \frac{P}{\pi a E} \Phi \right) \quad (4.1)$$

представляющему собой формулу, выражающую $\tilde{w}$ (уклонение безразмерного профиля износа от его среднего по площадке контакта значения) через $\tilde{f}$ (аналогичное уклонение безразмерной формы штампа) и другие параметры задачи. Через $\Phi(x)$ в

(4.1) обозначена функция вида:

$$\Phi(x) \equiv \int_{-1}^1 \left(-\ln |\xi - x| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (-\ln |y - x|) dy \right) d\xi =$$

$$= 2 \ln 2 - 1 - (1 - x) \ln(1 - x) - (1 + x) \ln(1 + x) \quad (4.2)$$

$$|x| \equiv |x/a| < 1$$

Графики функций $\tilde{w}$, первого (пропорционального $\tilde{f}(x)$) и второго (пропорционального $\Phi(x)$) слагаемых правой части (4.1) для данных рассматриваемого выше примера приведены на фиг. 5 (кривые 1, 2, 3 соответственно). Выбор значения a , начиная с которого контактное давление считается равномерным, субъективен. Кривые фиг. 5 построены при $a = 9,64 \cdot 10^{-4}$ см. Из (4.1) нетрудно усмотреть, что кривая 1 будет стремиться к 2 или 3 при увеличении или уменьшении a соответственно.

Дифференцирование равенства (4.2) дает

$$\partial_x \Phi = \ln \frac{1-x}{1+x} \quad (|x| < 1) \quad (4.3)$$

откуда ясно, что $\partial_x \Phi \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 1_{-0}$ (т.е. кривая 3 фиг. 5 имеет вертикальную касательную при $x = 1$). Поскольку $\partial_x \tilde{f}(x) < \infty$ при $x = 1$, $\partial_x \tilde{w} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1_{-0}$. Вследствие непрерывности $\tilde{w}(x)$ существует два экстремума этой функции при $x \in [0, 1)$. Первый отвечает максимуму в нуле, второй – минимуму в точке $x_* \approx 0,999993$ (для рассматриваемого примера). Отличия значения $\tilde{w}(x_*)$ от $\tilde{w}(1)$ столь малы, что в масштабе фиг. 5 просто незаметны. Тем не менее, описанные только что свойства кривой $\tilde{w}(x)$ имеют физически значимые последствия: восстановленный по ней профиль изношенного покрытия $h(x)$ будет либо разрывен в точках $x = \pm a$ (фиг. 6, а), либо в изношенной зоне у краев площадки контакта будет существовать окрестность, в которой толщина покрытия больше исходной (фиг. 6, в). Такова цена упрощающего предположения $q = \text{const}_x$ при $|x| < a$.

Функция $\phi(x, a)$ статьи [3] обладает тем же поведением, что и $\Phi(x)$.

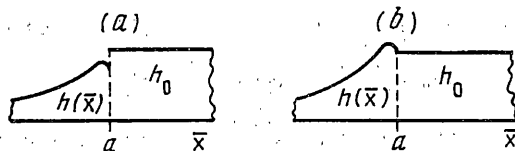
Формула (4.1) позволяет оценить наименьшее значение a , при котором можно считать оконченным процесс приработки пары трения "выпуклый штамп – покрытие", не решая задачи. Первый член суммы из правой части (4.1) при таком a должен превалировать над вторым: график $\tilde{w}$ должен в главном определяться формой штампа, а не функцией $\Phi(x)$, т.е. как на фиг. 5. Субъективность и приближенность такой оценки очевидны.

Если предположить, что тенденция стремления контактного давления к равномерному сохраняется до полного истирания покрытия, из формулы (4.1) можно получить еще одну приближенную, но на практике важную оценку. Для выпуклого штампа размер площадки контакта продолжает расти и в стадии "развитого износа", максимум функции $\tilde{w}$ достигается при $x = 0$, минимум – с высокой точностью при $x = 1$. Положив $\tilde{w}(0) - \tilde{w}(1) = h_0/a$, из (4.1) получим

$$\frac{h_0}{a} = \frac{1}{P/(2E_c a) - 1} \left(\tilde{f}(0) - \tilde{f}(1) + \frac{P}{\pi a E} (\Phi(0) - \Phi(1)) \right) \quad (4.4)$$

или, на основании (4.2) и определения функции $\tilde{f}(x)$

$$\frac{h_0}{a} = \frac{1}{P/(2E_c a) - 1} \left(-f(1) + \frac{P}{\pi a E} 2 \ln 2 \right) \quad (4.5)$$



Фиг. 6

Домножив на a , придем к равенству

$$h_0 = \frac{1}{P/(2E_c a) - 1} \left(\frac{P}{\pi E} 2 \ln 2 - f(a) \right) \quad (4.6)$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно a . Его корень – оценка ширины площадки контакта в момент протирания покрытия.

Теперь, разобравшись в закономерностях процесса износа покрытия, перейдем к основному вопросу о вычислении его долговечности.

5. Требуется оценить путь трения L , на котором покрытие изнашивается на всю толщину хотя бы в одной точке.

На первом этапе реализуется схема п. 2, 3, опирающаяся на пошаговое решение контактной задачи. Шаги ΔL при этом просто суммируются. Источниками вычислительной погрешности являются конечность шага по L , конечность размерности системы (1.12), конечность размерности сетки для сохранения профиля износа. Процесс повторяется до тех пор, пока погрешность эпюры не будет сочтена опасной для его продолжения. Тогда давление в контакте предполагается равномерным, его уровень вычисляется на основании достигнутого к этому моменту значения a , приращение износа – по (2.1), новое a – экстраполяцией профиля износа до уровня неизношенной поверхности покрытия. Последнее возможно только при условии монотонного возрастания a во времени.

В проведенной серии вычислений названное условие всегда выполнялось, поэтому пошаговый расчет удавалось довести до полного истирания покрытия. Сумма всех приращений ΔL принималась за расчетное значение ресурса.

Следует отметить, что вклад шагов, выполненных по приближенной схеме "развитого износа" в общее значение ресурса покрытия является определяющим, и это подтверждает важность разработки подобных инженерных методик расчета, описанных еще в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ИНТАС (грант РФФИ № 96-01-00133, грант INTAS-RFBR № 95-0492).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
2. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
3. Солдатенков И.А. Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 2. С. 206–213.
4. Гавриков М.В. Решение плоской контактной задачи для тел с тонкими и мягкими покрытиями с использованием наследственностареющей модели изнашивания // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 5. С. 818–823.
5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
6. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
7. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175 с.

8. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. Малые деформации. М.: Наука, 1984. 596 с.
9. Ужик Г.В. Прочность и пластичность металлов при низких температурах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 192 с.
10. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
11. Tangena A.G., Wijnhoven P.J.M., Muijderman E.A. The role of plastic deformation in wear of thin films // Trans. ASME. J. Tribol. 1988. V. 110. № 4. P. 602–608. = Совр. машиностроение. сер. Б. 1989. № 5. С. 173–182

Москва

Поступила в редакцию
8.02.1999