МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. Ю.Н. НЕМИШ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ СЛОИСТЫХ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

В [1, 2] рассмотрены физически нелинейные краевые задачи для ортогональных неканонических областей, ограниченных поверхностями вращения, близкими к сферическим. Линейно упругое равновесие деформируемых тел с некруговыми цилиндрическими поверхностями постоянного поперечного сечения исследовано в [3]. Метод решения линейных трехмерных краевых задач для кусочно-однородных тел с произвольными поверхностями раздела, близкими к круговым цилиндрическим, развит в [4, 5].

В настоящей работе изложен приближенный аналитический метод решения трехмерных физически нелинейных краевых задач статики слоистых некруговых цилиндров (в частности, призматических, продольно и поперечно гофрированных цилиндров), поверхности раздела которых описываются параметрически нелинейными уравнениями. Предполагается, что интенсивность внешней нагрузки или перепад температур таковы, что связь между напряжениями и малыми деформациями описываются нелинейными соотношениями [6]. Этого типа задачи теории упругости по классификации [7] относятся к физически нелинейным, но геометрически линейным. Развитый метод позволяет свести исходную нелинейную задачу для слоистых некруговых цилиндров к последовательности соответствующих линейных неоднородных задач для слоистых круговых цилиндров.

1. Рассмотрим слоистый некруговой цилиндр высотой $2h$, внутренняя S_0, внешняя S_N и поверхности раздела S_l (l = 1, 2, ..., N–1) которого в цилиндрических координатах r, θ, z описываются уравнениями

$$r = r_s + \varepsilon_s f_s(\theta, z, \varepsilon_s) \quad (r_s = \text{const}, \ \ s = 0, 1, 2, \ldots, N) \tag{1.1}$$

где $f_s(\theta, z, \varepsilon_s)$ – известные дифференцируемые функции, ε_s – малые параметры ($|\varepsilon_s| \ll 1$, s = 0, 1, ..., N), характеризующие отклонение поверхностей S_s от круговых цилиндров $r = r_s$.

Пусть требуется иссследовать упругое равновесие (напряженно-деформированное состояние) слоистого цилиндра при заданных на его боковых поверхностях, например, на S_0 перемещениях $\hat{u}_{j,0}$, а на S_N – усилиях $\hat{\sigma}_{j,N}$. Тогда краевые условия на S_0, S_N соответственно будут

$$u_{j,1}\Big|_{S_0} = \hat{u}_{j,0}, \quad \sum_{i=r,\theta,z} \sigma_{ij,N} n_{i,N}\Bigg|_{S_N} = \hat{\sigma}_{j,N} \tag{1.2}$$

В предположении, что на поверхности раздела S_l осуществляется идеальный контакт (полное механическое сцепление), условия сопряжения l- и l + 1-го слоев имеют вид

$$[u_{j,l} - u_{j,l+1}]_{S_l} = 0; \quad \sum_{i=r,\theta,z} [(\sigma_{ij,l} - \sigma_{ij,l+1}) n_{i,l}]_{S_l} = 0 \quad (j = r, \theta, z) \tag{1.3}$$

Если одна из поверхностей раздела, например, $S_\tau (1 \leqslant \tau \leqslant N-1)$ является круговой цилиндрической ($r = r_\tau$), то на ней кроме (1.3) могут быть заданы условия неидеального контакта (в случае, когда возможно проскальзывание без отслоения)

$$
\begin{aligned}
&[u_{r,\tau} - u_{r,\tau+1}]_{r=r_\tau} = 0, \quad [\sigma_{rr,\tau} - \sigma_{rr,\tau+1}]_{r=r_\tau} = 0 \\
&\sigma_{r\theta,\tau}|_{r=r_\tau} = \sigma_{rz,\tau}|_{r=r_\tau} = 0, \quad \sigma_{r\theta,\tau+1}|_{r=r_\tau} = \sigma_{rz,\tau+1}|_{r=r_\tau} = 0 \qquad (1.4)\\
&(n_{r,\tau} = 1, \quad n_{\theta,\tau} = n_{z,\tau} = 0, \quad 1 \leqslant \tau \leqslant N-1)
\end{aligned}
$$

В (1.2), (1.3) $n_{i,s}$ – направляющие косинусы ортов $\mathbf{e}_{n,s}$ нормалей $\mathbf{n}_s$ к поверхностям S_s, которые на основе функции уровня $\Phi(r, \theta, z)$ определяются по формуле

$$
\mathbf{e}_{n,s} = \frac{\nabla\ \Phi(r,\theta,z)}{|\nabla\ \Phi(r,\theta,z)|}, \quad \Phi(r,\theta,z) = r - \varepsilon_s f_s(\theta, z, \varepsilon_s) \quad (s = 0, 1, \dots, N) \qquad (1.5)
$$

где ∇ – векторный оператор Гамильтониана.

Следовательно, для $n_{i,s}$ имеют место выражения

$$
n_{r,s} = \frac{1}{\Delta_s}\bigg|_{S_s}, \quad n_{\theta,s} = -\frac{\varepsilon_s}{\Delta_s}\frac{\partial f_s}{r\partial\theta}\bigg|_{S_s}, \quad n_{z,s} = -\frac{\varepsilon_s}{\Delta_s}\frac{\partial f_s}{\partial z}\bigg|_{S_s} \qquad (1.6)
$$

$$
\Delta_s = \pm\left\{1 + \varepsilon_s^2\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f_s}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_s}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \qquad (1.7)
$$

Знак плюс соответствует случаю, когда нормаль $\mathbf{n}_s$ направлена в сторону увеличения функции уровня, а минус – противоположному направлению.

При рассмотрении цилиндров конечных размеров уравнения (1.2)–(1.4) следует дополнить соответствующими краевыми условиями на торцах $z = \pm h$.

Известно, что для многих конструкционных материалов (высокопрочных сталей, сплавов цветных металлов, полимерных материалов и др.) с увеличением нагрузки и температуры диаграмма зависимости напряжений от деформаций отклоняется от линейной [6, 8], соответствующей закону Гука. Следовательно, в случаях, когда удлинения, сдвиги и углы поворота малы по сравнению с единицей, а деформации превосходят предел пропорциональности, необходимо зависимости между напряжениями и деформациями принимать в нелинейной форме. Допустим, что интенсивность заданных на внешней поверхности S_N усилий $\hat{\sigma}_{j,N}$ такова, что даже при малых деформациях $e_{ij,l}$ связь между ними и напряжениями $\sigma_{ij,l}$ с определенной точностью (при активном нагружении) можно описать нелинейными соотношениями [6], которые представим в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ii,l} = 2G_l\left\{e_{ii,l} + \delta\eta_{ii,l} + \frac{1}{1-2\nu_l}[\nu_l e_l - (1+\nu_e)\alpha_l T_l]\right\}\\
&\sigma_{ij,l} = G_l(e_{ij,l} + \delta\eta_{ij,l}) \quad (i \neq j, \ i, j = r, \theta, z) \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

где $e_l = 3e_{0,l}$ – объемное расширение, G_l – модуль сдвига l-го слоя, ν_l – коэффициент Пуассона, α_l – коэффициент линейного теплового расширения, $T_l(r, \theta, z)$ – температура l-го слоя (ее будем считать известной из решения соответствующей краевой задачи теории теплопроводности), δ – безразмерный параметр ($0 \leqslant \delta \leqslant 1$) причем $\delta = 0$ уравнения состояния (1.8) отвечают линейному закону Гука, а при $\delta = 1$ – нелинейным соотношениям [6]. При этом функции возмущений $\eta_{ij,l}$ допускают представление

$$
\eta_{ij,l} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\gamma_{2n,l}\psi_{0,l}^{2n}e_{ij,l} + \delta_{ij}\left(\frac{1+\nu_l}{1-2\nu_l}\varkappa_{n,l}e_{0,l}^{n+1} - \gamma_{2n,l}\psi_{0,l}^{2n}e_{0,l}\right)\right] \qquad (1.9)
$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера; $\varkappa_{n,l}$, $\gamma_{2n,l}$ – постоянные коэффициенты разложений функции удлинения $\varkappa(e_{0,l})$ и сдвиги $\gamma(\psi_{0,l}^2)$ в степенные ряды, которые определяются с помощью соответствующих опытов для конкретных материалов [6, 8]. При этом интенсивность деформаций $\psi_{0,l}$ определяется по формуле

$$\psi_{0,l}^2 = \tfrac{4}{3}[\tfrac{2}{3}(e_{rr,l}^2 + e_{\theta\theta,l}^2 - e_{zz,l}^2 - e_{rr,l}e_{\theta\theta,l} - e_{rr,l}e_{zz,l} - $$

$$- e_{\theta\theta,l}e_{zz,l}) + \tfrac{1}{2}(e_{r\theta,l}^2 + e_{rz,l}^2 + e_{\theta z,l}^2)] \quad (l = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.10}$$

На основе (1.8) нелинейные уравнения равновесия в перемещениях могут быть записаны в виде

$$\frac{1-\nu_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial e_l}{\partial r} - \left(\frac{\partial \omega_{z,l}}{r\partial\theta} - \frac{\partial\omega_{\theta,l}}{\partial z}\right) = -\delta F_{r,l} - \frac{K_r}{2G_l} - \frac{(1+\nu_l)\alpha_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial T_l}{\partial r} \tag{1.11}$$

$$\frac{1-\nu_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial e_l}{r\partial\theta} - \left(\frac{\partial \omega_{r,l}}{\partial z} - \frac{\partial\omega_{z,l}}{\partial z}\right) = -\delta F_{\theta,l} - \frac{K_\theta}{2G_l} - \frac{(1+\nu_l)\alpha_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial T_l}{r\partial \theta}$$

$$\frac{1-\nu_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial e_l}{\partial z} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\omega_{\theta,l})}{\partial r} - \frac{\partial\omega_{z,l}}{\partial \theta}\right) = -\delta F_{z,l} - \frac{K_z}{2G_l} - \frac{(1+\nu_l)\alpha_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial T_l}{\partial z}$$

Здесь $\omega_{j,l}$ – компоненты вектора вращения $\boldsymbol{\omega}_l$, K_j – составляющие вектора объемных сил $\mathbf{K}$, $F_{j,l}$ – нелинейные относительно деформаций $e_{ij,l}$ функции, которые можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\mathbf{F}_l$, определяемые функциями $\eta_{ij,l}$ по формулам

$$F_{r,l} = \frac{\partial\eta_{rr,l}}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta_{r\theta,l}}{r\partial\theta} + \frac{\partial\eta_{rz,l}}{\partial z}\right) + \frac{\eta_{rr,l} - \eta_{\theta\theta,l}}{r}$$

$$F_{\theta,l} = \frac{\partial\eta_{\theta\theta,l}}{r\partial\theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta_{r\theta,l}}{\partial r} + \frac{\partial\eta_{\theta z,l}}{\partial z}\right) + \frac{\eta_{r\theta,l}}{r} \tag{1.12}$$

$$F_{z,l} = \frac{\partial\eta_{zz,l}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta_{rz,l}}{\partial r} + \frac{\partial\eta_{\theta z,l}}{r\partial\theta}\right) + \frac{\eta_{rz,l}}{2r}$$

Непосредственное аналитическое решение поставленной трехмерной физически нелинейной краевой задачи об упругом равновесии (напряженно-деформированном состоянии) некругового слоистого цилиндра не представляется возможным по двум причинам: сложность геометрии поверхностей S_l, описываемых параметрически нелинейными уравнениями (1.1), что препятствует разделению переменных в условиях (1.2), (1.3); нелинейность уравнений равновесия (1.11), (1.12), что затрудняет нахождение их общего решения.

2. Следуя общему подходу, развитому в (4) применительно к случаю, когда в отличие от (1.1) уравнения поверхностей раздела описываются линейными относительно ε_s уравнениями, решение поставленной выше краевой задачи предлагается искать в виде двойных степенных рядов

$$u_{j,l} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^k\varepsilon^n u_{j,l}^{(k,n)}, \quad \sigma_{ij,l} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^k\varepsilon^n\sigma_{ij,l}^{(k,n)}, \ \ldots$$

$$\psi_{0,l}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^k\varepsilon^n\psi_{0,l}^{(k,n)}, \quad F_{j,l} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^k\varepsilon^n F_{j,l}^{(k,n)} \tag{2.1}$$

где общий для всех поверхностей S_s малый параметр ε выбран из условия

$$|\varepsilon| = \max_{s=0,1,\ldots,N}|\varepsilon_s| \ll 1, \quad \varepsilon_s = \varepsilon\omega_s \quad (-1 \leqslant \omega_s \leqslant 1) \tag{2.2}$$

Представление решения в виде (2.1) допускает следующую интерпретацию: первая группа слагаемых ($k \geqslant 0$, $n = 0$) характеризует решение физически нелинейной задачи для слоистых круговых ($r = r_s$, $s = 0, 1, \dots, N$), вторая группа слагаемых ($k = 0$, $n \geqslant 0$) соответствует решению линейной задачи для слоистых некруговых цилиндров, а третья группа слагаемых, содержащая произведения $\delta^k\varepsilon^n$ ($k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$), описывает взаимное влияние физической нелинейности и геометрии некруговых цилиндрических поверхностей на напряженно-деформированное состояние рассматриваемого нелинейного упругого слоистого некругового цилиндра.

Разложим известную функцию $f_s(\theta, z, \varepsilon_s)$ в степенной ряд

$$f_s(\theta, z, \varepsilon_s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \omega_s^n f_{s,n}(\theta, z) \quad (s = 0, 1, \dots, N) \tag{2.3}$$

В предположении, что в (2.1) искомые компоненты произвольного приближения $u_{j,l}^{(k,n)}$, $\sigma_{ij,l}^{(k,n)}$ ($l = 1, 2, \dots, N$) допускают разложение в ряды Тейлора в окрестности $r = r_s$, применяя правило умножения рядов в смысле Коши, получим

$$u_{j,l}\,|_{S_s} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta^k \varepsilon^n \sum_{\tau=0}^{n}\sum_{m=0}^{\tau} \frac{\omega_s^m}{m!} \gamma_{sm,\tau-m} \left[\frac{\partial^m}{\partial r^m} u_{j,l}^{(k,n-\tau)}\right]_{r=r_s}$$

$$u_{ij,l}\,|_{S_s} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta^k \varepsilon^n \sum_{\tau=0}^{n}\sum_{m=0}^{\tau} \frac{\omega_s^m}{m!} \gamma_{sm,\tau-n} \left[\frac{\partial^m}{\partial r^m} u_{ij,l}^{(k,n-\tau)}\right]_{r=r_s} \tag{2.4}$$

где $\gamma_{sm,\tau}$ определяются через функциональные коэффициенты $f_{s,n}(\theta, z)$ из рекуррентный соотношений

$$\gamma_{sm,0} = f_{s,0}^m \quad (f_{s,0} \neq 0)$$

$$\gamma_{sm,\tau} = \frac{1}{\tau f_{s,0}} \sum_{n=1}^{\tau} (mn - \tau + n) f_{s,n} \gamma_{sm,\tau-n} \quad (m, \tau \geqslant 1) \tag{2.5}$$

Разложения (2.4) позволяют записать граничные условия (1.2) на S_0 и условия сопряжения (1.3) на S_l (в перемещениях) в произвольном приближении. Для представления в произвольном приближении граничных условий (1.2) на S_N и условий сопряжения (1.3) (в напряжениях) необходимо разложить направляющие косинусы в ряды по степеням ε.

С этой целью на основе (1.6), (1.7), (2.3) находим

$$n_{r,s} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j n_{r,s}^{(j)} = \pm\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{m=1}^{[k/2]}\sum_{n=0}^{k-2} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \omega_s^{2m} V_{sm,n}\right\} \tag{2.6}$$

$$n_{\theta,s} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k n_{\theta,s}^{(k)} = -\omega_s \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{m} n_{r,s}^{(j)} r_{s,k-m-1} \frac{\partial f_{s,m-j}}{\partial \theta}$$

$$n_{z,s} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k n_{z,s}^{(k)} = -\omega_s \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{k-1} n_{r,s}^{(j)} \frac{\partial f_{s,k-j-1}}{\partial z}$$

$$V_{sm,0} = F_{s,0}^m (F_{s,0} \neq 0), \quad V_{sm,n} = \frac{1}{nF_{s,0}} \sum_{l=1}^{n} (ml - n + 1) E_{s,l} V_{sm,n-1}$$

$$E_{s,l} = \sum_{j=0}^{l} \left(R_{s,j}\Theta_{s,l-j} + \frac{\partial f_{s,j}}{\partial z}\frac{\partial f_{s,l-j}}{\partial z}\right), \quad \Theta_{s,k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\partial f_{s,j}}{\partial \Theta}\frac{\partial f_{s,k-j}}{\partial \theta} \tag{2.7}$$

$$r_{s,k}=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m r_s^{-m-1}\omega_s^m\gamma_{sm,k-m},\quad R_{s,k}=\sum_{j=0}^{k}r_{s,j}r_{s,k-j}$$

Здесь $\gamma_{sm,\tau}$ определяется по рекуррентной формуле (2.5).

С учетом разложений (2.4), (2.6) на основе (1.2) получаем краевые условия в произвольном приближении

$$\sum_{m=0}^{m}L_0^{(n-m)}u_{j,1}^{(k,m)}\bigg|_{r=r_0}=\hat{u}_{j,0}^{(n)}\quad(j=r,\theta,z)\tag{2.8}$$

$$\sum_{i=r,\theta,z}\ \sum_{m=0}^{n}D_{i,N}^{(n-m)}\sigma_{ij,N}^{(k,m)}\bigg|_{r=r_N}=\hat{\sigma}_{j,N}^{(n)}=F(\theta,z)n_{j,N}^{(n)}$$

где $\hat{u}_{j,0}^{(n)}$, $\hat{\sigma}_{j,N}^{(n)}$ – функциональные коэффициенты разложений, заданных на S_0, S_N перемещений и усилий в ряды по ε, $F(\theta, z)$ – известная функция, определяющая характер нагрузки.

Дифференциальные операторы $L_s^{(n)}$, $D_{i,s}^{(n)}$ имеют вид

$$L_s^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\omega_s^n}{m!}\gamma_{sm,n-m}\frac{\partial^m}{\partial r^m},\quad D_{i,s}^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}n_{i,s}^{(m)}L_s^{(n-m)}\tag{2.9}$$

Здесь $\gamma_{sm,\tau}$ определяется по рекуррентной формуле (2.5), а явный вид $n_{i,s}^{(m)}$ следует из (2.6).

Условия идеального механического контакта в произвольном приближении находятся на основе (1.3), (2.4), (2.6), т.е.

$$\sum_{m=0}^{n}L_l^{(n-m)}\left[u_{j,l}^{(k,m)}-u_{j,l+1}^{(k,m)}\right]_{r=r_l}=0\quad(j=r,\theta,z)\tag{2.10}$$

$$\sum_{i=r,\theta,z}\ \sum_{m=0}^{n}D_{i,l}^{(n-m)}\left[\sigma_{ij,l}^{(k,m)}-\sigma_{ij,l+1}^{(k,m)}\right]_{r=r_l}=0\quad(l=1,2,\ldots,N-1)$$

Условия неидеального контакта типа (1.4) на круговой цилиндрической поверхности S_τ в произвольном приближении будут

$$\left[u_{r,\tau}^{(k,n)}-u_{r,\tau+1}^{(k,n)}\right]_{r=r_\tau}=0,\quad\left[\sigma_{rr,\tau}^{(k,n)}-\sigma_{rr,\tau+1}^{(k,n)}\right]_{r=r_\tau}=0\tag{2.11}$$

$$\sigma_{r\theta,\tau}^{(k,n)}\Big|_{r=r_\tau}=\sigma_{rz,\tau}^{(k,n)}\Big|_{r=r_\tau}=0,\quad\sigma_{r\theta,\tau+1}^{(k,n)}\Big|_{r=r_\tau}=\sigma_{rz,\tau+1}^{(k,n)}\Big|_{r=r_\tau}=0$$

Если торцы слоистых некруговых цилиндров конечных размеров совпадают с координатными плоскостями $z=\pm h$, то краевые условия на них в произвольном приближении соответственно будут следующими:

торцы свободны от напряжений

$$\sigma_{jz,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=0\quad(j=r,\theta,z;\quad l=1,2,\ldots,N)\tag{2.12}$$

торцы жестко защемлены

$$u_{j,l}^{(k,n)}\Big|_{r=\pm h}=0\tag{2.13}$$

условия плоских торцов

$$u_{z,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=0,\quad\sigma_{rz,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=u_{\theta z,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=0\tag{2.14}$$

торцы свободны от нормальной нагрузки и не смещаются в своей плоскости

$$\sigma_{zz,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=0,\quad u_{r,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=u_{\theta,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h}=0 \tag{2.15}$$

на торцах действует самоуравновешенная по толщине цилиндра нагрузка

$$\int_{r_{l-1}}^{r_l}\sigma_{jz,l}^{(k,n)}\Big|_{z=\pm h} rdr=0\quad (j=r,\theta,z;\quad l=1,2,\ldots,N) \tag{2.16}$$

Замечание. В некоторых случаях вместо (2.12) удовлетворяют интегральным условиям (2.16) (главный вектор и главный момент заданной на торцах нагрузки равен нулю). Такая замена согласно принципу Сен-Венана может внести существенную погрешность при исследовании поля напряжений только в непосредственной близости к торцам $z=\pm h$. В [9] дано доказательство принципа Сен-Венана для тел произвольной формы и приведены оценки скорости затухания упругой энергии при удалении от площадки приложения самоуравновешенных сил. Влияние характера изменяемости самоуравновешенной по толщине цилиндра нагрузки, приложенной к торцам, на локализацию напряжений вблизи торцов численно исследовано в монографии [4].

3. Компоненты напряженно-деформированного состояния, фигурирующие в уравнениях (2.8)–(2.16), при $k\geqslant 0$ представляют

$$u_{j,l}^{(k,n)}=u_{j,l}^{0(k,n)}+u_{j,l}^{*(k,n)},\quad \sigma_{ij,l}^{(k,n)}=\sigma_{ij,l}^{0(k,n)}+\sigma_{ij,l}^{*(k,n)} \tag{3.1}$$

Здесь $u_{j,l}^{*(k,n)}$, $\sigma_{ij,l}^{*(k,n)}$ соответствуют частному решению неоднородной системы дифференциальных уравнений равновесия, которая получается на основе (1.11), (2.1) при $k\geqslant 1$,т.е.

$$\begin{gathered}
\frac{1-\nu_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial e_l^{(k,n)}}{\partial r}-\left[\frac{\partial\omega_{r,l}^{(k.n)}}{r\partial\theta}-\frac{\partial\omega_{\theta,l}^{(k.n)}}{\partial z}\right]=-F_{r,l}^{(k-1,n)}\\
\frac{1-\nu_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial e_l^{(k,n)}}{r\partial\theta}-\left[\frac{\partial\omega_{z,l}^{(k.n)}}{\partial z}-\frac{\partial\omega_{z,l}^{(k.n)}}{\partial r}\right]=-F_{\theta,l}^{(k-1,n)}\\
\frac{1-\nu_l}{1-2\nu_l}\frac{\partial e_l^{(k,n)}}{\partial z}-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\omega_{\theta,l}^{(k.n)})}{\partial r}-\frac{\partial\omega_{z,l}^{(k.n)}}{\partial\theta}\right]=-F_{z,l}^{(k-1,n)}\quad (k\geqslant 1)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Правые части $F_{j,l}^{(k-1,n)}$ определяются формулами (1.12), в которых функции $\eta_{ij,l}$ следует формально заменить на $\eta_{ij,l}^{(k-1,n)}$ $(k\geqslant 1)$. При $k=0$ компоненты $u_{j,l}^{*(0,n)}$, $\sigma_{ij,l}^{*(0,n)}$ находятся по известным составляющим объемных сил K_j и температуре T_l.

При отыскании частного решения системы неоднородных уравнений (3.2) исходным этапом является нахождение объемного расширения $e_l^{*(k,n)}$ из уравнения

$$\nabla^2 e_l^{*(k,n)}=-\frac{1-2\nu_l}{1-\nu_l}\operatorname{div}\mathbf{F}_l^{(k-1,n)}\quad (k\geqslant 1) \tag{3.3}$$

а затем компонентов вращения $\omega_{j,l}^{*(k,n)}$ – из неоднородной системы уравнений (3.2).

Если $e_l^{*(k,n)}$ и $\omega_{j,l}^{*(k,n)}$ найдены, то составляющие перемещений $u_{j,l}^{*(k,n)}$ определяются по формулам

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_l^{*(k,n)}=e_l^{*(k.n)},\quad \operatorname{rot}\mathbf{u}_l^{*(k,n)}=2\boldsymbol{\omega}_l^{*(k,n)} \tag{3.4}$$

а деформации $e_{ij,l}^{*(k,n)}$ – по известным соотношениям [7]. На этой основе с использованием (1.8), (2.1) находим напряжения

$$\sigma_{ii,l}^{*(k.n)} = 2G_l\left[e_{ii,l}^{*(k.n)} + \frac{\nu_l}{1-2\nu_l}\ e_l^{*(k.n)} + \eta_{ii,l}^{(k-1,n)}\right] \qquad (k \geqslant 1) \tag{3.5}$$

$$\sigma_{ij,l}^{*(k.n)} = G_l\left[e_{ij,l}^{*(k.n)} + \eta_{ij,l}^{(k-1,n)}\right] \quad (i \neq j), \quad i,j = r,\theta,z)$$

Для определения функций возмущений $\eta_{ij,l}^{(k.n)}$ необходимо конкретизировать выражение (1.9). В связи с этим рассмотрим частный случай, для которого проведено большинство экспериментальных исследований [6, 8], а именно

$$\gamma_{2,l} = -g_{2,l}, \quad \gamma_{2n,l} = 0 \quad (n>1), \quad \varkappa_{n,l} = 0 \quad (n \geqslant 1) \tag{3.6}$$

причем $g_{2,l}$ – безразмерная постоянная нелинейно упругого однородного изотропного материала l-го слоя, которая, например, для меди, алюминиевой бронзы и мартеновской стали находится в интервале (10^4–10^7).

В этом случае для функций $\eta_{ij,l}^{(k,n)}$ на основе (1.9), (2.1), (3.6) получаем представление

$$\eta_{ij,l}^{(k.n)} = -g_{2,l}\sum_{s=0}^{k}\sum_{m=0}^{n}\psi_{0,l}^{(s.m)}\left[e_{ij,l}^{(k-s,n-m)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_l^{(k-s,n-m)}\right] \tag{3.7}$$

Здесь $\psi_{0.l}^{(k,n)}$ определяется из (1.10) с использованием разложений (2.1) и правила умножения рядов в смысле Коши, т.е.

$$\psi_{0,l}^{(k.n)} = \frac{4}{3}\sum_{s=0}^{k}\sum_{m=0}^{n}\left\{\frac{2}{3}\left[e_{rr,l}^{*(s.m)}\ e_{rr,l}^{*(k-s.n-m)} + e_{\theta\theta,l}^{*(s,m)}\ e_{\theta\theta,l}^{*(k-s,n-m)} + e_{zz,l}^{*(s.m)}\ e_{zz,l}^{*(k-s.n-m)} -\right.\right.$$

$$\left.-e_{rr,l}^{*(s.m)}\ e_{\theta\theta,l}^{*(k-s,n-m)} - e_{rr,l}^{*(s,m)}\ e_{zz,l}^{*(k-s,n-m)} - e_{\theta\theta,l}^{*(s.m)}\ e_{zz,l}^{*(k-s,n-m)}\right] + \frac{1}{2}\left[e_{r\theta,l}^{*(s.m)}\ e_{r\theta,l}^{*(k-s,n-m)} +\right.$$

$$\left.\left.+e_{rz,l}^{*(s,m)}e_{rz,l}^{*(k-s,n-m)} + e_{\theta z,l}^{*(s,m)}e_{\theta z,l}^{*(k-s,n-m)}\right]\right\} \tag{3.8}$$

Этим исчерпываются основные этапы построения частного решения системы неоднородных дифференциальных уравнений равновесия (3.2).

4. Так как однородная система уравнений равновесия (3.2) (т.е. $F_{j,l}^{(k-1,n)} = 0$, $k \geqslant 1$, $n \geqslant 0$) в произвольном приближении не отличается от однородной системы уравнений равновесия линейной (классической) теории упругости, то для записи общего решения в произвольном приближении можно использовать известные представления, например, в форме П.Ф. Папковича – Г. Нейбера [7] через четыре гармонические функции, К. Юнгдала [10] через три гармонические функции, Б.Г. Галеркина [12] через бигармонические функции и др. Так, согласно [10] перемещения $u_{j,l}^{0(k,n)}$ могут быть представлены через гармонические функции $\Psi_{i,l}^{(k,n)}$ ($i = 1, 2, 3$) в виде

$$u_{r,l}^{0(k,n)} = \frac{\partial\Omega_{0,l}^{(k,n)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_{3,l}^{(k,n)}}{\partial\theta}$$

$$u_{\theta,l}^{0(k,n)} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_{0,l}^{(k,n)}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi_{3,l}^{(k,n)}}{\partial r} \tag{4.1}$$

$$u_{z,l}^{0(k,n)} = \frac{\partial}{\partial z}[\Omega_{0,l}^{(k,n)} + \Psi_{2,l}^{(k,n)}] \quad (\nabla^2\Psi_{i,l}^{(k,n)} = 0)$$

причем функция $\Omega_{0,l}^{(k,n)}$ выражается через $\Psi_{i,l}^{(k,n)}$ ($i = 1; 2$) в двух равноправных формах

$$\Omega_{0,l}^{(k,n)} = \Psi_{1,l}^{(k,n)} + \frac{r}{4(1-\nu_l)} \frac{\partial \Psi_{2,l}^{(k,n)}}{\partial r}$$

$$\Omega_{0,l}^{(k,n)} = \Psi_{1,l}^{(k,n)} - \frac{z}{4(1-\nu_l)} \frac{\partial \Psi_{2,l}^{(k,n)}}{\partial z} \qquad (4.2)$$

Напряжения $\sigma_{ij,l}^{0(k,n)}$ выражаются через гармонические функции $\Psi_{i,l}^{(k,n)}$ ($i = 1, 2, 3$) на основе (4.1) и линейных соотношений обобщенного закона Гука.

Выбор аналитической структуры гармонических функций $\Psi_{i,l}^{(k,n)}$ при решении конкретных задач определяется законом изменения заданных на граничных цилиндрических поверхностях S_0, S_N перемещений $\hat{u}_{j,0}^{(n)}$ и усилий $\hat{\sigma}_{j,N}^{(n)}$. В частности, если заданные на S_N усилия изменяются по тригонометрическому закону $\sin \lambda_n z$ или $\cos \lambda_n z$ ($\lambda_n = n\pi/h$), то для возможности удовлетворения краевым условиям аналогичные множители должны присутствовать в гармонических функциях $\Psi_{i,l}^{(k,n)}$ и, следовательно, в их аналитической структуре будут фигурировать модифицированные функции Бесселя $I_m(\lambda_n r)$, $K_m(\lambda_n r)$ ($m \in [0, \infty]$, $n \in [1, \infty]$).

Если же заданные на S_N усилия изменяются по полиномиальному закону относительно осевой переменной z, то для решения изложенным в п. 2 приближенным методом пространственной физически нелинейной краевой задачи об упругом равновесии слоистого некругового цилиндра необходимо использовать трехмерные гармонические функции полиномиального типа относительно z. Такого рода гармоническая функция $\Phi_n(r, \theta, z)$ произвольной степени n относительно z имеет вид [11]:

$$\Phi_n(r,\theta,z) = \varphi_{n,0}(r,z) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{n,m}(r,z)_{\sin m\theta}^{\cos m\theta} \quad (n \geqslant 0) \qquad (4.3)$$

причем осесимметричная гармоническая функция $\varphi_{n,0}(r, z)$ произвольной степени n относительно z будет

$$\varphi_{n,0}(r,z) = (A_{n,0} + B_{n,0} \ln r) \sum_{k=0,2,\ldots}^{s} (-1)^{k/2} \frac{n!}{(n-k)!(k!!)^2} r^k z^{n-k} +$$

$$+ B_{n,0} \sum_{k=2,4,\ldots}^{s} \sum_{\tau=2,4,\ldots}^{k} (-1)^{\frac{k}{2}+1} \frac{2n!}{\tau(n-k)!(k!!)^2} r^k z^{n-k} \quad (0! = 0!! \equiv 1) \qquad (4.4)$$

Функция $\varphi_{n,m}(r, z)$ ($m \geqslant 1$) входящая в состав трехмерной гармонической функции (4.3), имеет аналогичную структуру

$$\varphi_{n,m}(r,z) = A_{n,m} \sum_{k=0,2,\ldots}^{s} (-1)^{k/2} \frac{n!(2m)!!}{(n-k)!k!!(2m+k)!!} r^{m+k} z^{n-k} +$$

$$+ B_{n,m} \sum_{k=0,2,\ldots}^{s} \frac{n!(2m-k-2)!!}{(n-k)!k!!(2m-2)!!} r^{-m+k} z^{n-k} \quad (m \geqslant 1) \qquad (4.5)$$

причем в (4.4), (4.5) $s = n$ для n четных и $s = n-1$ для нечетных n; $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ – произвольные постоянные.

На основании (4.3)–(4.5) легко записать явные полиномиальные выражения для гармонических функций $\Psi_{i,l}^{(k,n)}$ ($i = 1, 2, 3$), входящих в представления (4.1), в зависимости от показателя степени переменной z, заданных на S_N усилий $\hat{\sigma}_{j,N}^{(n)}$.

5. Рассмотренные в общем виде трехмерные краевые задачи значительно упрощаются в ряде практически важных частных случаев. Если, например, $f_s = f_s(z, \varepsilon_s)$ и заданные на S_0, S_N перемещения $\hat{u}_{j,1} = \hat{u}_{j,1}(z)$ и усилия $\hat{\sigma}_{j,N} = \hat{\sigma}_{j,N}(z)$ (так как не зависят от θ), то задача является осесимметричной, а S_s представляют поверхности вращения (типа поперечно гофрированных цилиндрических поверхностей). В этом случае согласно (2.6), (2.9) дифференциальные операторы $D_{\theta,s}^{(n)} \equiv 0$ $(n_{\theta,s} \equiv 0)$ и для решения двумерных краевых задач при заданных осесимметричных нагрузках, полиномиального типа необходимо положить $\Psi_{3,l}^{(k,n)} = 0$, $\Psi_{1,l}^{(k,n)}$ и $\Psi_{2,l}^{(k,n)}$ следует выбирать из класса осесимметричных гармонических функций (4.4).

Если, в частности, $f_s = f_s(\theta, \varepsilon_s)$, то задача также несколько упрощается ввиду того, что согласно (2.6), (2.9) дифференциальные операторы $D_{z,s}^{(n)} \equiv 0$ $(n_{z,s} \equiv 0)$, однако задача (независимо от типа нагрузки) остается трехмерной за исключением случая, когда цилиндр является бесконечным, а заданные на S_0 перемещения $\hat{u}_{j,1} = \hat{u}_{j,1}(\theta)$ и на S_N усилия $\hat{\sigma}_{j,N} = \hat{\sigma}_{j,N}(\theta)$, т.е. для полного исследования упругого равновесия бесконечного слоистого цилиндра достаточно рассмотреть его произвольное поперечное сечение. Этот наиболее простой частный случай соответствует плоской задаче (плоской деформации).

Укажем также на класс призматических цилиндров, поверхности S_s которых описываются параметрически нелинейными уравнениями

$$r = r_s + \varepsilon r_s^{-k} \cos(k+1)\theta - \varepsilon^2 \frac{2K+1}{2} r_s^{-(2k+1)} \sin^2(k+1)\theta -$$

$$-\varepsilon^3 \frac{k(3k+2)}{2} r_s^{-(3k+2)} \cos(k+1)\theta \sin^2(k+1)\theta + O(\varepsilon^4) \tag{5.1}$$

которые описывают $(k+1)$-гранные цилиндры с округленными углами, причем каждому значению k отвечает свой интервал изменения малого параметра ε, в частности, $k = 2$, $|\varepsilon| = 1/4–1/3$; $k = 3$, $|\varepsilon| = 1/9–1/6$; $k = 4$, $|\varepsilon| = 1/10–1/9$; $k = 5$, $|\varepsilon| = 1/15–1/14$.

Значению $k = 1$ отвечают эллиптические цилиндры с полуосями a, b и малым параметрам $\varepsilon = (a-b)/(a+b)$.

Таким образом, изложенный приближенный аналитический метод позволяет свести исходную трехмерную физически нелинейную задачу для слоистого некругового цилиндра к рекуррентной последовательности соответствующих линейных неоднородных задач для слоистых круговых цилиндров. Следовательно, для их решения в произвольном приближении можно использовать разработанные до настоящего времени эффективные аналитические методы решения пространственных линейных задач классической теории упругости для канонических областей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Статика упругих тел неканонической формы. Киев: Наук. думка, 1984. 279 с. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 2).
2. *Немиш Ю.Н.* О напряженном состоянии нелинейно-упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 81–89.
3. *Немиш Ю.Н.* Упругое равновесие трехмерных деформируемых тел, ограниченных некруговыми цилиндрическими поверхностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 2. С. 77–86.
4. *Немиш Ю.Н.* Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. Киев: Наук. думка, 1989. 312 с.

5. *Немиш Ю.Н.* К решению пространственных краевых задач для слоистых некруговых цилиндров // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 9. С. 69–76.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
7. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
8. *Цурпал И.А.* Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. Киев: Техніка, 1976. 174 с.
9. *Бердичевский В.Л.* К доказательству принципа Сен-Венана для тел произвольной формы // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 851–864.
10. *Youngdahl C.K.* On the completeness of a set of stress functions appropriate to the solution of elasticity problems in general cylindrical coordinates // Intern. J. Eng. Sci. 1969. V. 7. № 1. P. 61–79.
11. *Немиш Ю.Н.* Об одном обобщении трехмерных гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 5. С. 967–968.
12. *Галеркин Б.Г.* Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 391 с.

Киев

Поступила в редакцию
17.02.1998