

УДК 539.3

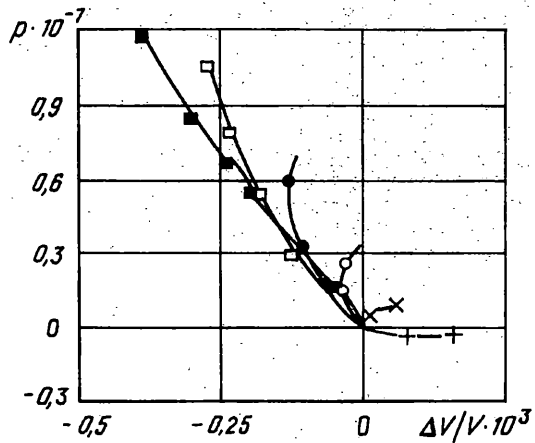
© 2000 г. В.А. ГАСИЛОВ, М.В. ГОЛОВИН, В.П. МЯСНИКОВ, А.Х. ПЕРГАМЕНТ

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ К АНАЛИЗУ ПОВЕДЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ПОД ДЕЙСТВИЕМ БОЛЬШИХ НАПРЯЖЕНИЙ

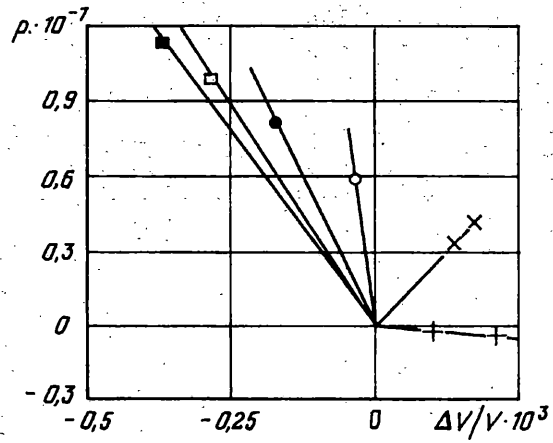
Исследования упругих свойств многих материалов указывают на существенное отличие в их поведении от линейного закона Гука. Основное отличие заключается в зависимости модулей упругости от напряженного состояния и их скачкообразном изменении при переходе от растяжения к сжатию. У различных материалов это свойство, именуемое разномодульностью, проявляется в разной степени, у некоторых весьма существенно влияет на их поведение при нагружении. В основном это характерно для материалов с микронарушениями, а также композиционных материалов. Так для графита ZTA модуль Юнга при сжатии на 20% больше, чем при растяжении, напротив, для графита ATJ-S модуль Юнга при растяжении на 20% больше, чем при сжатии [1]. Свойством разномодульности обладает такой распространенный строительный материал, как бетон. Для некоторых видов мелкозернистого бетона модуль Юнга при растяжении в два-три раза меньше, чем при сжатии. Это также характерно для грунтов и горных пород. Исследование зависимости между давлением в грунте и относительным изменением его объема показывает существенное расхождение с законом Гука. Линейно-упругая модель среды, в отличие от разномодульной, не учитывает явления дилатансии грунтов при чисто сдвиговых напряжениях, которое наблюдается в экспериментах [2]. В расчетах напряженного состояния, как правило, этими отличиями пренебрегают и рассматривают обыкновенную линейно-упругую модель сплошной среды, что приводит к принципиальным расхождениям с экспериментальными данными. Применение разномодульной модели упругой среды позволяет учитывать влияние трещиноватости и самого напряженного состояния на поведение материалов. Широкое распространение подобных материалов и их использование в различных областях делают важной разработку адекватных моделей сплошной среды.

1. Разномодульные модели сплошной среды. Были предложены различные модели для описания явления разномодульности. В модели Амбарцумяна-Хачатряна [3] принято, что каждая из податливостей, в законе связи деформаций с напряжениями, скачком меняет свое значение при изменении знака соответствующего напряжения. Однако требование симметрии матрицы податливостей ограничивает класс рассматриваемых материалов и возможных случаев их сложного нагружения. Джонс [1] предложил усовершенствованную модель ортотропного материала с матрицей взвешенных податливостей, в которой введены весовые коэффициенты, зависящие от абсолютных величин двух главных напряжений. Таким образом, податливости в этой модели зависят не только от знаков напряжений, но и от их величин. Однако выбор весовых коэффициентов сделан совершенно произвольно без какого-либо обоснования. В модели Ломакина-Работнова [4] модули упругости среды зависят от значений первых двух инвариантов тензора напряжений, а именно от отношения гидростатического давления к интенсивности напряжений в каждой точке среды.

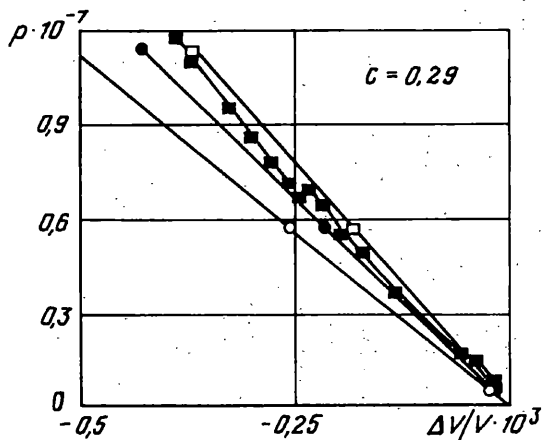
Наиболее общая формулировка модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды дана в [5]. Здесь принято, что модули упругости являются функциями



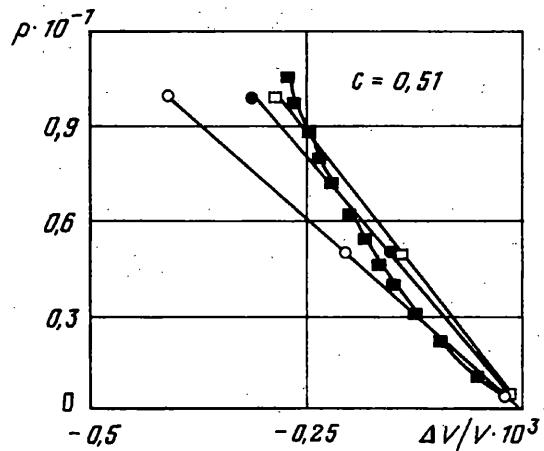
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

трех инвариантов тензора деформаций, а именно: $I_1 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$, $I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}$, $I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$. В этой модели потенциал среды описывается функцией W :

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} + \alpha \frac{I_1^3}{\sqrt{I_2}} + \beta \frac{I_3}{\sqrt{I_2}} \quad (1.1)$$

где λ , μ – коэффициенты Ламе, γ , α , β – размерные параметры, учитывающие степень трещиноватости среды. Если в (1.1) положить $\alpha = \beta = 0$, то получим рассмотренный в [6] потенциал, который применялся для решения прикладных задач. Если еще принять $\gamma = 0$, то среда будет подчиняться обычному закону Гука.

Ниже рассматриваются результаты численных расчетов, проделанных с помощью методики и программы [7], основанной на модели [5], а также их сравнение с экспериментальными данными. Эти расчеты позволяют выявить основные свойства модели [5].

2. Результаты расчетов. В [8] приводятся результаты серии экспериментов по нагружению цилиндрических образцов гранита Вестерли, в процессе которых сохранялись соотношения для главных напряжений:

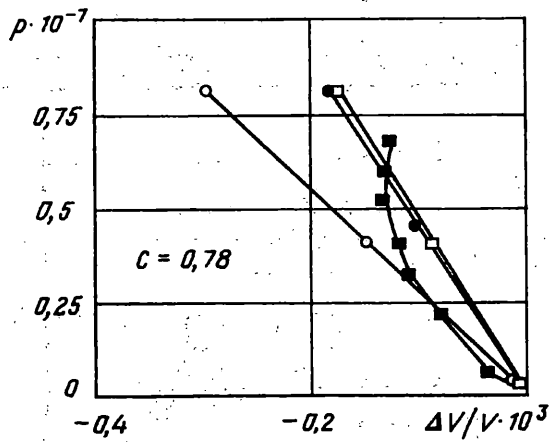
$$\sigma_{rr} = \sigma \quad \text{и} \quad -\sigma_{zz}/\sigma = C \quad (2.1)$$

где C – постоянное значение для каждого эксперимента, а σ_{rr} – сжимающие напряжения (ось Oz совпадает с осью цилиндра). В этих экспериментах исследовалась зависимость между давлением $p = -(2\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/3$ и относительным изменением объема $\Delta V/V$ цилиндра при различных значениях константы C . На фиг. 1 показаны результаты экспериментов [8] при следующих значениях параметра C : темные квадраты – 0,29; светлые квадраты – 0,51; темные круги – 0,78; светлые круги – 1,11; косые кресты – 1,51; прямые кресты – 2,10.

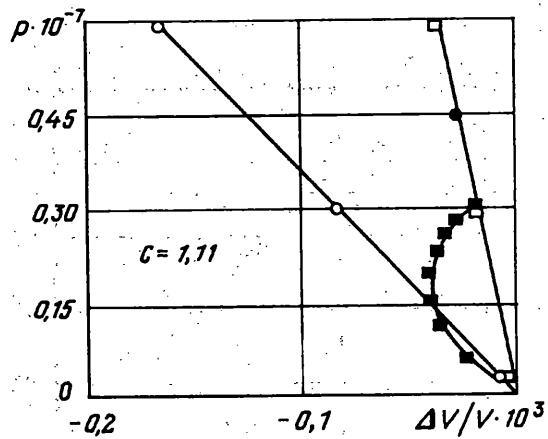
Численно данная задача решалась в двумерной осесимметричной постановке. На боковую поверхность цилиндра высоты $2H$ ($-H \leq z \leq +H$) и радиуса R действует однородное гидростатическое давление p_n , при этом $\sigma_{rr} = \sigma = -p_n$. К верхнему и нижнему торцам цилиндра приложены такие растягивающие усилия σ_{zz} , что выполняется условие (2.1). Плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии для данной задачи, поэтому рассматривается только верхняя половина цилиндра, а на границе $z = 0$ задается граничное условие $u_z = 0$. При таких граничных условиях касательные напряжения отсутствуют ($\sigma_{rz} = 0$), поэтому тензор деформаций является однородной функцией координат в цилиндре. В каждой точке расчетной области выполняются соотношения (2.1), а давление $p = -(2\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/3$ постоянно и точно совпадает с величиной давления, вычисленной по приложенным на границе усилиям. В такой постановке результаты расчетов имеют однозначное толкование.

Во всех расчетах для гранита Вестерли принимались значения модуля Юнга $E = 3,3 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$. При этих параметрах модуль объемного сжатия для гранита $K = 2,2 \cdot 10^{10}$ Па. Для цилиндра задавалась геометрическая пропорция $H/R = 1$. Значения размерных коэффициентов γ , α , β варьировались единообразным способом, изменялись лишь величины безразмерных множителей γ_0 , α_0 , β_0 с помощью соотношений: $\gamma = \gamma_0(\lambda + 2\mu)$, $\alpha = \alpha_0(\lambda + 2\mu)$, $\beta = \beta_0(\lambda + 2\mu)$. На фиг. 2 приведены результаты численных расчетов при значениях множителей $\gamma_0 = 0,1$; $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ для соответствующих значений коэффициента C . Здесь наблюдается приемлемое качественное совпадение результатов численных расчетов по модели [5] с экспериментами [8]. Этот расчет сразу же показывает принципиальное отличие разномодульной модели от линейно-упругой. Для линейно-упругой среды зависимость между давлением p и изменением относительного объема $\Delta V/V$ (при любых значениях C) имеет линейный характер и определяется модулем объемного сжатия:

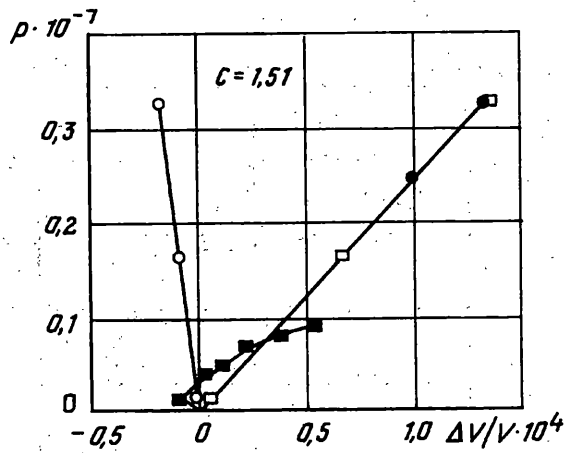
$$-p = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = KI_1 \quad (2.2)$$



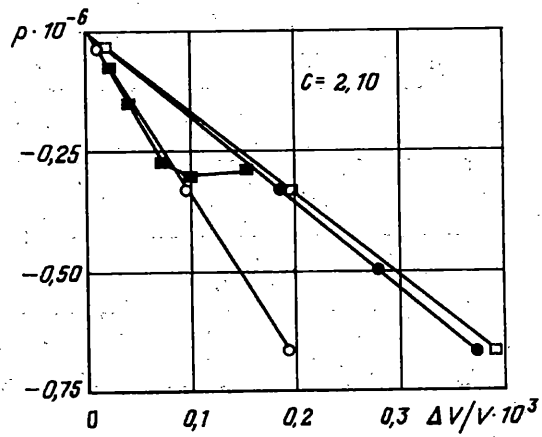
Фиг. 5



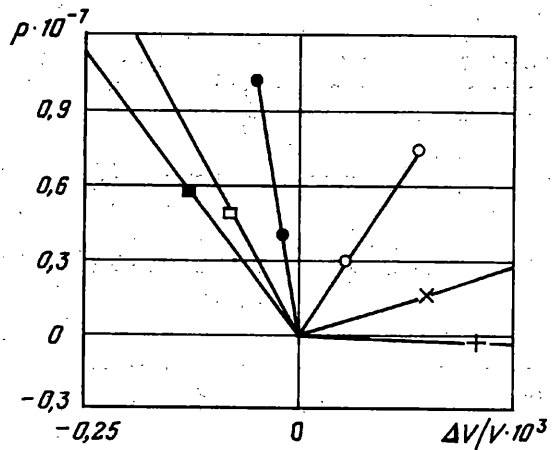
Фиг. 6



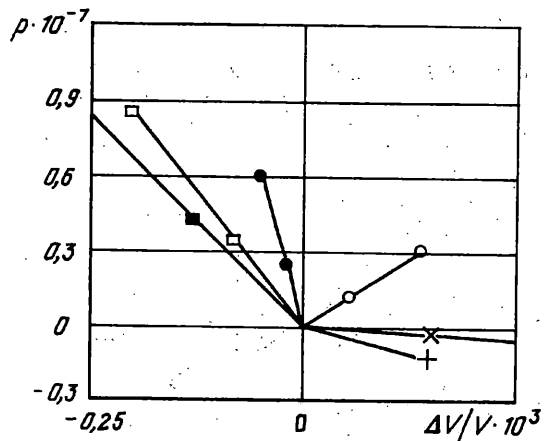
Фиг. 7



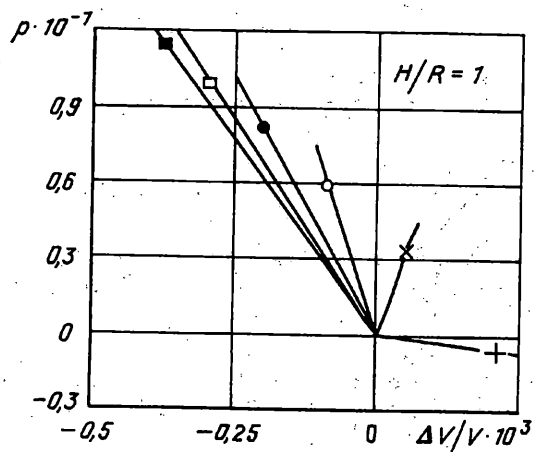
Фиг. 8



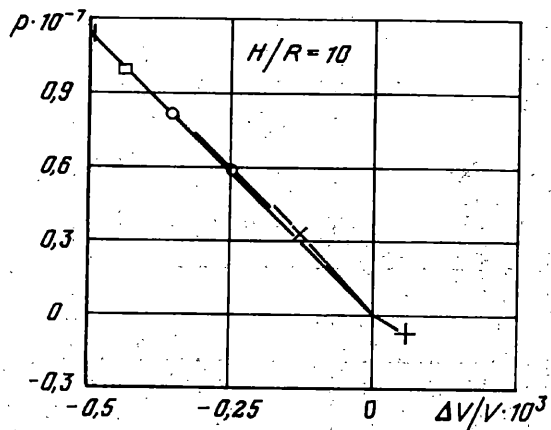
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

Рассмотрим отдельно расчеты для всех значений параметра C , в которых варьировались множители γ_0 , α_0 , β_0 . В этих расчетах задавались одинаковые наборы множителей, а именно: (1) $\gamma_0 = 0,1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$; (2) $\gamma_0 = 0,1$, $\alpha_0 = 0,05$, $\beta_0 = 0$; (3) $\gamma_0 = 0,1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0,05$. Выбор этих значений множителей был сделан произвольно для качественного исследования модели [5]. Ниже на фиг. 3–8 приведены результаты этих расчетов для всех значений параметра C , они удовлетворительно повторяют результаты экспериментов (темные квадраты соответствуют экспериментальным данным; светлые квадраты, темные круги и светлые круги случаям (1)–(3) соответственно). Поскольку в данной постановке краевых условий тензоры деформаций и напряжений – однородные функции от координат, то результаты расчетов не зависят от отношения H/R . Следовательно, графики на фиг. 3–8 демонстрируют именно качественные свойства модели [5], которые не зависят от геометрии задачи.

Очевидно, что в самих экспериментах при сжатии под большим давлением на торцах цилиндров возникает трение и $\sigma_{rz} \neq 0$. Рассмотрим расчеты, когда на торцах цилиндра полностью отсутствует проскальзывание. Для этого здесь задаются условия типа Дирихле: $u_z = u_0$, $u_r = 0$. При таких граничных условиях тензор деформаций перестает быть однородной функцией координат, что может привести к неоднозначной интерпретации результатов расчетов. Под относительным изменением объема будем подразумевать отношение интегрального значения ΔV к начальной величине объема цилиндра V . То есть ΔV будем вычислять по формуле

$$\Delta V = \int_V I_1 dv$$

Величину давления p можно определять различным образом, например, по значениям приложенных на границе усилий: $p = (2p_n - \bar{\sigma}_{zz})/3$. При этом предполагается, что $\sigma_{rr} = \sigma = -p_n$, а $\bar{\sigma}_{zz}$ – результирующее среднее напряжение:

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{zz} dv$$

Значение перемещения $u_z = u_0$ подбиралось в итерационной процедуре таким образом, чтобы $\bar{\sigma}_{zz}$ удовлетворяло условию (2.1). Можно также под давлением подразумевать значение усредненного давления \bar{p} в цилиндре:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3V} \int_V (2\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) dv$$

Очевидно, эти значения различны. Результаты численного решения задачи с условием Дирихле на торцах цилиндра для среды, описываемой потенциалом (1.1) при значениях коэффициентов $\gamma_0 = 0,1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, показаны на фиг. 9–10. На фиг. 9 под давлением подразумевается величина $p = (2p_n - \bar{\sigma}_{zz})/3$, определяемая граничными усилиями, на фиг. 10 в качестве давления принимается величина \bar{p} . Значения параметра C и их обозначения те же, что и на фиг. 1–2.

Очевидно, что в такой постановке результаты расчетов существенно зависят от пропорций цилиндра. Отличия результатов на фиг. 9–10 от результатов на фиг. 2 объясняются неоднородностью деформаций в цилиндре, обусловленной краевым условием на торце цилиндра. С увеличением отношения H/R влияние краевого условия ослабевает и результаты приближаются к результатам на фиг. 2.

Для линейно-упругой среды, подчиняющейся закону Гука, в расчетах с условием типа Дирихле на торцах результаты существенно отличаются от полученных выше. Приведем результаты расчетов для линейно-упругой среды при различных отношениях H/R . В первом расчете $H/R = 1$, а во втором $H/R = 10$. Под величиной давления будем понимать величину $p = (2p_n - \bar{\sigma}_{zz})/3$.

На фиг. 11–12 показаны результаты этих расчетов. Если при соотношении $H/R = 1$ имеет место подобие результатов расчетов и экспериментов, то при отношении $H/R = 10$ результаты расчетов приближаются к прямой, заданной уравнением (2.2). Если же в расчетах для линейно-упругой среды рассматривать усредненное давление \bar{p} в цилиндре, то графики на фиг. 11–12 в точности совпали бы с прямой, определяемой уравнением (2.2), при любом отношении H/R .

Заключение. Отклонение результатов расчетов для линейно-упругой среды на фиг. 11 от прямой (2.2) можно объяснить лишь влиянием краевых условий на торце цилиндра и его геометрических пропорций. При увеличении соотношения H/R влияние краевых условий ослабевает. Для численных расчетов на основе изотропно-упругой разнородной модели сплошной среды [5] получены качественно отличные результаты, показанные на фиг. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression // AIAA Journal. 1977. V. 15. No. 1. P. 16–23.
2. Ляховский В.А. Применение разномодульной модели к анализу напряженно-деформированного состояния горных пород // Изв. АН СССР. Физика земли. 1990. N 2. С. 89–94.
3. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнородных по отношению к растяжению и сжатию // Инж. ж. МТТ. 1966. N 2. С. 44–53.
4. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. N 6. С. 29–34.
5. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разнородной среды // ДАН СССР. 1992. Т. 322. N 1. С. 57–60.
6. Ляховский В.А., Мясников В.П. О поведении упругой среды с микроразрывами // Изв. АН СССР. Физика земли. 1984. N 10. С. 71–75.
7. Гасилов В.А., Головин М.В., Мясников В.П., Пергамент А.Х., Резник А.А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород на основе разномодульной модели сплошной среды: Препринт N 112. М.: Ин-т Прикл. Мат. им. М.В. Келдыша РАН. 1997. С. 16.
8. Шок Р. Поведение горных пород под действием больших напряжений // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981. С. 116–130.

Москва

Поступила в редакцию
21.08.1998