

УДК 539.3

© 2000 г. И.Г. ТЕРЕГУЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОБРАТИМЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

Высокими темпами возрастающая мощь вычислительных средств позволяет прогнозировать проведение математического моделирования очень сложных процессов природы, что в свою очередь в повестку дня ставит вопрос об адекватности физических (определяющих) соотношений тем процессам, на описание которых они претендуют. По этой причине на сегодня одним из важнейших вопросов в механике, физике и других областях знания является вопрос о теоретических основах и о построении корректных определяющих соотношений, закладываемых в расчетные схемы.

1. Введение. Теоретические построения, нацеленные на описание необратимых многопараметрических процессов, протекающих в сплошных средах опирались, как выяснилось, без достаточных на то оснований, на соотношения классической термодинамики, формулировку которых дал Гиббс в конце прошлого столетия, и в своей классической форме они имеют вид (1875, Нью-Хевен, США):

$$\delta u = du, \quad \delta q = Tds \quad (1.1)$$

Лишь в 1891 году публикация результата (1.1) достигла Европы и началось его триумфальное шествие, принимаемое непогрешимым в течение более века. В равенствах (1.1) δu – приращение внутренней энергии в малой части объема среды, которое трактуется в классической термодинамике как полный дифференциал по отношению к приращениям параметров процесса x_i ; $du = \sum a_i dx_i$, δq – приращение тепла в малой части объема среды, которое допускает интегрирующий множитель T , названный в последующем абсолютной температурой, а s – энтропия, приращение которой постулируется полным дифференциалом. Т.е. имеются, вообще говоря, три характеристические функции u , T , s , из которых функция T вводится как функция эмпирической температуры θ .

Таким образом в классическом варианте термодинамики в итоге имеются две характеристические функции: термодинамические потенциалы – это внутренняя энергия u как функция состояния и энтропия тоже как функция состояния. То, что u и s есть функции состояния и, следовательно, их значения не зависят от пути процесса в пространстве некоторых параметров состояния, следует из того, что их приращение есть полный дифференциал и наоборот.

Однако, как было показано в [1–3], такое положение корректно лишь для обратимых двухпараметрических процессов. В общем случае приращение внутренней энергии δu не есть полный дифференциал, а приращение тепла δq не обязательно допускает интегрирующий множитель. Создавшаяся ситуация исторически связана с тем, что классическая термодинамика создавалась на базе исследований, проводившихся над идеальными газами, в которых существуют три параметра состояния: объем V , давление p и температура T , связанные одним уравнением состояния $F(p, V, T) = 0$.

Т.е., независимых параметров два, а процесс считается обратимым. Тогда соотношения (1.1) в этом простейшем случае имеют силу. Если процесс необратим и многопараметричен (независимых параметров процесса более двух), то как установлено [1–3] соотношения (1.1) теряют свою силу и нужно обращаться к более общим. Таков путь познания: от простого к сложному, приближаясь к истине. Ниже приводятся общие соотношения и намечаются пути их приложения.

К необходимости пересмотра соотношений (1.1) автора побудил следующий парадокс. Предположив, что соотношения (1.1) верны и приняв, что приращение полной деформации $d\varepsilon_{ik}$ состоит из двух частей – обратимой (упругой части) de_{ik} и пластической (необратимой) части $d\eta_{ik}$: $d\varepsilon_{ik} = de_{ik} + d\eta_{ik}$, соотношения (1.1) запишем в виде

$$\delta u = du = \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} = \sigma^{ik} de_{ik} + \sigma^{ik} d\eta_{ik}$$

$$\delta q = \delta q_{(e)} + \delta q_{(i)} = Tds$$

где σ^{ik} – тензор напряжений, $\delta q_{(e)}$ – приток тепла в систему извне, а $\delta q_{(i)}$ – приращение за счет перехода в тепло механической энергии

$$\delta q_{(i)} = \tau^{ik} d\eta_{ik} \geq 0$$

Здесь τ^{ik} – тензор некоторых силовых характеристик, которые на пластической части деформации производят работу, переходящую в тепло $\delta q_{(i)}$. Таким образом

$$\sigma^{ik} de_{ik} + \sigma^{ik} d\eta_{ik} = du, \quad \tau^{ik} d\eta_{ik} + \delta q_{(e)} = Tds$$

В силу независимости de_{ik} и $d\eta_{ik}$ имеем

$$\sigma^{ik} = \frac{\partial u}{\partial e_{ik}} = \frac{\partial u}{\partial \eta_{ik}} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial e_{ik}} - \frac{\partial u}{\partial \eta_{ik}} = 0$$

Решением последнего уравнения будет произвольная функция аргумента $e_{ik} + \eta_{ik}$. Таким образом, для напряжений σ^{ik} имеет место потенциал $u = u(e_{ik} + \eta_{ik})$, что противоречит одному из базовых положений классической механики, состоящего в том, что при наличии рассеяния энергии система не допускает потенциала для сил, т.е. она неконсервативна. Это противоречие, следующее из предположения о справедливости равенств (1.1) за пределами их применимости привело к необходимости вернуться к истокам появления равенств (1.1), каковыми послужили исследования Бойля (1662), Мариотта (1670); $pV = \text{const}$; Гей-Люссака и Шарля (1802): $V = V_0 (1 + \alpha\theta)$; Клапейрона и Менделеева: $pV = nRT$; Ван-дер-Ваальса (1879): $(p + aV^2)(V-b) = RT$ и др. Это в последующем привело Гиббса к соотношениям (1.1). Надо отметить, что наличие приведенных здесь уравнений состояния для газов как двухпараметрических систем говорит о том, что, в частности, есть зависимость $F(p, V, \theta) = 0$ или, например, $p = p(V, \theta)$.

Так как для газов при двух независимых параметрах процесса V и θ :

$$du = pdV + \delta q_{(e)}$$

а $\delta q_{(e)} = Tds$, то из сопоставления двух последних равенств имеем $du = pdV + Tds$, или следующие отсюда определяющие соотношения

$$p = \partial u / \partial V, \quad T = \partial u / \partial s$$

Последний вывод, собственно, говорит о том, что в энергетических соотношениях заложена потенциальная возможность указать структуру определяющих соотношений, что в теории упругости выражено формулами Грина, позволяющими представить напряжения в виде производной от потенциала – внутренней энергии деформирования как функции деформаций. Для многопараметрических систем и необратимых процессов с неизбежностью следует отказаться от соотношений (1.1) и построить более общие, что делается ниже.

2. Законы сохранения. Было показано [1, 2], что при необратимых процессах, в частности в процессе деформирования твердых тел, термодинамические соотношения требуют существенного уточнения системы характеристических функций процесса путем добавления к традиционному потенциалу u , который представляет внутреннюю энергию в трактовке обратимых процессов, и энтропии s еще ряд функций параметров процесса так, что число m этих функций должно удовлетворять условию $m \leq n$, где n – число параметров процесса (управляющие параметры). Сплошную материальную среду плотности ρ будем рассматривать как замкнутую термодинамическую систему с границей Σ , занятого ею объема V . Введем в этой материальной среде лагранжеву систему отсчета x^i ($i = 1, 2, 3$) с координатными векторами $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$ и метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)$ в текущем состоянии. Текущее положение материальной точки среды по отношению к некоторой лабораторной системе отсчета определяет радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i, t)$, где t – время. Конечно, термодинамическую систему, ограниченную границей Σ , можно считать открытой для тепломассообмена, что не отразится на рассматриваемых ниже принципиальных положениях, но потребует дополнительных построений технического характера. Во избежание усложнений технического порядка систему будем считать замкнутой.

Границу среды Σ считаем проницаемой для тепловых потоков, которые задаются вектором $\mathbf{q}_\Sigma(x^i, t)$. Внешние силовые поверхностные воздействия \mathbf{P} , отнесенные к единице площади Σ , и массовые силы \mathbf{Q} , отнесенные к единице объема, на малых приращениях перемещений $\delta \mathbf{u}(x^i, t)$ производят работу

$$\delta A_e = \int_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma + \int_V \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad (2.1)$$

где $d\Sigma$ и dV – текущие меры малых частей Σ и V .

Правую часть соотношения (2.1) можно рассматривать в силу закона сохранения и превращения энергии как количество приращения энергии в системе за счет притока всех возможных нетепловых видов энергии, если \mathbf{P} и \mathbf{Q} считать обобщенными силами, а $\delta \mathbf{u}$ – приращениями соответствующих этим силам обобщенных перемещений, представленных тензорами соответствующих рангов. Излагаемые в этой части положения носят достаточно общий характер и имеют силу для различных областей знания (химия, электродинамика и т.д.) в силу того, что опираются на самые общие законы природы и строгие математические положения.

Здесь и далее знак $\delta(\dots)$ используется для обозначения возможных и виртуальных изменений (приращений) параметров процессов и соответствующих им изменений функций для обозначения таких приращений функций, которые не обязательно являются полными дифференциалами по отношению к приращениям их аргументов. Знак $d(\dots)$ используется для обозначения действительных перемещений и действительных изменений параметров процессов и для обозначения приращений функций, когда эти приращения являются полными дифференциалами.

Если r – объемная плотность внутренних источников тепла, а \mathbf{q}_Σ – вектор потока тепла через границу Σ , то полное приращение тепла в термодинамической системе за время dt есть

$$\delta Q_e = \left(- \int_{\Sigma} \dot{\mathbf{q}}_\Sigma \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_V r dV \right) dt \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{n} – орт внешней нормали к поверхности Σ , а точка над буквой обозначает производную по времени. Таким образом, полный приток механической и тепловой энергий

$$\delta E = \delta A_e + \delta Q_e \quad (2.3)$$

Обозначим через $\dot{q}_{(i)}$ плотность скорости перехода в тепло механической энергии

внутри самой системы, тогда для полного приращения тепла δQ в системе получим

$$\delta Q = \delta Q_e + \int_V \delta q_{(i)} dV \quad (2.4)$$

Здесь $\delta q_{(i)} = \dot{q}_{(i)} dt$ (там, где возможна неоднозначность прочтения, нетензорные индексы будут заключаться в скобки; индекс i при q и u всегда имеет смысл "внутренний", тогда как индекс "e" всегда имеет смысл "внешний"). Две количественные характеристики δE и δQ являются базовыми при рассмотрении термомеханических процессов на феноменологическом уровне, присущем термодинамике. Расширение круга рассматриваемых явлений может быть осуществлено путем добавления к правым частям соотношений (2.3) и (2.4) соответствующих членов, характеризующих эти новые процессы: электромагнитные, химические и др. Далее при рассмотрении термомеханики, как части общей термодинамики, сохраним право пользоваться последним термином. Однако отметим, что излагаемые далее базовые положения имеют отношение к самой общей постановке задач в термодинамике с учетом самых разных форм движения, рассматриваемых на феноменологическом уровне.

В центре внимания далее будут положения, связанные с соотношениями (2.3) и (2.4), и главная задача исследования состоит в том, чтобы дать теоретическую основу математическому моделированию необратимых многопараметрических процессов, изучаемых на (феноменологическом) термодинамическом уровне.

Введем параметры состояния α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и β_j ($j = 1, 2, \dots, k$), из которых α_i назовем параметрами процесса, а β_j – будут реакциями среды на изменение параметров процесса, которые представляют обобщенные силы, производящие работу на изменениях параметров процесса как на обобщенных перемещениях. Эти параметры являются в общем случае функциями координат и характеристики, задающей последовательность прохождения упомянутых состояний. В частности, этой характеристикой может быть обычно употребляемое время или термодинамическое время [4] для необратимых процессов. Наряду с параметрами состояния α_i и β_j как параметры состояния введем совокупность параметров γ_j ($j = 1, 2, \dots, r$), характеризующих свойства среды (модуль упругости, коэффициент теплопроводности и т.д.) совокупность параметров состояния α_i , β_j , и γ_j и их изменения полностью характеризуют состояние среды и протекание процесса. Например, в классике, если α_i – деформации и температура, то β_j – напряжения и энтропия, γ_j – модули упругости и теплоемкости. Преобразование Лежандра дает возможность из параметров состояния формировать различные наборы параметров процесса. Например, в классической термодинамике, если α_i – напряжения и энтропия, то β_j – деформации и температура, которые зависят от α_i согласно определяющим или физическим соотношениям. Построение последних является одной из центральных проблем механики сплошной среды. Все возрастающие возможности вычислительной техники поставили в повестку дня проблему более точного описания процессов, то есть построение теоретически обоснованных определяющих соотношений для изучаемых процессов и, следовательно, адекватного изучаемому явлению расчета и предсказания хода процесса.

Обратимым назовем такой процесс, при котором параметры состояния в полной их совокупности могут возвратиться к значениям, имевшим место ранее. В противном случае по определению процесс называется необратимым.

Процесс определять локально обратимым, если для каждого промежуточного состояния системы все уравнения для бесконечно малых приращений параметров удовлетворяются также при замене знаков этих приращений на обратные [5].

Внешний приток энергии δE в систему в самой системе трансформируется по внутренним свойствам системы, которые описываются параметрами γ_j в новые формы энергии и энергия системы получает приращение на количество, определяемое изменениями $d\alpha_i$ параметров процесса α_i . В силу закона сохранения и превращения энер-

гии это приращение энергии в системе всегда равно энергии, поступившей в систему извне.

Если $x_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – параметры процесса, а y_i – совокупность всех параметров состояния, включая параметры процесса α_i , параметры свойств среды γ_i , и реакции β_i , то необратимость определяется как невозможность для процесса пройти замкнутый путь в пространстве параметров состояния y_i . Таким образом, допускаем возможность замкнутости пути по части параметров состояния, но исключаем возможность замыкания пути процесса по всей совокупности параметров y_i .

Полная энергия в среде содержит кинетическую энергию K материальных частиц по размерам надмолекулярного уровня, приращение которой dK . Всю совокупность других форм энергии в системе обозначим $U_{(i)}$ и назовем внутренней энергией системы, а приращение ее есть

$$\delta U_{(i)} = \int_V \delta u_{(i)} dV = \sum_{j=1}^n \int_V u_{(i)j} \delta \alpha_j dV \quad (2.5)$$

где в сумме содержатся приращения параметров α_i , из числа которых исключены параметры, определяющие приращение кинетической энергии: скорости центра масс малой частицы среды и ее угловые скорости. В пределах малого объема среды в силу закона о сохранении и превращении энергии

$$\delta \epsilon = \delta a_e + \delta q_e = dk + \delta u_{(i)} \quad (\delta Q_e = \int_V \delta q_e dV, \quad \delta A_e = \int_V \delta a_e dV) \quad (2.6)$$

где $\delta u_{(i)}$ – приращение плотности внутренней энергии $u_{(i)}$. Эта внутренняя энергия не зависит явно от пространственных координат и времени, но зависит от них через параметры α_i , β_i и γ_i ; $\delta q_{(e)}$ – приращение плотности тепловой энергии за счет притока ее извне; $\delta a_{(e)}$ – приращение плотности нетепловых видов энергии.

В виде строгого равенства закон сохранения и превращения энергии для термомеханических процессов может быть записан только в виде (2.6) и для других процессов аналогично с добавлением соответствующих членов в правой части равенства. В то время как dk есть полный дифференциал приращений скоростей в понимании классической механики, то утверждать, что $\delta u_{(i)}$ есть полный дифференциал по отношению к приращениям параметров процесса α_i , можно лишь при дополнительных ограничениях. Обсуждение этого утверждения и выводы из него являются основой для последующих рассмотрений.

3. Приращения внутренней энергии и тепла как линейные дифференциальные формы. Во всех известных автору исследованиях по термодинамике необратимых процессов постулируется существование внутренней энергии как функции состояния [4, 6 и др.], т.е. однозначной функции параметров состояния независимо от того каким путем система пришла в это состояние и, следовательно, ее приращение считается полным дифференциалом. В ряде исследований доказательство того, что полная энергия и, следовательно, внутренняя энергия есть функции состояния, приращения которых есть полные дифференциалы, держатся на утверждении, что на замкнутом пути процесса (такая возможность в общем случае не очевидна, но авторами предполагается) приращение полной энергии есть нуль со ссылкой на закон сохранения энергии. Но закон сохранения и превращения энергии этого не утверждает и его полная формулировка заключена в соотношении (2.6), которое содержит утверждение о том, что приращение энергии в системе равно ее притоку извне. Ссылка в этом случае на невозможность создания вечного двигателя первого рода как циклически работающей и производящей полезную работу машины без притока энергии извне не правомочна, так как в самой формулировке закона сохранения и превращения энергии не содержатся утверждения, что

$$\oint \delta E = 0 \quad (3.1)$$

где интеграл берется по замкнутому пути в пространстве параметров процесса. Из (3.1), конечно, сразу следует, что $\delta E = dE$, т.е. малые приращения полной энергии есть полные дифференциалы по отношению к приращениям параметров процесса $d\alpha_j$. Однако, в условии (3.1) содержатся два существенных предположения: предположение о возможности в пространстве состояний всегда реализовать замкнутый цикл, что противоречит в общем случае понятию необратимости процесса, и утверждение о том, что вся поступившая за цикл извне в систему энергия обязательно за тот же цикл (по параметрам процесса) возвращается в окружающую среду, ничего не расходуя на возможные изменения внутри самой среды, т.е. на изменение свойств. Т.е. для необратимых процессов выполнение условия (3.1) в общем случае не является необходимым.

Первый закон термодинамики как закон сохранения и превращения энергии состоит в том, что энергия не возникает из ничего и не исчезает, а лишь в соответствующих мерах движения материи может переходить из одних форм в другие. Именно это утверждение отражено соотношением (2.6). При этом внутри системы распределение поступившей извне энергии по разным ее видам происходит в соответствии с внутренними свойствами среды. Этот процесс есть функция параметров состояния и порядка поступления энергии извне.

Таким образом, из закона сохранения и превращения энергии имеем соотношения (2.3) и после введения понятия кинетической и внутренней энергий располагаем равенствами (2.6), где возникает вопрос о свойствах величины $U_{(i)}$, ее приращений $\delta U_{(i)}$ и плотности приращений $\delta u_{(i)}$.

Совершенно аналогично возникает тот же вопрос о свойствах величины Q и ее приращениях δQ и плотности ее приращения $\delta q = \delta q_{(e)} + \delta q_{(i)}$. Главный здесь вопрос сводится к отысканию условий, при которых сами количества $u_{(i)}$, q и их приращения $\delta u_{(i)}$ и δq могут быть представлены через функции, характеризующие состояние среды, или характеристические функции. В классической термодинамике обратимых процессов доказательно внутренняя энергия $u_{(i)}$ есть функция состояния и ее приращение есть полный дифференциал: $du = du$, а полное приращение тепла δq в единице объема как линейная дифференциальная форма приращений $d\alpha_j$ в двухпараметрических процессах допускает интегрирующий множитель $1/T$ и представима в виде

$$\delta q/T = ds \quad (3.2)$$

где s – энтропия, T – абсолютная температура. В то же время для двухпараметрических процессов имеем $\delta q = q_1 \delta \alpha_1 + q_2 \delta \alpha_2$, что представляет собой линейную дифференциальную форму по отношению к $\delta \alpha_j$. Для такой формы интегрирующий делитель всегда существует и, следовательно представление (3.2) всегда возможно.

Установившийся на сегодня подход к построению термодинамики необратимых процессов состоит в том, что вместо (3.2) записывается условие $\delta q_e + \delta q_i = Tds$, откуда при $\delta q_i \geq 0$ следует $Tds \geq \delta q_e$, а δq_i – "некомпенсированное" тепло. Для обратимых процессов $\delta q_i = 0$ и имеем (3.2) (условие $\delta q_i = 0$ не является достаточным для вывода об обратимости процесса в общем случае [2]). Ниже откажемся от предположений о том, что $du = du$, $\delta q_e + \delta q_i = Tds$, обычно используемых в термодинамике необратимых процессов и переносимых их из термодинамики обратимых двухпараметрических процессов без критического анализа и достаточного обоснования такого перехода. Еще в начале XX века Планк [7], не подвергая сомнению первый закон термодинамики как закон сохранения и превращения энергии, но не вывод из него о свойствах внутренней энергии, высказал свою неудовлетворенность по поводу второго закона и его трактовки применительно к необратимым процессам.

Впервые характеристические функции (потенциалы), справедливые в строгой постановке для обратимых двухпараметрических процессов, в термодинамику ввел Гиббс [8] в конце XIX столетия и дал их модификации, получаемые использованием преобразования Лежандра (свободная энергия, энтальпия и др.).

Далее будем рассматривать необратимые процессы исходя из того, что по определению необратимости исключается возвращение параметров состояния системы к первоначальному или некоторым предыдущим значениям. Таким образом, по принятому определению в необратимом процессе в пространстве параметров состояния траектории процесса не могут быть замкнутыми.

Дополним сказанное выше предположением о том, что превращение механической энергии в тепловую как и в классической термодинамике носит необратимый характер и

$$\delta q_{(i)} \geq 0 \quad (3.3)$$

Будем считать, что одновременно возможен необратимым образом переход механической энергии в механическую же, но в новой форме. Например, энергия напряженно-деформированного состояния частично может расходоваться на образование микротрещин или микропор, которые рассматриваются как некоторое изменение состояния квазисплошной среды, в которой сохраняется сплошность на феноменологическом уровне рассмотрения и среда продолжает оставаться однофазовой или без изменения фаз с включением в число параметров состояния и плотности микропор [9]. Конечно, в ближайшей окрестности границы микропоры и микротрещины возможно образование пластических зон с выделением тепла. Учет этого явления возможен в пределах развиваемого далее подхода.

Если σ^{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор полных деформаций, η_{ij} – тензор необратимых деформаций при связи

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij(e)} + d\eta_{ij} \quad (3.4)$$

где $d\varepsilon_{ij(e)}$ – обратимое на бесконечно малом участке (траектории) процесса приращение деформации, то приращение внутренней энергии в системе (теле) как сумма притока механической и тепловой энергий за вычетом кинетической энергии частиц тела есть

$$\delta u_{(i)} = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \delta q_{(e)} \quad (3.5)$$

а полное приращение тепла в малом объеме системы

$$\delta q = \tau^{ij} \delta \eta_{ij} + \delta q_{(e)} \quad (3.6)$$

где $\tau^{ij} \delta \eta_{ij}$ – тепло, образовавшееся за счет перехода механической энергии в тепловую, $\delta q_{(e)}$ – количество тепла, притекшее извне в систему. В общем случае, обозначив через α_i параметры процесса, соотношениям (3.5) и (3.6) придадим вид ($\delta \alpha_i = d\alpha_i$ – независимые приращения параметров процесса):

$$\delta u_{(i)} = \sum_j a_{(e)j} d\alpha_j + \sum_j q_{(e)j} d\alpha_j \quad (3.7)$$

$$\delta q = \sum_j q_{(e)j} d\alpha_j + \sum_j q_{(i)j} d\alpha_j \quad (3.8)$$

Здесь в (3.7) первая группа членов – приращение механической энергии, вторая – приращение тепловой энергии; в (3.8) первая группа членов – приращение тепла в малой части среды за счет притока тепла извне, а вторая группа членов – приращение тепла за счет перехода части механической энергии внутри системы в тепло, поглощаемое самой системой. Таким образом $\delta u_{(i)}$ и δq представляют собой линейные дифференциальные формы типа (3.7) и (3.8).

4. Приведение линейных дифференциальных форм к каноническому виду. Так как при необратимых процессах, что в рассматриваемом случае обеспечивается выполнением условия (3.3), нет оснований вести разговор о замкнутых путях процесса в пространстве параметров состояния, то нет оснований утверждать, что приращение энергии $\delta \varepsilon$ и, следовательно, приращение внутренней энергии δu суть полные дифференциалы по отношению к приращениям параметров процесса [2]. Следовательно,

правая часть равенства (3.7) представляет пока не более чем линейную дифференциальную форму (пфаффову форму) по отношению к приращениям параметров процесса ϵ_{ik} , η_{ik} , θ . Здесь θ – эмпирическая температура. Аналогично правая часть равенства (3.8) пока тоже представляет собой не более чем линейную дифференциальную форму.

Известно [10], что пфафхова форма

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i d\chi_i \quad (n \geq 3)$$

где ω_i – функция класса C^1 параметров χ_i , всегда локально приводима к виду

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i d\chi_i = du + \sum_{j=1}^p w_j dv_j \quad (2p+1 \leq n, \quad n \geq 3) \quad (4.1)$$

Здесь u , w_p , v_j – независимые функции параметров χ_i и их число, естественно, не может превышать n – числа независимых параметров χ_i . При этом функции w_j принадлежит классу C^1 , а функции u , v_j – классу C^2 [10]. Если $du = 0$ в (4.1), то, очевидно, должно быть выполнено условие $2p \leq n$. Таким образом, линейные дифференциальные формы (3.7) и (3.8) с учетом (3.5) и (3.6) можно записать в виде правых частей неравенств

$$\sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} + \delta q_e = du_1 + \sum_{j=1}^{p_1} w_{1j} dv_{1j} \quad (4.2)$$

$$\tau^{ij} \delta \eta_{ij} + \delta q_e = du_2 + \sum_{j=1}^{p_2} w_{2j} dv_{2j} \quad (4.3)$$

при условиях

$$2p_1 + 1 \leq n \quad \text{при} \quad du_1 \neq 0 \quad \text{или} \quad 2p_1 \leq n \quad \text{при} \quad du_1 = 0$$

$$2p_2 + 1 \leq n \quad \text{при} \quad du_2 \neq 0 \quad \text{или} \quad 2p_2 \leq n \quad \text{при} \quad du_2 = 0$$

Функции u_i , w_{ij} , v_{ij} могут зависеть от разного порядка производных по времени от параметров состояния.

Приведение пфафховой формы Ω к вполне интегрируемому виду, т.е. либо к виду

$$\sum_{j=1}^n \omega_j d\chi_j = du \quad (n \geq 3) \quad (4.4)$$

либо к виду

$$\sum_{j=1}^n \omega_j d\chi_j = w dv \quad (n \geq 3) \quad (4.5)$$

возможно лишь при выполнении условий Фробениуса [10], которым должны удовлетворять функции $\omega_j(\chi_j)$: Приведение дифференциальных форм (4.2) к виду (4.4) независимо от числа параметров процесса лишь для обратимых процессов в силу закона о сохранении энергии и осуществимо при традиционных условиях $\partial \omega_i / \partial \chi_j = \partial \omega_j / \partial \chi_i$. Приведение же форм (4.2) и (4.3) к виду (4.5) всегда возможно для двухпараметрических процессов, если функции ω_j непрерывны со своими первыми производными (принадлежность к классу C^1). Для случая $n = 3$ исследование приведения таких форм к виду (4.5) проводил еще Эйлер [10].

В случае $n \geq 3$ возможность приведения (4.2) или (4.3) к виду (4.5) состоит в вы-

полнении условий [11]:

$$\omega_i \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial \chi_k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial \chi_j} \right) + \omega_j \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial \chi_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial \chi_k} \right) + \omega_k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \chi_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial \chi_i} \right) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

Эти ограничения существенно сужают класс допускаемых к рассмотрению процессов и по этой причине далее в общем случае выполнение условий Фробениуса, априори обеспечивающих сведение дифференциальных форм, представленных левыми частями равенств (4.2), (4.3), к видам (4.4) или (4.5), не предполагается, хотя они при соответствующих условиях используются. Представления приращения внутренней энергии и количества тепла в виде правых частей (4.2) и (4.3) принципиально отличает развиваемый здесь подход от традиционного или, скажем, классического варианта термодинамики необратимых и обратимых процессов [1, 3, 4, 11] и его модификаций [5], в которых всегда $p_1 = 0, p_2 = 1$ при $u_2 = 0$. Уместно будет подчеркнуть, что подход к построению термодинамики, при котором $p_1 = 0, p_2 = 1, u_2 = 0$ (т.е. приращение внутренней энергии, как дифференциальная форма, есть полный дифференциал, а приращение тепла как дифференциальная форма допускает интегрирующий множитель), не претерпел изменений со времени Гиббса [6].

Так как соотношения (4.2), (4.3) соответствуют одному и тому же процессу с общим единым числом параметров процесса, то общее число независимых функций $u_1, u_2, w_{1j}, w_{2j}, v_{1j}, v_{2j}$ не должно превышать n — числа независимых параметров процесса. Удержание в правых частях равенств (4.2), (4.3) характеристических функций общим числом m , меньшим числа независимых параметров процесса, означает, что истинный изучаемый процесс аппроксимируется упрощенным с той или иной степенью точности. Если точность описания процесса при выбранном m оказалась недостаточной, то, естественно, следует включить в рассмотрение большее число термодинамических потенциалов. В свете сказанного случай $p_1 = 0, p_2 = 1, u_2 = 0$ (случай (1.1)) представляет собой некоторую аппроксимацию, погрешность которой может быть оценена с более общих позиций, развиваемых здесь. Однако случай $p_1 = 0$, используемый до последнего времени для необратимых процессов, содержит принципиальное нарушение истины. По начертанию соотношений (4.2), (4.3) видно, что в рассматриваемом случае в число параметров процесса входят величины $\varepsilon_{ik}, \eta_{ik}, \theta$.

Введем в рассмотрение скорости деформаций, исходя из того, что $d\varepsilon_{ik} = (\mathbf{r}_i + \partial_i \mathbf{u}) \partial_k d\mathbf{u} + (\mathbf{r}_k + \partial_k \mathbf{u}) \partial_i d\mathbf{u}$, где $d\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$, а \mathbf{v} — вектор скорости перемещения частицы среды. Обозначая $e_{ik} = d\varepsilon_{ik}/dt$, получим $e_{ik} = (\mathbf{r}_i + \partial_i \mathbf{u}) \partial_k \mathbf{v} + (\mathbf{r}_k + \partial_k \mathbf{u}) \partial_i \mathbf{v}$. Так как тензор $E = \varepsilon_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$ имеет составляющими компоненты ε_{ik} , отнесенными к состоянию в момент времени $t = t_0$, а приращения du соответствуют приращению $dt = d\tau$ в отсчете от момента $t = t_0 + \tau$, то $dE = d\varepsilon_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$. Следовательно приращение тензора деформации определяется приращениями его компонент, а сам тензор скоростей можно представить в виде $\dot{E} = e_{ik} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$.

Если ввести калориметрические коэффициенты C_j , то для (3.6) имеем запись

$$\delta q = \tau^{ij} \delta \eta_{ij} + \delta q_{(e)} = \sum_j C_j d\alpha_j \quad (4.6)$$

или

$$\delta q_{(e)} = \sum_j C_j d\alpha_j - \tau^{ij} \delta \eta_{ij} \quad (4.7)$$

Введем связь между σ^{ik} и τ^{ik} соотношениями

$$\sigma^{ik} = \tau^{ik} + \Psi^{ik} \quad (4.8)$$

При этом, как обычно, положим

$$\sigma^{ik} = \sigma_0 g^{ik} + \sigma_{(d)}^{ik}, \quad \sigma_{(d)}^{ik} g_{ik} = 0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ik} g_{ik}$$

$$\tau^{ik} = \tau_0 g^{ik} + \tau_{(d)}^{ik}, \quad \tau_{(d)}^{ik} g_{ik} = 0, \quad \tau_0 = \frac{1}{3} \tau^{ik} g_{ik}$$

$$\Psi^{ik} = \Psi_0 g^{ik} + \Psi_{(d)}^{ik}, \quad \Psi_{(d)}^{ik} g_{ik} = 0, \quad \Psi_0 = \frac{1}{3} \Psi^{ik} g_{ik}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{3} \varepsilon_0 g_{ik} + \varepsilon_{ik(d)}, \quad \varepsilon_{ik(d)} g^{ik} = 0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ik} g^{ik}$$

$$\eta_{ik} = \frac{1}{3} \eta_0 g_{ik} + \eta_{ik(d)}, \quad \eta_{ik(d)} g^{ik} = 0, \quad \eta_0 = \eta_{ik} g^{ik}$$

С тем, что соблюсти преемственность с классической термодинамикой, в том числе и на визуальном уровне, выделим из суммы в (4.3) член $Tds = w_2 dv_{21}$.

С учетом этих представлений соотношениям (4.2) и (4.3) теперь придадим вид

$$\sigma_0 (\delta\varepsilon_0 - \delta\eta_0) + \sigma_{(d)}^{ik} (\delta\varepsilon_{ik(d)} - \delta\eta_{ik(d)}) + \Psi_0 \delta\eta_0 + \Psi_{(d)}^{ik} \delta\eta_{ik(d)} = \quad (4.9)$$

$$= d(u - v) - Tds + \sum_{j=1}^{p_1} w_{1j} dv_{1j} - \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j} dv_{2j}$$

$$\tau_0 \delta\eta_0 + \tau_{(d)}^{ik} \delta\eta_{ik(d)} + \delta q_e = dv + Tds + \sum_{j=2}^{p_2} w_{2j} dv_{2j} \quad (4.10)$$

Здесь из (4.2) исключен член δq_e , определенный из (4.3).

Пути использования той степени "свободы", которая появилась после введения функции ψ равенством (4.8), обсуждены и использованы в [3].

Отметим, что тензор τ^{ij} в общем случае может не совпадать с тензором полного напряжения σ^{ij} , что показано в [5].

Примем далее в качестве параметров процесса величины ε_{ij} , η_{ij} и эмпирическую температуру θ .

5. Трехпараметрическая система. В одномерном случае, приводимом в качестве простейшего примера, в качестве параметров процесса примем величины ε , η и θ . Тогда (4.2) и (4.3) примут вид

$$\sigma \delta\varepsilon + \delta q_e = du + w dv \quad (5.1)$$

$$\tau \delta\eta + \delta q_e = dv + T ds \quad (5.2)$$

Здесь интересен случай, когда процесс перехода механической энергии в тепловую настолько медленный (ползучесть), что за счет теплопроводности и рассеяния тепла во внешнюю среду температура в среде остается постоянной и число параметров сводится к двум: ε и η . Тогда (5.1) и (5.2) приводятся к виду

$$\delta u_{(i)} = \sigma \delta\varepsilon + \delta q_e = w_1(\varepsilon, \eta) dv_{1j}(\varepsilon, \eta) \neq du \quad (5.3)$$

$$\delta q = \tau \delta\eta + \delta q_e = T(\varepsilon, \eta) ds(\varepsilon, \eta) \quad (5.4)$$

где особо следует отметить форму соотношения (5.3).

Как видно, здесь четко выявлено то, что линейная дифференциальная форма для du не есть полный дифференциал даже в двухпараметрическом необратимом процессе.

Далее равенство (4.6) представим в виде

$$\delta q = C_\theta \delta\theta + C_\varepsilon^{ik} \delta\varepsilon_{ik} + C_\eta^{ik} \delta\eta_{ik} \quad (5.5)$$

где C_θ , C_ε^{ik} , C_η^{ik} – калорические коэффициенты, соответствующие выбору в качестве параметров процесса θ , ε_{ik} и η_{ik} . В случае выбора в качестве параметров процесса θ ,

σ^{ik} , η_{ik} вместо (5.2) положим

$$\delta q = D_\theta \delta \theta + D_\sigma^{ik} \delta \sigma_{ik} + D_\eta^{ik} \delta \eta_{ik} \quad (5.6)$$

где D_θ , D_σ^{ik} , D_η^{ik} – калорические параметры, соответствующие новому набору параметров процесса.

Используя (5.1), (5.2) и (5.5) для случая трехпараметрической системы, получаем

$$(\sigma + C_\epsilon) d\epsilon + (-\tau + C_\eta) d\eta + C_\theta d\theta = du + w_1 dv_1 \quad (5.7)$$

$$C_\epsilon d\epsilon + C_\eta d\eta + C_\theta d\theta = dv + T ds \quad (5.8)$$

В систему уравнений (5.7), (5.8) входят шесть характеристических функций: u , v , w_{11} , v_{11} , T и s . Однако в силу того, что C_ϵ , C_η и C_θ входят в оба уравнения, эти характеристики связаны тремя дифференциальными соотношениями и полностью независимыми из них остаются лишь три.

Далее считаем, что калорические коэффициенты C_j в (5.5) могут быть определены в калорических экспериментах.

При $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $dv = 0$ из (4.2) и (4.3) следуют те соотношения, которые соответствуют традиционным построениям термодинамических соотношений

$$\sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} - \tau^{ij} \delta \eta_{ij} + T ds = du \quad (5.9)$$

$$\tau^{ij} \delta \eta_{ij} + \delta q_{(e)} = T ds \quad (5.10)$$

Однако соотношения (5.9) и (5.10) справедливы лишь для двухпараметрических обратимых процессов и страдают неполнотой описания явлений, если их применять для описания многопараметрических необратимых процессов, так как в них содержится предположения о том, что внутренняя энергия есть полный дифференциал по отношению к приращениям параметров процесса, что верно лишь для обратимых процессов, а приращение тепла допускает интегрирующий множитель, что априори верно лишь для двухпараметрических систем.

В силу независимости приращений параметров процесса $d\epsilon$, $d\eta$, $d\theta$ из (5.7) и (5.8) следует, что

$$\sigma + C_\epsilon = \frac{\partial u}{\partial \epsilon} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \epsilon}, \quad -\tau + C_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \quad (5.11)$$

$$C_\theta = \partial u / \partial \theta + w_1 \partial v_1 / \partial \theta$$

а из (4.9) имеем

$$C_\epsilon = \frac{\partial v}{\partial \epsilon} + T \frac{\partial s}{\partial \epsilon}, \quad C_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta} + T \frac{\partial s}{\partial \eta}, \quad C_\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta} + T \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (5.12)$$

Стоящие в левых частях этих определяющих соотношений величины суть функции параметров процесса, подлежащие определению из экспериментов. Таким образом (5.11), (5.12) становятся системой дифференциальных уравнений относительно искомым функций u , v , w_1 , v_1 , T и s . С другой стороны, задание характеристических функций, u , v , w_1 , v_1 , T и s как функций параметров процесса, конечно, удовлетворяющих условиям связи между ними, которые следуют из (5.11), (5.12), уже описывают некоторый процесс необратимого деформирования среды.

6. Характеристические функции трехпараметрической системы. Системе дифференциальных уравнений (5.11) или (5.12) может быть поставлена в соответствие система обыкновенных дифференциальных уравнений [10], первые интегралы которой дают возможность определить характеристические функции как функции

параметров процесса, если считать известными левые части уравнений (5.11) и (5.12). Здесь нужно иметь в виду, что, хотя итоговыми искомыми являются функции, стоящие в левой части уравнений (5.11) и (5.12), но полное их определение в реальных условиях, как будет показано ниже, идет через отыскание характеристических функций при наложенных на них ограничениях. Эта, казалось бы, парадоксальная ситуация, находит свое разрешение в излагаемой ниже методике.

Обратимся к соотношениям (5.7), (5.8) в которых du и dv_{11} , как и dv и ds есть полные дифференциалы по отношению к приращениям параметров процесса. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sigma + C_\varepsilon - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(-\tau + C_\eta - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma + C_\varepsilon - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(C_\theta - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\tau + C_\eta - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C_\theta - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Одновременно в силу того, что dv_1 в (5.7) тоже полный дифференциал, согласно имеющим вид [4]:

$$\omega_i \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} \right) + \omega_j \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \right) + \omega_k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (6.2)$$

условиям приведения пфаффовых форм

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \omega_j(x_i) dx_j \quad (n \geq 3)$$

к интегрируемому виду, из (5.7) получим

$$c \left(\sigma + C_\varepsilon - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right) + b \left(-\tau + C_\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + a \left(C_\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (6.3)$$

$$a = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \eta} - \frac{\partial C_\eta}{\partial \varepsilon} \quad (6.4)$$

$$b = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial C_\theta}{\partial \varepsilon}, \quad c = -\frac{\partial \tau_1}{\partial \theta} + \frac{\partial C_\eta}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial \eta}$$

Представим уравнения (6.4) в виде

$$\frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon} = A, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon} = B \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = C, \quad A = -a, \quad B = b, \quad C = -c$$

Уравнение (6.3) запишем так

$$a \frac{\partial u}{\partial \theta} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + c \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = R \quad (6.6)$$

$$R = (\sigma + C_\varepsilon)c + (-\tau + C_\eta)b + C_\theta a$$

Если равенства (6.5) рассматривать как систему неоднородных линейных алгебраиче-

ских уравнений относительно $\partial w_1/\partial \varepsilon$, $\partial w_1/\partial \theta$ и $\partial w_1/\partial \eta$ или относительно $\partial v_1/\partial \varepsilon$, $\partial v_1/\partial \theta$ и $\partial v_1/\partial \eta$, то убеждаемся в том, что в обоих случаях определители этих систем уравнений равны нулю, т.е. решения их могут существовать при выполнении условия

$$a \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - b \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - c \frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{6.7}$$

при отыскании производных от v_1 и условия

$$a \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - b \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - c \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{6.8}$$

при отыскании производных от w_1 .

В соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений первого порядка [10] уравнению (6.6) соответствует система дифференциальных уравнений в обыкновенных производных

$$d\theta/a = d\eta/b = d\varepsilon/c = du/R \tag{6.9}$$

Уравнениям (6.7) и (6.8) соответствуют совпадающие по форме уравнения вида

$$d\theta/a = -d\eta/b = -d\varepsilon/c \tag{6.10}$$

Решения уравнения (6.10) применительных к (6.7) и (6.8) будут разными в силу различия начальных или краевых условий для функций w_1 и v_1 . Аналогично строятся уравнения для отыскания v , T и s .

Таким образом, задача отыскания характеристических функций u , v_1 , w_1 и v , T , s свелась к отысканию первых интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (6.9), (6.10). При этом стоящие в знаменателях функции должны быть определены из эксперимента, а решение этих уравнений должны удовлетворять заданным начальным условиям, соответствующим исходному состоянию среды.

7. К методам построения характеристических функций. Предположим, что с достаточной точностью на некотором "малом" $(n + 1)$ -м участке изменения параметров процесса θ , η и ε возможны их представления в виде

$$\theta_{n+1} = \theta_{n+1}^o + \bar{\theta}, \quad \eta_{n+1} = \eta_{n+1}^o + \bar{\eta}, \quad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^o + \bar{\varepsilon} \tag{7.1}$$

где $\bar{\theta}$, $\bar{\eta}$ и $\bar{\varepsilon}$ – новые переменные параметры процесса в пределах $|\bar{\theta}| \leq \Delta\theta$, $|\bar{\eta}| \leq \Delta\eta$, $|\bar{\varepsilon}| \leq \Delta\varepsilon$ при $\Delta\theta = \theta_{n+1}^o - \theta_n^o, \dots, \Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1}^o - \varepsilon_n^o$. Далее примем, что на этом малом участке функции a , b , c и R аппроксимируемыми формами

$$\begin{aligned} a &= (\alpha_\theta + \theta)(\alpha_\eta + \eta)(\alpha_\varepsilon + \varepsilon), & b &= (\beta_\theta + \theta)(\beta_\eta + \eta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon) \\ c &= (\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)(\gamma_\varepsilon + \varepsilon), & R &= (r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Очевидно, что аппроксимация функции R связана с аппроксимациями функций a , b , c , C_θ , C_η , C_ε .

Первые интегралы системы уравнений (6.9) будут результатом приравнивания решений уравнений

$$d\theta/a = du/R, \quad d\eta/b = du/R, \quad d\varepsilon/c = du/R \tag{7.3}$$

некоторым постоянным, а решение уравнения (6.6) будет произвольной дифференцируемой функцией этих "постоянных" или первых интегралов системы уравнений (7.3).

Таким образом, систему уравнений (7.3) представляем, например, в виде

$$\frac{du}{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)} = \frac{d\theta}{(\alpha_\theta + \theta)(\alpha_\eta + \eta)(\alpha_\varepsilon + \varepsilon)}$$

$$\frac{du}{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)} = \frac{d\eta}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\eta + \eta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon)} \quad (7.4)$$

$$\frac{du}{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)} = \frac{d\varepsilon}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)}$$

которые допускают разделение переменных

$$\begin{aligned} du &= \frac{(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(\alpha_\eta + \eta)(\alpha_\varepsilon + \varepsilon)} \frac{(r_\theta + \theta)d\theta}{(\alpha_\theta + \theta)} \\ du &= \frac{(r_\theta + \theta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon)} \frac{(r_\eta + \eta)d\eta}{(\beta_\eta + \eta)} \\ du &= \frac{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)} \frac{(r_\varepsilon + \varepsilon)d\varepsilon}{(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Первыми интегралами этой системы уравнений в силу независимости параметров η , ε и θ будут

$$\begin{aligned} u - \frac{(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(\alpha_\eta + \eta)(\alpha_\varepsilon + \varepsilon)} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(r_\theta + \theta)d\theta}{(\alpha_\theta + \theta)} &= C_1; \quad u - \frac{(r_\theta + \theta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon)} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{(r_\eta + \eta)d\eta}{(\beta_\eta + \eta)} = C_2 \\ u - \frac{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{(r_\varepsilon + \varepsilon)d\varepsilon}{(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)} &= C_3 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Вошедшие сюда интегралы относятся к числу табличных.

$$\int \frac{(r_\theta + \theta)d\theta}{\alpha_\theta + \theta} = J_1''(\theta_0, \theta); \quad \int \frac{(r_\eta + \eta)d\eta}{\beta_\eta + \eta} = J_2''(\eta_0, \eta); \quad \int \frac{(r_\varepsilon + \varepsilon)d\varepsilon}{\gamma_\varepsilon + \varepsilon} = J_3''(\varepsilon_0, \varepsilon) \quad (7.7)$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения в частных производных (6.6) есть произвольная функция

$$\Phi(C_1, C_2, C_3) = 0 \quad (7.8)$$

или функции левых частей равенств (7.6).

Считая функцию (7.8) разрешимой относительно функции u получим, что решение для u можно представить в виде произвольной дифференцируемой функции вида

$$u(\theta, \eta, \varepsilon) = F \left\{ \frac{(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)} J_1''(\theta); \frac{(r_\theta + \theta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon)} J_2''(\eta); \frac{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)} J_3''(\varepsilon) \right\} \quad (7.9)$$

где $J_1''(\theta)$, $J_2''(\eta)$ и $J_3''(\varepsilon)$ – табличные интегралы из равенств (7.7).

Так как на начальном участке интегрирования интегралы (7.7) должны обращаться в нули, то функцию (7.9) разложим в ряд по степеням ее аргументов, удерживая первые члены разложения:

$$\begin{aligned} u(\theta, \eta, \varepsilon) &= u_0 + A_u \frac{(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(r_\eta + \eta)(r_\varepsilon + \varepsilon)} J_1''(\theta) + B_u \frac{(r_\theta + \theta)(r_\varepsilon + \varepsilon)}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon)} J_2''(\eta) + \\ &+ C_u \frac{(r_\theta + \theta)(r_\eta + \eta)}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)} J_3''(\varepsilon) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Вопрос об определении постоянных в этих представлениях сводится к рассмотрению начальных данных для выделенного малого участка изучаемого процесса.

Аналогично поступаем при интегрировании уравнений (6.7) и (6.8), которым соответствуют совпадающие уравнения (6.10). Функции a, b, c аппроксимируются выражениями (7.2); далее ищем первые интегралы уравнений

$$d\varepsilon/c = -d\theta/a, \quad d\varepsilon/c = d\eta/b \quad (7.11)$$

которые представим в виде

$$\frac{d\varepsilon}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)} = -\frac{d\theta}{(\alpha_\theta + \theta)(\alpha_\eta + \eta)(\alpha_\varepsilon + \varepsilon)}$$

$$\frac{d\varepsilon}{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)} = \frac{d\eta}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\eta + \eta)(\beta_\varepsilon + \varepsilon)} \quad (7.12)$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{(\alpha_\varepsilon + \varepsilon)}{(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)} d\varepsilon = -\frac{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)}{(\alpha_\theta + \theta)(\alpha_\eta + \eta)} d\theta, \quad \frac{(\beta_\varepsilon + \varepsilon)}{(\gamma_\varepsilon + \varepsilon)} d\varepsilon = \frac{(\gamma_\theta + \theta)(\gamma_\eta + \eta)}{(\beta_\theta + \theta)(\beta_\eta + \eta)} d\eta \quad (7.13)$$

Первыми интегралами уравнений (7.13) являются функции

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\alpha_\varepsilon + \varepsilon}{\gamma_\varepsilon + \varepsilon} d\varepsilon = -\frac{\gamma_\eta + \eta}{\alpha_\eta + \eta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\gamma_\theta + \theta)}{(\alpha_\theta + \theta)} d\theta + C_1,$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\beta_\varepsilon + \varepsilon}{\gamma_\varepsilon + \varepsilon} d\varepsilon = \frac{\gamma_\theta + \theta}{\beta_\theta + \theta} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{(\gamma_\eta + \eta)}{(\beta_\eta + \eta)} d\eta + C_2 \quad (7.14)$$

Введем обозначения табличных интегралов

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\alpha_\varepsilon + \varepsilon}{\gamma_\varepsilon + \varepsilon} d\varepsilon = J_1^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon), \quad \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\beta_\varepsilon + \varepsilon}{\gamma_\varepsilon + \varepsilon} d\varepsilon = J_2^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\gamma_\theta + \theta}{\alpha_\theta + \theta} d\theta = J_3^\varepsilon(\theta_0, \theta), \quad \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\gamma_\eta + \eta}{\beta_\eta + \eta} d\eta = J_4^\varepsilon(\eta_0, \eta)$$

С учетом обозначений для табличных интегралов первые интегралы уравнений (7.14) записываются так

$$J_1^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon) + \frac{\gamma_\eta + \eta}{\alpha_\eta + \eta} J_3^\varepsilon(\theta_0, \theta) = C_1; \quad J_2^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon) + \frac{\gamma_\theta + \theta}{\beta_\theta + \theta} J_4^\varepsilon(\eta_0, \eta) = C_2 \quad (7.15)$$

Решение для функции v_1 с учетом (7.15) имеет вид

$$v_1 = \Phi_v(C_1, C_2) \quad (7.16)$$

или с учетом первых интегралов

$$v_1 = \Phi_v \left\{ J_1^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon) + \frac{\gamma_\eta + \eta}{\alpha_\eta + \eta} J_3^\varepsilon(\theta_0, \theta); \quad J_2^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon) - \frac{\gamma_\theta + \theta}{\beta_\theta + \theta} J_4^\varepsilon(\eta_0, \eta) \right\} \quad (7.17)$$

Для w_1 имеем аналогично

$$w_1 = \Phi_w(C_1, C_2) \quad (7.18)$$

или

$$w_1 = \Phi_w \left\{ J_1^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon) + \frac{\gamma_\eta + \eta}{\alpha_\eta + \eta} J_3^\varepsilon(\theta_0, \theta); \quad J_2^\varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon) - \frac{\gamma_\theta + \theta}{\beta_\theta + \theta} J_4^\varepsilon(\eta_0, \eta) \right\} \quad (7.19)$$

Аналогично (7.10) на начальном участке интегрирования функции (7.17) и (7.19) разложим в ряд по степеням их аргументов, удерживая первые члены разложения

$$v_1(\theta, \eta, \varepsilon) = (v_1)_0 + A_v \left[J_1^\varepsilon(\varepsilon) + \frac{\gamma_\eta + \eta}{\alpha_\eta + \eta} J_3^\varepsilon(\theta) \right] + B_v \left[J_2^\varepsilon(\varepsilon) - \frac{\gamma_\theta + \theta}{\beta_\theta + \theta} J_4^\varepsilon(\eta) \right] \quad (7.20)$$

$$w_1(\theta, \eta, \varepsilon) = (w_1)_0 + A_w \left[J_1^\varepsilon(\varepsilon) + \frac{\gamma_\eta + \eta}{\alpha_\eta + \eta} J_3^\varepsilon(\theta) \right] + B_w \left[J_2^\varepsilon(\varepsilon) - \frac{\gamma_\theta + \theta}{\beta_\theta + \theta} J_4^\varepsilon(\eta) \right] \quad (7.21)$$

Остается решить вопрос определения постоянных разложений (7.10), (7.20), (7.21), для которых задача сводится к рассмотрению начальных данных для конкретного процесса. Аналогично строятся решения для v , T и s .

8. Связи между калорическими коэффициентами. Калорические коэффициенты, введенные равенствами (5.5) и (5.6) между собою связаны соотношениями, подобными тем, которые связывают между собой, например, коэффициенты теплоемкости c_p и c_v для идеальных газов. Если в качестве параметров процесса избраны p , θ и ξ , то согласно определяющим соотношениям (аналогам уравнений состояния в классической термодинамике для газов) ε_v есть функция этих параметров и тогда

$$d\varepsilon_v = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p} dp + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \xi} d\xi \quad (8.1)$$

Следовательно, согласно (5.5) и (5.6)

$$dq = C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p} dp + \left(C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \theta} + C_\theta \right) d\theta + \left(C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \xi} + C_\xi \right) d\xi = D_p dp + D_\theta d\theta + D_\xi d\xi$$

Отсюда следуют искомые зависимости

$$D_p = C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial p}, \quad D_\theta = C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \theta} + C_\theta, \quad D_\xi = C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \xi} + C_\xi \quad (8.2)$$

Аналогично, если в качестве параметров процесса избраны ε , θ и ξ , из уравнений состояния следующих из (4.9), (4.10), получим p как функцию этих параметров и по аналогии с получением равенств (8.2) сможем записать

$$C_\varepsilon = D_p \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad C_\theta = D_p \frac{\partial p}{\partial \theta} + D_\theta, \quad C_\xi = D_p \frac{\partial p}{\partial \xi} + D_\xi \quad (8.3)$$

Соотношения (8.2) и (8.3) для трехпараметрического процесса обобщают имеющиеся в литературе связи между коэффициентами теплоемкостей c_p и c_v , для идеальных газов как двухпараметрических систем.

Приведенные примеры для трехпараметрических систем дают ключ к решению проблем и для случаев $n > 3$. См., например, [3].

9. Заключение. Введенные в рассмотрение Гиббсом химические потенциалы, позволившие расширить круг применимости соотношений (1.1), не решают принципиального вопроса о представимости термодинамических потенциалов в виде (1.1). Кроме того широко используемого предположения о представимости необратимого процесса в виде последовательного прохождения равновесия или обратимых состояний не вызывает чувства уверенности в справедливости этого тезиса в общем случае, что и доказано выше.

Если для изучаемых явлений существенна кинетическая энергия частиц (гидродинамика вязких сред, газовая динамика и т.п.), то в выражении для приращения внутренней энергии следует сохранить члены, описывающие кинетическую энергию частиц при соответствующем расширении числа независимых параметров процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00410 и АН Татарстана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терегулов И.Г.* Термодинамика необратимых процессов и теоретические основы построения определяющих соотношений для сплошных сред // Изв. ВУЗов. Математика. 1995. № 4. С. 82–95.
2. *Терегулов И.Г.* Термодинамика необратимых процессов и теоретические основы построения определяющих соотношений для сплошных сред // Докл. АН. 1996. Т. 347. № 1. С. 36–39.
3. *Терегулов И.Г.* Термодинамические потенциалы и математическое моделирование процесса течения вязких сред // Изв. ВУЗов. Математика. 1997. № 11. С. 72–80.
4. *Вакуленко А.А.* Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Мех. деф.-тв. тела. 1991. Т. 22. С. 3–54.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. I. М.: Наука, 1970. 492 с. Т. II. 586 с.
6. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 247 с.
7. *Планк М.* Термодинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1925. 492 с.
8. *Гиббс Д.В.* Термодинамические работы. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 492 с.
9. *Терегулов И.Г.* Критерий прочности ортотропного тела и его связь с процессом накопления микрповреждений. Прикладные проблемы прочности и пластичности // Анализ и оптимизация конструкций. 1994. Вып. 1. С. 32–39.
10. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 448 с.
11. *Гольденблат И.И.* Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М.: Гостехиздат, 1955. 271 с.
12. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 127 с.

Казань

Поступила в редакцию
5.05.1999