

УДК 531.8

© 2000 г. В.В. АНДРОНОВ

**ОБ ОДНОМ ТИПЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ
С СУХИМ ТРЕНИЕМ И УДАРАМИ
(К ДИНАМИКЕ "ПРЫГАЮЩЕГО" СТЕРЖНЯ)**

Рассматривается механическая система, состоящая из прямолинейного стержня с кольцом на конце, продетым на круглую наклонную направляющую. Сочленение осуществляется с некоторым зазором, так что стержень может скользить вдоль направляющей с трением. Уже простые опыты с системой показывают, что существующая в ней тенденция к скольжению под действием силы тяжести при определенных условиях проявляется не в виде непрерывного скольжения, а скачкообразно ("прыжками"), когда промежутки движения чередуются с остановками.

Показано, что возникновение таких автоколебаний обусловлено особенностями ударного взаимодействия стержня с направляющей, которое в моменты образования двухточечного контакта может заканчиваться практически мгновенной остановкой скольжения и одновременно сменой направления вращения. Рассматривая остановку скольжения как результат мгновенного наложения идеальной связи и используя уравнения движения стержня в промежутках между ударами, задачу изучения автоколебаний удастся свести к изучению точечного отображения полупрямой в себя и тем самым довести до конца. Характерно, что данный тип автоколебаний не связан с какими-то особенностями характеристики трения в сочленении, а существует при обычном кулоновском сухом трении.

1. Указанная система ("прыгающий" стержень, фиг. 1, а) имеет самостоятельное значение, но может служить также упрощенной моделью технических устройств, содержащих твердое тело с наложенной связью в виде муфты или ползуна в направляющих скольжения (фиг. 1, в, с).

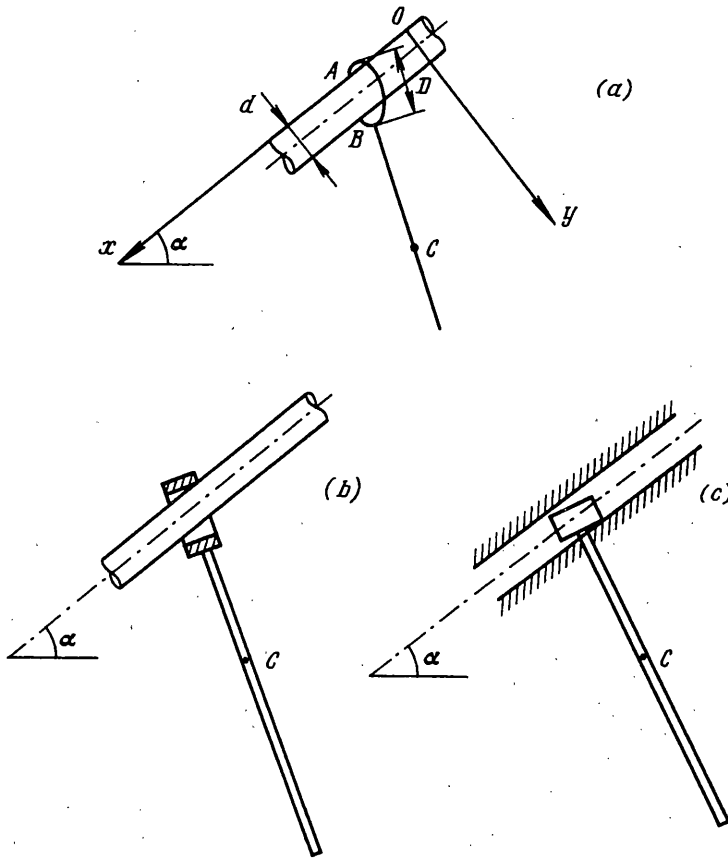
Пусть система находится в поле силы тяжести, а направляющая наклонена к горизонту под углом α ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$) и неподвижна; между кольцом и направляющей имеется сухое кулоново трение скольжения с коэффициентом f .

Будем рассматривать плоское движение стержня в вертикальной плоскости Oxy (фиг. 2). Движение подчинено двум неудерживающим связям: $u_A \leq D - d$ и $u_B \geq d$, где D – диаметр кольца, d – диаметр поперечного сечения направляющей. В процессе движения возможны выходы системы как на одну из связей, так и на обе связи одновременно. Последний случай, которому соответствуют штриховые линии на фиг. 2, определяет ограничения

$$0 \leq \varphi \leq 2\beta, \quad \beta = \arccos(d/D) \quad (1.1)$$

на угловую координату стержня φ (угол φ отсчитывается от нижнего крайнего положения стержня против движения часовой стрелки). В общем случае каждый выход на связь означает удар стержня о шероховатую направляющую.

В системе существует множество различных типов движения, отличающихся типом удара, а также характером движения стержня в промежутках между ударами, которым может быть либо скольжение (с контактом стержня и направляющей в одной



Фиг. 1

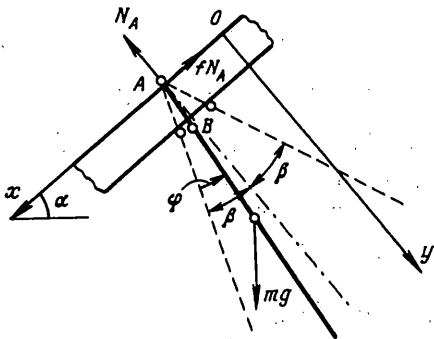
точке, одновременно в двух точках), либо свободное движение в поле силы тяжести (в пределах зазора $D - d$). В связи с этим детальное исследование движения при общих начальных условиях не представляется возможным. Далее ограничимся изучением установившегося автоколебательного движения, существование которого и является наиболее интересным свойством данной системы.

Будем рассматривать случай, когда движение складывается из промежутков безударного движения, в течение которых стержень скользит своей верхней точкой A по направляющей и одновременно вращается вокруг этой точки, и упругих ударов точкой B о направляющую в моменты замыкания зазора, когда стержень касается направляющей также своей точкой B . Удар при $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} < 0$ будем называть ударом о передний ограничитель, при $\varphi = 2\beta$, $\dot{\varphi} > 0$ – ударом о задний ограничитель.

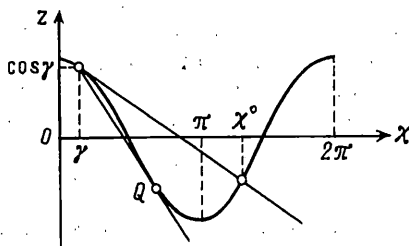
Пусть после удара о передний ограничитель стержень скользит вниз и вращается. Тогда справедливы следующие дифференциальные уравнения движения (см. фиг. 2):

$$\begin{aligned}
 m[s + h \sin(\beta - \varphi)]'' &= mg \sin \alpha - fN_A \\
 m[h \cos(\beta - \varphi)]'' &= mg \cos \alpha - N_A \\
 J\ddot{\varphi} &= hN_A [\sin(\beta - \varphi) - f \cos(\beta - \varphi)]
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где m – масса стержня, J – его центральный момент инерции, h – расстояние до центра масс C , N_A – нормальная реакция направляющей, $s = x_A$. Далее будем считать угол φ



Фиг. 2



Фиг. 3

малым ($\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$) и рассматривать вместо (1.2) следующие линеаризованные уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = r, \quad \ddot{s} - h_* \ddot{\varphi} = g_* \quad (1.3)$$

$$h_* = h(\cos \beta + f \sin \beta), \quad g_* = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (1.4)$$

$$\omega_0^2 = mgh_* \cos \alpha [J + mh^2 \sin \beta (\sin \beta - f \cos \beta)]^{-1}$$

$$r = mgh \cos \alpha (\sin \beta - f \cos \beta) [J + mh^2 \sin \beta (\sin \beta - f \cos \beta)]^{-1}$$

Для уравнений (1.3) может быть выписано общее решение:

$$\varphi = a \sin(\omega_0 t + \gamma) + r / \omega_0^2$$

$$s = C_1 + C_2 t + \frac{1}{2} g_* t^2 + ah_* \sin(\omega_0 t + \gamma) \quad (1.5)$$

где a , γ , C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

При начальных условиях ($t = 0$):

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_+ \quad (\omega_+ > 0), \quad s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0 \quad (1.6)$$

при помощи (1.5) получаем уравнения движения стержня:

$$\varphi = r / \omega_0^2 + \omega_0^{-2} \sqrt{r^2 + \omega_+^2 \omega_0^2} \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0^{-1} \sqrt{r^2 + \omega_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_0 t + \gamma) \quad (1.7)$$

$$s = h_* r \omega_0^{-2} - h_* \omega_+ t + \frac{1}{2} g_* t^2 + h_* \omega_0^{-2} \sqrt{r^2 + \omega_+^2 \omega_0^2} \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\dot{s} = -h_* \omega_+ + g_* t + h_* \omega_0^{-1} \sqrt{r^2 + \omega_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_0 t + \gamma) \quad (1.8)$$

$$\sin \gamma = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + \omega_+^2 \omega_0^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{\omega_+ \omega_0}{\sqrt{r^2 + \omega_+^2 \omega_0^2}} \quad (1.9)$$

Полученные уравнения справедливы до тех пор, пока не прекратится скольжение либо не произойдет удар о задний ограничитель.

Для определения момента остановки скольжения $t = t^0$, полагая во втором уравнении (1.8) $\dot{s} = 0$ и вводя обозначения

$$\lambda = \frac{\omega_+}{\omega_0}, \quad \sigma = \frac{r}{\omega_0^2}, \quad \vartheta = \frac{g_*}{h_* \omega_0^2 \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}}, \quad \chi = \omega_0 t + \gamma \quad (1.10)$$

получаем уравнение

$$\cos \chi = \cos \gamma - \vartheta(\chi - \gamma) \quad (1.11)$$

На фиг. 3 показано графическое построение решения этого уравнения $\chi = \chi^\circ$. В точке Q касания кривых – косинусоиды $z_1 = \cos \chi$ и прямой $z_2 = \cos \gamma - \vartheta(\chi - \gamma)$, определяющей границу движений с остановками скольжения, справедливы соотношения $\cos \chi = \cos \gamma - \vartheta(\chi - \gamma)$, $\sin \chi = \vartheta$. Отсюда для значений χ , соответствующих границе движений с остановками скольжения, получаем квадратное уравнение и находим

$$\chi_{1,2} = \gamma + \vartheta^{-1}(\cos \gamma \pm \sqrt{1 - \vartheta^2})$$

Видно, что движения с остановками существуют, лишь если

$$\vartheta \leq 1 \quad (1.12)$$

При $\vartheta > 1$ или, что то же самое, при

$$\lambda^2 < \left(\frac{g_*}{h_* \omega_0^2} \right)^2 - \sigma^2 \quad (1.13)$$

движение стержня происходит без остановок скольжения, и уравнения (1.7)–(1.9) справедливы на всем этапе безударного движения.

Выясним теперь условия существования удара о задний ограничитель (при выполнении неравенства (1.13), обеспечивающего отсутствие остановок на этапе скольжения). С этой целью при помощи (1.7) составляем уравнение $\dot{\varphi} = 0$ и определяем значение угла отклонения в этот момент

$$\varphi \Big|_{\dot{\varphi}=0} = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2} \quad (1.14)$$

Из (1.14) и условия $\varphi \Big|_{\dot{\varphi}=0} < 2\beta$ получаем соотношение

$$\lambda^2 < 4\beta(\beta - \sigma) \quad (1.15)$$

при выполнении которого удара о задний ограничитель не происходит. (Здесь не учитывается эффект "затягивания" движений с ударами об оба ограничителя, который может присутствовать в системе.)

Пусть выполняются оба условия (1.13), (1.15). Тогда стержень будет ударяться только о передний ограничитель ($\varphi = 0$), а в промежутках между ударами – колебаться и безостановочно скользить вниз вдоль направляющей в соответствии с уравнениями (1.7)–(1.9). Начав двигаться с начальными условиями (1.6) при $t = 0$, в момент $t = t_1$ стержень возвращается в исходное положение, имея угловую скорость $\dot{\varphi} = -\omega_+$. Решая уравнения

$$0 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2} \sin(\omega_0 t_1 + \gamma), \quad -\lambda = \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2} \cos(\omega_0 t_1 + \gamma) \quad (1.16)$$

для безразмерного момента $\omega_0 t_1$ получаем следующие формулы

$$\omega_0 t_1 = \begin{cases} \arcsin\left(-\frac{2\sigma\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2}\right) & \text{при } \sigma < 0, \quad 0 < \lambda < -\sigma \\ \pi + \arcsin\frac{2\sigma\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2} & \text{при } \sigma < 0, \quad \lambda > -\sigma \text{ и при } \sigma > 0, \quad \lambda > \sigma \\ 2\pi - \arcsin\frac{2\sigma\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2} & \text{при } \sigma > 0, \quad 0 < \lambda < \sigma \end{cases} \quad (1.17)$$

2. В момент t_1 происходит повторный удар (о передний ограничитель), после чего цикл безударного движения повторяется (в общем случае с другими характери-

ками). Если бы точка A была неподвижна, то движение стержня было бы затухающими колебаниями с соударениями. Существование автоколебаний в системе свидетельствует о том, что в процессе удара происходят не только потери энергии, но осуществляется также приток энергии в колебательную степень свободы. Ее источником служит кинетическая энергия в поступательной степени свободы, которая периодически пополняется (при $\operatorname{tg} \alpha > f$) на этапах безударного движения.

Рассмотрение задачи об ударном взаимодействии при двухточечном контакте стержня с направляющей в рамках стереомеханической теории удара наталкивается на принципиальные трудности, аналогичные возникновению парадоксов Пэнлеве [1, 2]. Для их преодоления следует либо отказаться от модели мгновенного удара (например, вводя в рассмотрение деформируемые элементы [2]), либо принять подходящую дополнительную гипотезу. Воспользуемся здесь второй возможностью и, следуя Прандтлю, примем гипотезу о мгновенной остановке скольжения, высказанную им в ходе дискуссии по поводу парадоксов Пэнлеве [1]. Будем считать, что в области существования парадоксов Пэнлеве ударное взаимодействие складывается из следующих последовательных трех фаз: (1) мгновенной остановки скольжения; (2) упругой деформации контакта в точке B при неподвижной точке A ; (3) частичного обращения этой деформации, в результате которого угловая скорость стержня восстанавливается с некоторым коэффициентом R ($0 \leq R \leq 1$).

В первой фазе удара происходит мгновенное изменение скорости скольжения \dot{s} от значения в конце этапа скольжения, равного $\dot{s}(t_1)$, до нуля, что и учитывается выбором начальных условий в виде (1.6). При этом плоскопараллельное движение стержня мгновенно переходит во вращение вокруг точки A с угловой скоростью

$$\omega_* = \omega_+ + m(J + mh^2)^{-1} \dot{s}(t_1) h \cos \beta \quad (2.1)$$

где $\omega_+ = \dot{\varphi}(0) = -\dot{\varphi}(t_1)$ и $\dot{s}(t_1)$ определяются согласно формулам (1.7)–(1.9), (1.17). Значение (2.1) получается в результате расчета удара от мгновенной остановки точки A , которая рассматривается как следствие мгновенного наложения в этой точке идеальной шарнирной связи. В течение второй и третьей фаз меняется только угловая скорость, изменяясь мгновенным скачком от значения $\dot{\varphi} = -\omega_*$ к значению $\dot{\varphi} = \bar{\omega}_+$ согласно формуле

$$\bar{\omega}_+ = R\omega_* \quad (0 \leq R \leq 1) \quad (2.2)$$

Зависимости (2.1), (2.2) позволяют замкнуть цикл движения, то есть найти угловую скорость стержня после повторного удара ($\bar{\omega}_+$) по ее значению после начального удара (ω_+). Соответствующая связь получается после подстановки в (2.2) значений ω_* и $\dot{s}(t_1)$ согласно равенствам (2.1), (1.8), (1.10), (1.16) и имеет следующий вид

$$\bar{\omega}_+ = R \left[\left(1 - \frac{2mhh_* \cos \beta}{J + mh^2} \right) \omega_+ + \frac{mg_* h \cos \beta}{J + mh^2} t_1 \right] \quad (2.3)$$

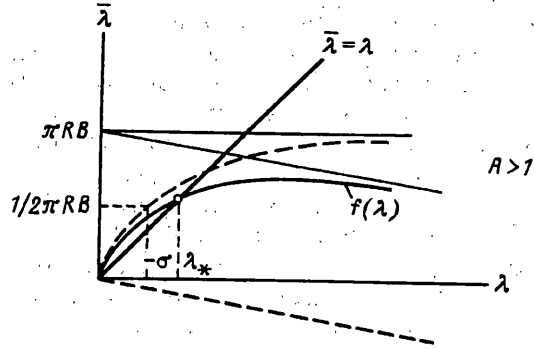
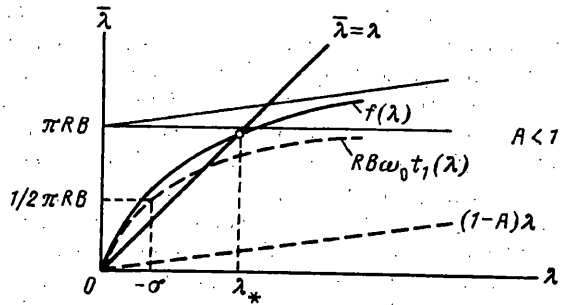
Здесь t_1 зависит от $\omega_+ = \lambda \omega_0$ согласно равенствам (1.17), из которых, в зависимости от значения параметра σ , выбирается то или иное.

Соотношение (2.3) определяет в плоскости фазовых переменных φ , $\dot{\varphi}$ точечное отображение полупрямой $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} > 0$ в себя. Автоколебаниям соответствует неподвижная точка преобразования, определяемая из (2.3) после подстановки $\bar{\omega}_+ = \omega_+$.

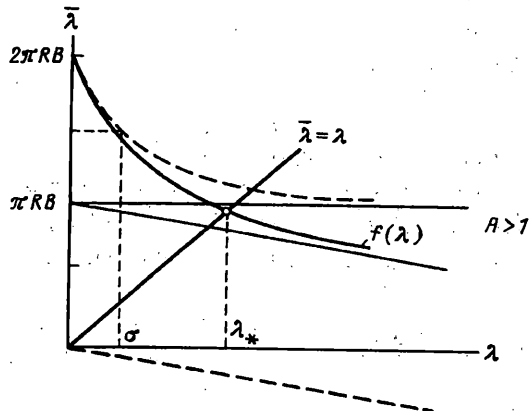
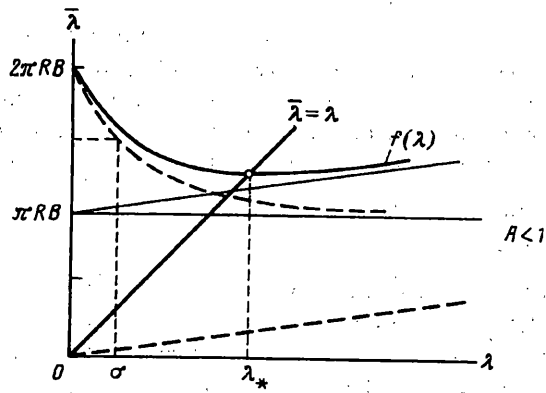
Введем обозначения

$$A = \frac{2mhh_* \cos \beta}{J + mh^2}, \quad B = \frac{mg_* h \cos \beta}{\omega_0^2 (J + mh^2)} \quad (2.4)$$

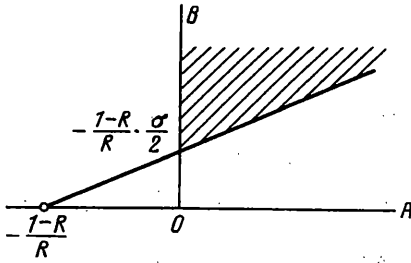
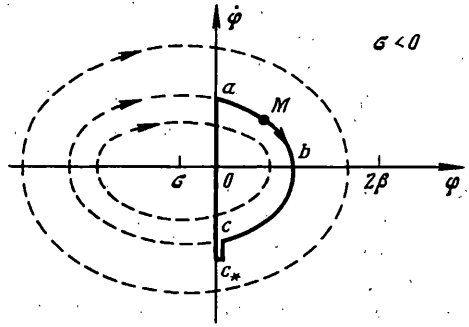
и запишем (2.3) в переменных $\lambda = \omega_+ / \omega_0$, $\bar{\lambda} = \bar{\omega}_+ / \omega_0$ в следующем виде, удобном



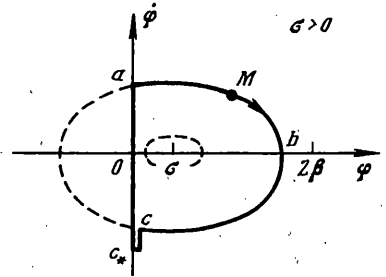
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

для непосредственного использования результатов метода точечных отображений [3]:

$$\bar{\lambda} = f(\lambda), \quad f(\lambda) = R[(1-A)\lambda + B\omega_0 t_1(\lambda)] \quad (2.5)$$

Тогда неподвижная точка отображения $\lambda = \lambda_*$ определяется в плоскости $(\lambda, \bar{\lambda})$ как абсцисса общей точки прямой $\bar{\lambda} = \lambda$ и графика функции последования $\bar{\lambda} = f(\lambda)$. Соответствующие построения приведены на фиг. 4 (для случая $\sigma < 0$) и на фиг. 5 (для $\sigma > 0$).

При $\sigma < 0$ с ростом λ производная $df(\lambda)/d\lambda$ монотонно убывает, поэтому автоколебания существуют, лишь если $df/d\lambda(0) > 1$. Отсюда приходим к условию

$$B > -\frac{\sigma}{2} \left(A + \frac{1-R}{R} \right) \quad (2.6)$$

определяющему на плоскости параметров (A, B) область существования автоколебаний в этом случае. Она показана на фиг. 6, где выделена штриховкой. При $\sigma > 0$, как это видно из фиг. 5, автоколебания существуют при любых A, B . Во всех случаях автоколебания устойчивы, если производная $df/d\lambda$, вычисленная в неподвижной точке преобразования $\lambda = \lambda_*$, по модулю меньше единицы.

На фиг. 7 изображен общий вид соответствующего предельного цикла. Участок abc предельного цикла является куском эллипса с центром в точке $(0, \sigma)$, который пробегается изображающей точкой $M(\varphi, \dot{\varphi})$ в направлении движения часовой стрелки. После прихода изображающей точки в положение $c(0, -\omega_*)$ угловая скорость скачком изменяется до значения $\dot{\varphi} = -\omega_*$ (точка c_*), что соответствует мгновенному переходу части кинетической энергии поступательного движения во вращательное в начальной фазе ударного взаимодействия (при мгновенной остановке скольжения). Далее следует замыкающий цикл мгновенный скачок изображающей точки из положения $c_*(0, -\omega_*)$ в положение $a(0, \omega_*)$ в соответствии с равенством (2.2), в котором

следует положить $\bar{\omega}_+ = \omega_+$. Штриховыми линиями показаны фазовые траектории при отсутствии соударений.

Поскольку удар происходит мгновенно, период автоколебаний T совпадает с временем прохождения изображающей точкой участка abc предельного цикла и определяется по одной из формул (1.17), в которой следует положить $\lambda = \lambda_*$, $t_1 = T$.

Наряду с автоколебаниями в данной системе осуществляется также систематическое равномерное в среднем движение стержня вдоль направляющей, что роднит ее с системами виброперемещения [4]. Средняя скорость такого автоколебательного "виброперемещения" может быть рассчитана по формуле $V = \dot{s}(T)/T$, где T – период автоколебаний.

Отметим в заключение, что описанное устройство легко осуществить в натуре, например, при помощи карандаша (направляющая) и выпрямленной канцелярской скрепки (стержень) и наблюдать на практике изученное здесь движение. Сходный механизм возбуждения автоколебаний используется, например, в немецкой игрушке "дятел" (Spielzeug Specht) [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Междунар. программа образования, 1997. 336 с.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
4. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
5. Glocker CH., Pfeiffer F. Multiple impacts with friction in rigid multibody systems // Nonlinear Dynam. 1995. V. 7. № 4. P. 471–497.

Москва

Поступила в редакцию
27.08.1998