

УДК 531.36:534.015

© 2000 г. Л.Д. АКУЛЕНКО

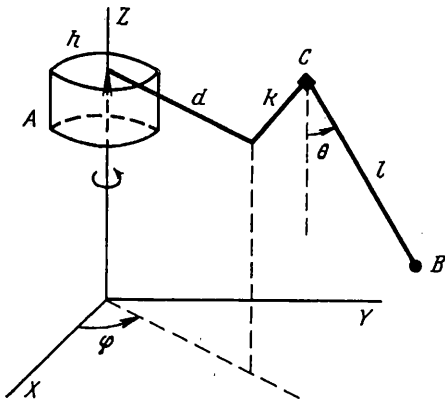
## КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С ВЕРТИКАЛЬНО ВИБРИРУЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ

Методами теории возмущений исследуются квазистационарные движения вращательно-колебательной двухмассовой системы, моделирующей в более полной постановке динамику сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса. Система содержит вращающееся вокруг вертикальной оси твердое тело и прикрепленный к нему маятник, совершающий относительно плоские вращательно-колебательные движения. Установлено, что маятник имеет от двух до четырех состояний относительного равновесия; исследована их устойчивость по Ляпунову. Построены соответствующие этим состояниям квазистационарные режимы колебаний. Получены усредненные уравнения, описывающие переходные процессы в окрестности стационарных состояний. Изучен режим относительных вращательных движений маятника, близких к равномерным вращениям. Обнаружены и прокомментированы интересные механические эффекты.

**1. Постановка задачи.** Исследуются вращательно-колебательные движения двухмассовой механической системы, схематически представленной на фиг. 1. Система содержит твердое тело  $A$  и присоединенный к нему посредством цилиндрического шарнира  $C$  маятник  $B$ . Тело  $A$  может свободно вращаться вокруг фиксированной в нем оси, совпадающей с осью  $Z$  инерциальной системы координат  $XYZ$ ; ось  $Z$  направлена против вектора сил тяготения  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$ . Кроме того, тело может перемещаться вдоль указанной оси заданным образом:  $Z_A = h(t)$ . Для упрощения постановки задачи предполагается, что ось фиксированного в теле цилиндрического шарнира  $C$  лежит в плоскости, ортогональной оси  $Z$ , т.е. параллельной плоскости  $XY$ , причем ее ориентация и положение точки шарнира произвольны. Считается также, что маятник близок к математическому и его центральными моментами инерции можно пренебречь. Свойства механической системы прояснятся из дальнейших построений математической модели при выводе уравнений движения в форме Лагранжа.

Состояние тела  $A$  характеризуется указанной выше координатой  $h = h(t)$  и углом поворота  $\varphi$  вокруг оси  $Z$ . Параметры, определяющие характеристики маятника  $B$ , удобно ввести следующим образом. В плоскости, содержащей ось шарнира  $C$  и перпендикулярной оси  $Z$ , проведем две взаимно ортогональные прямые. Одна из них совпадает с осью шарнира, а другая проходит через точку пересечения плоскости с осью  $Z$ . Расстояние от точки крепления маятника до точки пересечения этих прямых обозначим через  $k$ ; аналогично – от точки пересечения оси  $Z$  с плоскостью через  $d$ , см. фиг. 1. Пусть  $l$  – длина маятника,  $m$  – масса; тогда декартовы координаты точки  $B$ , где эта масса сосредоточена, определяются выражениями

$$\begin{aligned}x &= (d + l \sin \theta) \cos \varphi - k \sin \varphi, & 0 \leq \theta, & \varphi < 2\pi \pmod{2\pi} \\y &= (d + l \sin \theta) \sin \varphi + k \cos \varphi, & z &= h(t) - l \cos \theta\end{aligned}\tag{1.1}$$



Фиг. 1

Здесь  $\theta$  – угловая переменная, отсчитываемая от вертикали;  $h(t)$  – заданная достаточно гладкая функция времени  $t$ . Из (1.1) следует, что во вращающейся вместе с телом (штрихованной) системе координаты точки  $B$  равны  $x' = d + l \sin \theta$ ,  $y' = k$ ,  $z' = z$ .

С целью вывода уравнений движения в форме Лагранжа вычислим кинетическую  $K$  и потенциальную  $\Pi$  энергию системы. Для тела  $A$  эти величины определяются элементарно

$$\begin{aligned} K_A &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{h}^2, \\ \Pi_A &= Mgh, \quad h = h(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $M$  – масса тела  $A$ ,  $I$  – его момент инерции относительно оси  $Z$ ; точкой обозначено дифференцирование по  $t$ .

Стандартным образом получаются выражения для  $K_B$ ,  $\Pi_B$ :

$$K_B = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2(\theta) \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\theta}(\dot{h} \sin \theta - k\dot{\varphi} \cos \theta) + \dot{h}^2) \quad (1.3)$$

$$\Pi_B(\theta) = mg(h - l \cos \theta), \quad \rho^2(\theta) \equiv (d + l \sin \theta)^2 + k^2$$

Из вида функции Лагранжа системы  $L = L_A + L_B$ ,  $L_{A,B} = K_{A,B} - \Pi_{A,B}$  следует с учетом выражений (1.2), (1.3), что  $\varphi$  – циклическая угловая координата, т.е. имеет место интеграл движения ("интеграл площадей"):

$$c = \partial L / \partial \dot{\varphi} = J(\theta) \dot{\varphi} - mkl \dot{\theta} \cos \theta, \quad J(\theta) \equiv I + m\rho^2(\theta) \quad (1.4)$$

Величина  $J(\theta)$  имеет смысл "мгновенного момента инерции" системы относительно оси  $Z$ . Уравнение движения (для  $\varphi$ ) получается дифференцированием (1.4) по  $t$ . С учетом интеграла движения (1.4) уравнение для  $\theta$  приводится к виду, не содержащему  $\varphi$ :

$$\ddot{\theta} + F(\theta) \dot{\theta}^2 + D(\theta, c^2, \omega^2) + H(\theta) \ddot{h} / l = 0 \quad (1.5)$$

$$F(\theta) = \frac{1}{2} (mk^2 \cos \theta / J^*(\theta)) [2 \sin \theta + J'(\theta) \cos \theta / J(\theta)]$$

$$D(\theta, c^2, \omega^2) = (J(\theta) / J^*(\theta)) [\omega^2 \sin \theta - \frac{1}{2} c^2 J'(\theta) / (J^2(\theta) ml^2)]$$

$$H(\theta) = (J(\theta) / J^*(\theta)) \sin \theta, \quad J^*(\theta) = J(\theta) - k^2 \cos^2 \theta, \quad \omega^2 = g/l$$

Из (1.5) следует, что "эквивалентная длина маятника"  $l^* = J^*/J$ .

Исследуем кратко поведение коэффициентов  $F, D, H$  уравнения (1.5) как функций переменной  $\theta$  и параметров  $m, l, d, k, I, \omega^2, c^2$ . Они зависят, в основном, от изменения  $J(\theta), J^*(\theta)$ ; элементарно устанавливается, что

$$0 < J_{\min} \leq J(\theta) \leq J_{\max} < \infty, \quad 0 < J_{\min}^* \leq J^*(\theta) \leq J_{\max}^* < \infty$$

$$J_{\max} = J_{\max}^* = I + m[(d+l)^2 + k^2], \quad J_{\min} \geq J_{\min}^*$$

$$J_{\min} = I + mk^2, \quad d \leq l; \quad I + m[(d-l)^2 + k^2], \quad d \geq l \quad (1.6)$$

$$J_{\min}^* = I + md^2 k^2 (l^2 + k^2)^{-1}, \quad ld(l^2 + k^2)^{-1} \leq 1$$

$$J_{\min}^* = I + m[(d-l)^2 + k^2], \quad ld(l^2 + k^2)^{-1} \geq 1$$

На основе оценок (1.6) определяется зависимость коэффициентов от указанных параметров системы.

Отметим, что при  $\ddot{h} = \text{const}$ , в частности  $\ddot{h} \equiv 0$ , уравнение (1.5) полностью интегрируется с учетом "интеграла энергии". В этом случае изменение переменной  $\theta$  описывается выражениями, обобщающими соотношения для вращательно-колебательных движений маятника; при  $k, c = 0$  получается стандартное уравнение плоского математического маятника  $\ddot{\theta} + (g + \ddot{h})l^{-1} \sin \theta = 0$ . Далее рассматривается случай периодической функции  $h = h(\Omega t)$ , где  $\Omega$  – частота, причем размах колебаний тела  $A$  по вертикали считается малым:  $\Delta h/l \ll 1$ . Далее соответствующие предположения относительно величин различных параметров формализуются введением безразмерных величин и малого числового параметра.

Из (1.3)–(1.6) следует, что  $F \equiv 0, J \equiv J^*$  при  $k = 0$ . Если  $l = 0, d = k = 0$ , то имеет место одномассовая система – модель сферического маятника с вертикально перемещаемой точкой подвеса. Механическую систему, рассматриваемую далее, можно интерпретировать как приближенную практическую реализацию идеализированной модели сферического маятника. Исследование движений этой системы в полном объеме не представляется возможным; она содержит несколько характерных временных масштабов. В основном, будем интересоваться квазистационарными колебаниями или вращениями, близкими к положениям равновесия или равномерному вращению.

Заметим, что аналогично вышеизложенному выводятся уравнения движения двухмассовой системы, когда маятник моделируется ротатором, в том числе с произвольным распределением массы по длине.

**2. Медленные относительные колебания маятника.** Для удобства построений введем безразмерные аргумент  $t'$  и параметры  $\Gamma, \delta, \kappa, b, \varepsilon$  следующим образом:

$$t' = \Omega t, \quad \Gamma = l/ml^2, \quad \delta = d/l, \quad \kappa = k/l \quad (2.1)$$

$$b = c/(ml^2\omega), \quad \ddot{h}(\Omega t)/l \equiv \varepsilon h''(t'), \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

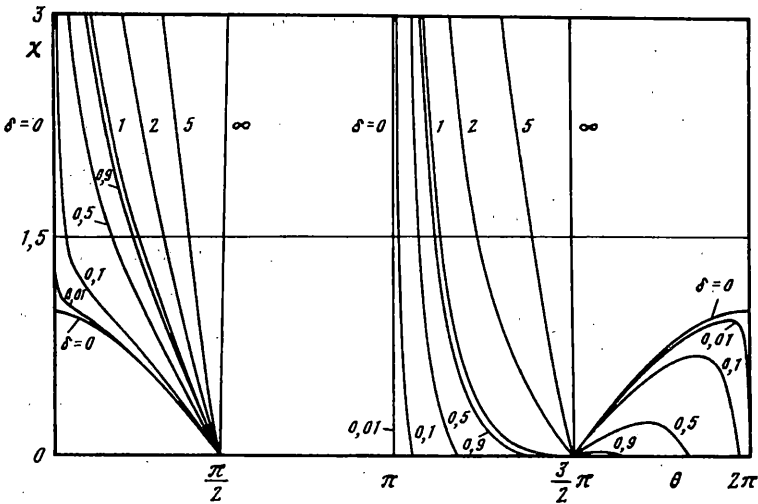
Далее производятся переобозначения:  $t' \rightarrow t, h''(t') \rightarrow \ddot{h}(t)$ . Согласно (2.1) малый параметр характеризует амплитуду, скорость и ускорение тела  $A$ . При  $\varepsilon = 0$  уравнение (1.5) имеет стационарные точки, определяемые соотношением

$$b^2(\delta + \sin \theta) \cos \theta = [\Gamma^* + (\delta + \sin \theta)^2]^2 \sin \theta, \quad \Gamma = \Gamma^* + \kappa^2 \quad (2.2)$$

Стационарные значения  $\vartheta_i^*$  зависят от трех параметров:  $b^2, \delta, \Gamma^*$ , изменяющихся на неограниченных промежутках. Вещественные корни уравнения (2.2) существуют для произвольных величин этих параметров. В частности, при  $\delta, \Gamma^* = 0$  (сферический маятник) получается уравнение  $b^2 \sin \theta \cos \theta = \sin^5 \theta$ , которое на промежутке  $0 \leq \theta \leq \pi$  имеет три корня:  $\vartheta_1^* = 0, \vartheta_2^* = \pi, \vartheta_3^* = \arg(b^2 \cos \theta - \sin^4 \theta)$ , причем корень  $\vartheta_3^*$   $0 < \vartheta_3^* < \pi$ , существует при произвольных  $b^2$ ;  $\vartheta_3^* \downarrow 0$ , если  $b^2 \rightarrow 0, \vartheta_3^* \uparrow \pi/2$ , если  $b^2 \rightarrow \infty$ . Заметим, однако, что корень  $\vartheta_3^*$  существует лишь для достаточно больших абсолютных значений  $\varphi = v$ , а именно,  $v^2 > \omega^2$ , поскольку уравнение (2.2) при  $\theta \neq 0, \pi$  приводится к виду  $v^2 \cos \theta = \omega^2$ . Таким образом, промежуточные ("боковые") положения равновесия  $\vartheta_3^*$  сферического маятника появляются при условии  $lv^2 > g$ , что имеет определенную механическую интерпретацию.

Исследуем более внимательно уравнение (2.2). Подставив выражение  $b^2$  (1.4), (2.1), получим соотношение для определения  $\theta_i^*$  как функций двух параметров  $\delta, \gamma^2$ ; имеем

$$\gamma^{-2} = \chi(\theta, \delta) \equiv (\delta + \sin \theta) \text{ctg} \theta, \quad \theta \neq 0, \pi, \quad \gamma^2 = v^2/\omega^2 \quad (2.3)$$



Фиг. 2

Отметим, что уравнение (2.3) не содержит  $\Gamma^*$ . Корни  $\theta_i^* = 0, \pi \pmod{2\pi}$  появляются лишь при  $\delta \downarrow 0$ ; эта ситуация отвечает рассмотренной выше для сферического маятника. Общий случай  $\gamma^2, \delta \geq 0$  исследуется с помощью численно-графического метода. На фиг. 2 представлено семейство  $\chi(\theta, \delta)$ , из вида которого следует, что уравнение (2.3) может иметь от двух до четырех корней  $\theta_i^*(\delta, \gamma^2)$  в зависимости от значений определяющих параметров  $\delta, \gamma^2$ ; рассмотрим эти возможности.

Стандартными методами анализа устанавливается, что при  $0 < \delta < 1$  функция  $\chi(\theta, \delta)$  на интервале  $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$  строго выпукла вверх и имеет единственный положительный максимум по  $\theta$  для каждого значения  $\delta$ ; точки максимума  $\theta^*(\delta) = -\arcsin \delta^{1/3}$ , а максимальные значения  $\chi^*(\delta) = \chi(\theta^*(\delta), \delta) = (1 - \delta^{2/3})^{3/2} < 1$ . Используя свойства функции  $\chi^*(\delta)$ , опишем возможные случаи относительного равновесия вращающейся вокруг оси  $Z$  (без колебаний,  $\varepsilon = 0$ ) двухмассовой системы. Пусть  $\gamma^2 \leq 1$ , т.е.  $v^2 \leq \omega^2$  (медленные вращения); тогда возможны только два положения относительного равновесия  $\theta_{1,2}^*(\delta, \gamma^2)$  для всех  $\delta$ , причем  $0 < \theta_1^* < \pi/2$ , а  $\pi < \theta_2^* < \frac{3}{2}\pi$ , см. фиг. 2; первое положение устойчиво, второе – неустойчиво по Ляпунову. Если вращения основания (тела  $A$ ) достаточно быстрые  $\gamma^2 > 1$  ( $v^2 > \omega^2$ ), то возможны следующие варианты. При  $1 > \gamma^2 > \chi^*(\delta)$  для рассматриваемого значения  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , имеет место ситуация, рассмотренная выше для случая  $\gamma^2 \leq 1$ : существуют только два относительных положения равновесия  $\theta_{1,2}^*(\delta, \gamma^2)$ , см. фиг. 2. Если же  $0 < \gamma^2 \leq \chi^*(\delta)$ ,  $0 < \delta < 1$ , то возможны четыре или три корня: корни  $\theta_{1,2}^*(\delta, \gamma^2)$  – аналогичны рассмотренным выше; значения  $\theta_{3,4}^*(\delta, \gamma^2)$  расположены в четвертом квадранте:  $\frac{3}{2}\pi < \theta_3^* \leq \theta_4^* < 2\pi$ . При  $\gamma \rightarrow \infty$  имеются следующие положения равновесия:  $\theta_{1,3}^* = \pi/2, \frac{3}{2}\pi$  и  $\theta_{2,4}^* = \frac{3}{2}\pi \pm \arccos \delta$ . Вырождение  $\theta_3^* = \theta_4^*$  имеет место при  $\gamma^2 = \chi^*(\delta)$ , причем  $\theta_3^* = \theta_4^* = \theta^*(\delta) = -\arcsin \delta^{1/3}$  – точка максимума, см. фиг. 2. Как следует из анализа уравнения (2.3), при  $\delta \geq 1$  имеют место два положения равновесия  $\theta_{1,2}^*(\delta, \gamma^2)$ , причем  $\theta_1^*(\delta, \gamma^2) \uparrow \pi/2, \theta_2^*(\delta, \gamma^2) \uparrow \frac{3}{2}\pi$ , если  $\delta \rightarrow \infty$ . Геометрически более наглядно рассматривать значения  $\theta$  в пределах  $-\pi < \theta \leq \pi, \pmod{2\pi}$ .

Следует отметить, что свойства устойчивости стационарных решений всей системы и найденных положений равновесия  $\theta_i^*$  существенно зависят от характера возмущений. Помимо возмущений по переменной  $\theta$  возможны следующие способы возмущений по переменной  $\varphi$ : 1)  $c^2 = \text{const}$ , т.е. фиксировано значение "интеграла площадей" (1.4); 2)  $\dot{\varphi} = \text{const}$ , т.е. скорость вращения тела  $A$  не возмущается; 3) осуществляется возмущение  $\varphi$ .

Исследуем устойчивость найденных положений относительного равновесия для  $0 < \delta < 1$  при  $\dot{\varphi} = v = \text{const}$ , т.е. тело  $A$  вращается с фиксированной скоростью, а возмущениям подвергаются  $\theta$ ,  $\theta$ . Анализ функции  $D(\theta)$  (1.5) (ее зависимость от  $c^2$ ,  $\omega^2$  не указывается ради краткости) свидетельствует, что точки  $\theta_1^*$ ,  $\theta_3^*$  устойчивы, поскольку  $D'(\theta_{1,3}^*) > 0$ , а  $\theta_2^*$ ,  $\theta_4^*$  — неустойчивы; так как  $D'(\theta_{2,4}^*) < 0$ . Критический случай  $D'(\theta^*(\delta)) = 0$  приводит к неустойчивому равновесию  $\theta_3^* = \theta_4^*$ .

Пусть стационарные решения порождающего уравнения (1.5) построены. Тогда с помощью метода Ляпунова — Пуанкаре [1] могут быть установлены условия существования и построено периодическое решение исходного уравнения при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом в виде разложений по целым или дробным степеням малого параметра или последовательными приближениями. Напомним, что система приводится к безразмерной форме согласно (2.1). В нерезонансной ситуации  $D'(\theta_i^*) \neq n_i^2$ ,  $n_i = 1, 2, \dots$  искомое решение имеет вид  $\theta(t, \varepsilon) = \theta_i^* + \varepsilon \Theta_i(t, \varepsilon)$ , где функция  $\Theta_i$  периодична по  $t$  с периодом колебаний основания, т.е.  $2\pi$ ; она строится элементарно [1]. Если же имеет место критическая резонансная ситуация, когда частота малых колебаний относительно устойчивого положения равновесия кратна частоте функции  $h(t)$ , например  $D'(\theta_i^*) = n_i^2 + \sqrt{\varepsilon} \Delta_i$ , то для исследования колебаний целесообразно сделать замену [1]  $\theta = \theta_i^* + \mu \psi$ , где  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ , и привести уравнение (1.5) к виду

$$\ddot{\psi} + n_i^2 \psi = -\mu H(\theta_i^*) \ddot{h}(t) - \mu \Delta_i \psi - \mu F(\theta_i^*) \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2} \mu D''(\theta_i^*) \psi^2 + \mu^2 \dots \quad (2.4)$$

К уравнению (2.4) применяются стандартные методы построения и исследования квазилинейных колебаний [1–3]. При определенных условиях существуют (или не существуют) стационарные резонансные режимы колебаний в окрестности полученных положений равновесия [1]. Если периодических решений нет, то методом усреднения могут быть изучены переходные режимы [2, 3]. Отметим, что при более точном выполнении условия резонанса  $D'(\theta_i^*) = n_i^2 + \varepsilon \Delta_i$  искомое периодическое решение естественно искать в виде [1]:

$$\theta = \theta_i^* + \mu \theta_1 + \mu^2 \theta_2 + \mu^3 \theta_3 + \mu^4 \dots, \quad \mu = \varepsilon^{1/3} \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $\theta_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) разложений (2.5) и соответствующих для (2.4) определяются с учетом условий ортогональности правых частей соответствующих уравнений функциям  $\sin n_i t$ ,  $\cos n_i t$  [1].

Наличие малых диссипативных моментов приведет к асимптотической устойчивости квазистационарных колебаний, отвечающих устойчивым положениям равновесия, при соответствующих дополнительных условиях [1]. Неустойчивые состояния относительного равновесия в некритическом случае не могут быть стабилизированы посредством медленных колебаний основания и диссипативными силами.

В общем случае переменная  $\theta$  может совершать большие нелинейные колебания или вращения, требующие отдельного рассмотрения на основе методов теории нелинейных колебаний [1–4]. Далее основное внимание уделяется исследованию квазистационарных колебаний и вращений маятника при условии, что тело  $A$  совершает высокочастотные колебания малой амплитуды (вибрации). Это обстоятельство, как

известно [2–7], может приводить к интересным механическим эффектам. Известная классическая задача о плоских колебаниях маятника с вибрирующей точкой подвеса исследована во многих подробностях. Случай сферического математического или физического маятника (гироскопа) на вибрирующем основании изучен в гораздо меньшей степени [2, 7]. Ниже рассматривается более полная по сравнению со сферическим маятником механическая модель двухмассовой системы с вибрирующим основанием. Отметим, что общий случай, когда физический маятник  $B$  (твердое тело на цилиндрическом шарнире) имеет произвольные геометрические и массо-инерционные характеристики, приводит к весьма громоздкой математической модели. Обозримой представляется модель маятника в виде ротатора; эта задача требует отдельного исследования.

**3. Квазистационарные вибрации маятника.** Вернемся к изучению относительных колебаний маятника (1.5) в случае быстрых вибраций основания  $h = h(\Omega t)$ , где  $\Omega$  — относительно большая величина. Формализуем это допущение введением малого параметра  $\varepsilon$  и масштабированием коэффициентов в терминах малого параметра:

$$\begin{aligned} \omega / \Omega = \varepsilon \ll 1, \quad \omega = (g/l)^{1/2}, \quad \ddot{h}(\Omega t) / (l\Omega^2) = \varepsilon h_0''(\tau), \quad \tau = \Omega t \\ \theta'' + F(\theta)\theta^2 + \varepsilon^2 D(\theta, \sigma^2, 1) = -\varepsilon H(\theta)h_0''(\tau), \quad \sigma^2 = c^2 / \omega^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Точками сбоку в уравнении (3.1) и далее обозначены производные по "быстрому" времени (фазе колебаний основания)  $\tau$ . Функция  $h^0$  по отношению к  $\tau$  имеет период  $2\pi$  (частота равна единице). Стационарные (при  $\varepsilon = 0$ ) и квазистационарные движения системы (3.1) могут быть построены и изучены аналогично п. 2, поскольку она имеет более частный вид, чем (1.5).

Рассмотрим эту задачу в более полной постановке [2, 3], используя замену  $(\theta, \theta') \rightarrow (\xi, \eta)$  и приводя уравнение (3.1) к системе вида [5]:

$$\begin{aligned} \theta = \xi - \varepsilon H(\xi)h_0(\tau), \quad \theta' = \varepsilon\eta - \varepsilon H(\xi)h_0'(\tau) \\ \xi' = \varepsilon\eta(1 - \varepsilon H'(\xi)h_0(\tau))^{-1} \\ \eta' = \varepsilon\eta H'(\xi)h_0'(\tau)(1 - \varepsilon H'(\xi)h_0(\tau))^{-1} - \varepsilon F(\xi - \varepsilon H(\xi)h_0(\tau))(\eta - H(\xi)h_0'(\tau))^2 - \\ - \varepsilon D(\xi - \varepsilon H(\xi)h_0(\tau), \sigma^2, 1) + [H(\xi) - H(\xi - \varepsilon H(\xi)h_0(\tau))]h_0''(\tau) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку функция  $H(\theta)$  гладкая, то система уравнений (3.2) для  $\xi, \eta$  имеет стандартную по Н.Н. Боголюбову форму [2, 3, 5]. К ней могут быть применены асимптотическая процедура разделения медленных и быстрых переменных (метод усреднения Крылова – Боголюбова [2, 3]) или алгоритмы регулярных возмущений (методы Ляпунова – Пуанкаре [1]). Следуя методу усреднения [2, 3], выпишем систему первого приближения (3.2) по  $\varepsilon$  (отбросим члены  $O(\varepsilon^2)$ ):

$$\begin{aligned} \xi' = \varepsilon\eta, \quad \eta' = \varepsilon\eta H'(\xi)h_0'(\tau) + \varepsilon H'(\xi)H(\xi)h_0(\tau)h_0''(\tau) - \\ - \varepsilon F(\xi)(\eta - H(\xi)h_0'(\tau))^2 - \varepsilon D(\xi, \sigma^2, 1), \quad 0 \leq \tau \leq T/\varepsilon, \quad T \sim 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для постановки задачи Коши требуется определить также начальные значения переменных  $\xi, \eta$ ; обычно полагают  $\xi(0) = \xi^0 \sim 1 \pmod{2\pi}$ ,  $\eta(0) = \eta^0 \sim 1$ . Изменение этих переменных на интервале  $\tau \sim \varepsilon^{-1}$  будет порядка единицы. Согласно формулам замен (3.1), (3.2) получим оценки  $\theta(0) = \theta^0 \sim 1 \pmod{2\pi}$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}^0 \sim 1$ ,  $\theta'(0) = \theta'^0 \sim \varepsilon$ .

Выпишем для (3.3) усредненные уравнения в "медленном времени"  $s = \varepsilon t$  ( $s = \omega t$ ) [2, 5]:

$$\begin{aligned} d\xi/ds = \eta, \quad d\eta/ds = -[H'(\xi)H(\xi) + F(\xi)H^2(\xi)]\beta^2 - F(\xi)\eta^2 - D(\xi, \sigma^2, 1); \\ \beta^2 = \langle h_0'^2 \rangle, \quad \xi(0) = \xi^0, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad 0 \leq s \leq T \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь угловыми скобками обозначено среднее значение на интервале  $0 \leq \tau \leq 2\pi$ . Уравнения (3.4) полностью аналитически интегрируются посредством квадратур (для  $d\eta/d\xi$  получается уравнение типа Бернулли). Соответствующие выражения не приводятся вследствие их громоздкости, элементарности и бесполезности. Решение задачи Коши (3.4) может быть построено численно с требуемой точностью на интервале  $0 \leq s \leq T$ , что не представляет трудностей.

Большой интерес представляет исследование стационарных точек системы (3.4), отвечающих приближенным положениям относительного равновесия маятника. При этом вся система вибрирует и вращается относительно оси  $Z$ . В частном случае  $\beta^2 = 0$  они совпадают с изученными в п. 2, поскольку  $\xi_i^* = \text{arg}_{\xi} D(\xi, \sigma^2, 1) = \theta_i^*$ . Для значений  $\beta^2 > 0$  уравнение, определяющее стационарные точки  $\eta = 0$ ,  $\xi_i^*$ , имеет вид (сравни с (2.2)):

$$[H'(\xi)H(\xi) + F(\xi)H^2(\xi)]\beta^2 + D(\xi, \sigma^2, 1) = 0 \quad (3.5)$$

$$H(\xi) \equiv (S(\xi)/S^*(\xi))\sin \theta, \quad S(\xi) \equiv \Gamma^* + (\delta + \sin \xi)^2, \quad \Gamma^* = \Gamma + \kappa^2$$

$$F(\xi) \equiv \frac{1}{2}(\kappa^2 \cos \xi / S^*(\xi))(2 \sin \xi + S'(\xi) \cos \xi / S(\xi)), \quad S^* \equiv S - \kappa^2 \cos^2 \theta$$

$$D(\xi, \sigma^2, 1) \equiv (S(\xi)/S^*(\xi))[\sin \xi - \frac{1}{2}\sigma_*^2 S'(\xi)/S^2(\xi)], \quad \sigma_*^2 = \sigma^2 / (ml^2)^2$$

Корни  $\xi_i^*$  уравнения (3.5) могут быть найдены на интервале  $0 \leq \xi < 2\pi$  численными или численно-графическими методами. Они зависят от пяти неотрицательных параметров:  $\beta^2$ ,  $\sigma_*^2$ ,  $\Gamma$ ,  $\kappa^2$ ,  $\delta$ , каждый из которых изменяется на неограниченном промежутке. Полное представление о поведении корней  $\xi_i^*$  и качественные выводы получить довольно трудно. Обычно определенный интерес вызывает исследование в некоторых предельных случаях. При  $\beta^2 = 0$ , как отмечалось, этот анализ проведен в п. 2 с достаточной полнотой. Геометрически более наглядным представляется рассмотрение переменной  $\xi$  на смещенном промежутке  $-\pi < \xi \leq \pi, \text{ mod } 2\pi$ .

Анализ коэффициентов уравнения (3.5) показывает, что его сложность весьма сильно зависит от параметра  $\kappa = k/l$ ; рассмотрим предельный случай  $\kappa = 0$  (т.е.  $\kappa^2 \sim \epsilon$  в (3.2)). Тогда выражения (3.5) существенно упрощаются, поскольку  $S \equiv S^*$ ,  $F \equiv 0$  и уравнение приводится к виду

$$\gamma^2(\delta + \sin \xi) \cos \xi = (1 + \beta^2 \cos \xi) \sin \xi \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) формально обобщает (2.3): при  $\beta^2 = 0$  они совпадают. Это выражение содержит три параметра:  $\delta$ ,  $\gamma^2$ ,  $\beta^2$ ; однако простыми преобразованиями получаем аналогичное (2.3) соотношение

$$\lambda^2 = \Phi(\xi, \zeta) \equiv \text{tg } \xi + \zeta \sin \xi, \quad \lambda^2 = \delta \gamma^2 = dv^2 / g > 0 \\ \zeta = \beta^2 - \gamma^2, \quad \gamma^2 = v^2 / \omega^2, \quad -\infty < \zeta < \infty, \quad \xi = \xi_i^*(\zeta, \lambda^2) \quad (3.7)$$

Действительно, пусть интенсивность колебаний  $\beta^2$  достаточно велика, т.е.  $\beta^2 > \gamma^2 \geq 0$ . Тогда делением соотношения (3.7) на  $\zeta > 0$  и заменой  $\xi = \pi/2 - \vartheta$  функция  $\Phi$  приводится к виду (2.3). Параметрами типа  $\gamma^2$  и  $\delta$  будут соответственно величины  $\lambda^2/\zeta$  и  $1/\zeta$ , а неизвестной —  $\vartheta$ , которая на  $\pi/2$  отличается от  $\xi$ , т.е. от  $\theta$ , см. (3.2). Если интенсивность  $\beta^2$  относительно мала, т.е.  $\beta^2 < \gamma^2$ , тогда делением на  $|\zeta| = \gamma^2 - \beta^2 > 0$  и заменой  $\xi = \vartheta - \pi/2$  получается уравнение вида (2.3) с параметрами  $\lambda^2|\zeta|^{-1}$  и  $|\zeta|^{-1}$  соответственно. Корни этого уравнения подробно исследованы численно-графическими методами в п. 2. Предельные случаи  $|\zeta| \rightarrow 0$  и  $|\zeta| \rightarrow \infty$  соответствуют  $\delta \rightarrow \infty$  и  $\delta \rightarrow 0$  в уравнении (2.3). Аналогично анализируются случаи  $\lambda^2|\zeta|^{-1} \rightarrow 0$  или  $\lambda^2|\zeta|^{-1} \rightarrow \infty$ . Отметим, что частный случай  $\delta = 0$  приводит к значениям  $\xi_{1,2}^* = 0, \pi$ , см. п. 2; при

$\gamma^2 \rightarrow \infty$  ( $v^2/\omega^2 \rightarrow \infty$ ) появляются корни  $\xi_1^* \rightarrow \pi/2$ ,  $\xi_2^* \rightarrow 3/2\pi$  и т.п., что отвечает механическим представлениям. Исследование устойчивости стационарных точек проводится аналогично п. 2. Таким образом, случай компланарности оси  $Z$  и отрезков  $d, l$  (см. фиг. 1) можно считать исследованным с достаточной полнотой. При помощи методов регулярных возмущений исследуются корни  $\xi_i^*$  уравнения (3.5) при  $\kappa^2 > 0$  достаточно малом.

Рассмотрим другую предельную ситуацию, когда параметр  $\delta = d/l$  можно считать пренебрежимо малым, и положим  $\delta = 0$  в уравнении (3.5); значения  $\kappa^2$  считаются существенными. Уравнение (3.5) несколько упрощается и приводится к виду

$$\begin{aligned} \sin \xi = 0, \quad \gamma^2 \cos \xi - 1 = \beta^2 \cos \xi [1 + (\kappa^2 / S^{*2}(\xi))(\Gamma \cos 2\xi - (1 + \kappa^2) \sin^4 \xi)], \\ S^*(\xi) \equiv \Gamma + (1 + \kappa^2) \sin^2 \xi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.8) с очевидностью следует, что при  $\kappa^2 = 0$  получается уравнение (3.6), отвечающее  $\delta = 0$ , т.е.  $(\gamma^2 - \beta^2) \cos \xi = 1$ . Отметим следующее основное свойство системы: при  $\delta = 0$  существуют относительные положения равновесия  $\xi_{1,2}^* = 0, \pi$ ; при  $\delta > 0$  таких положений нет, кроме предельной ситуации  $v \rightarrow 0$  ( $\gamma^2 \rightarrow 0$ ), когда колебания маятника  $B$  плоские, а тело  $A$  не вращается.

В общем случае корни  $\xi_i^*$ ,  $i \geq 3$ , определяющие "боковые" положения равновесия из второго соотношения (3.8), зависят от четырех параметров:  $\gamma^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\kappa^2$ ,  $\Gamma$ ; они могут быть найдены численно. Исследуем некоторые предельные ситуации, характеризующие их поведение. Пусть  $\gamma^2 \rightarrow \infty$ , т.е. угловая скорость  $v$  вращения тела  $A$  много больше частоты  $\omega$  малых колебаний маятника. Интенсивность вибраций  $\beta^2$  считается небольшой. Тогда появляются "боковые" положения равновесия:  $\xi_3^* \rightarrow \pi/2$  ( $\xi_4^* \rightarrow 3/2\pi$ ). Отметим, что второе соотношение (3.8) симметрично по  $\xi$  относительно  $\xi = 0$ ; поэтому достаточно рассматривать его на интервале  $0 \leq \xi \leq \pi$ . Случай  $\beta^2 \rightarrow 0$  изучен более подробно для всех  $\delta$ ,  $\kappa^2 > 0$  в п. 2. Обратная ситуация, когда  $\beta^2 \rightarrow \infty$  (интенсивность вибраций велика), приводит к появлению "боковых" положений равновесия  $\xi_3^* \rightarrow \pi/2$  ( $\xi_4^* \rightarrow 3/2\pi$ ), см. выше. Заметим, что выражение в квадратной скобке (3.8) строго положительно при  $\Gamma, \kappa^2 \geq 0, \xi \neq 0, \pi$ .

Исследуем зависимость положений относительного равновесия от инерционной характеристики тела  $A$ . Рассмотрим сперва случай массивного тела, т.е.  $\Gamma \rightarrow \infty$ ; тогда стационарные точки  $\xi_{3,4}^*$  отвечают ситуации п. 2, см. выше. Если же  $\Gamma \rightarrow 0$  (случай одномассовой системы), то выражение в квадратной скобке равно  $(1 + \kappa^2)^{-1}$  и второе уравнение (3.8) для определения  $\xi$  принимает вид

$$[\gamma^2 - \beta^2(1 + \kappa^2)^{-1}] \cos \xi = 1 \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) имеет промежуточный корень  $\xi_3^*$  (и  $\xi_4^*$ ) при условии, что выражение в квадратной скобке превосходит единицу по абсолютной величине, т.е. справедливо одно из неравенств

$$v^2(l^2 + k^2)/(gl) > \beta^2 + 1 + k^2/l^2, \quad \beta^2 > v^2(l^2 + k^2)/(gl) + 1 + k^2/l^2$$

Устойчивость стационарных точек исследуется аналогично вышеизложенному стандартными методами. Уточнение решения, характеризующего квазистационарные колебания маятника, проводится с помощью методов Ляпунова – Пуанкаре [1] или Крылова – Боголюбова [2, 3].

Таким образом, установлено, что при определенных условиях двухмассовая система с вибрирующим основанием имеет от двух до четырех стационарных положений



относительно равновесия, в окрестности которых существуют колебательные движения малой амплитуды.

**4. Квазистационарные вращения маятника.** Наряду с относительными колебательными движениями маятник может совершать быстрые вращения, которые исследуются аналогично. Введем, как и в случае колебаний, см. п. 3, "быстрое безразмерное время"  $\tau$  и малый параметр  $\varepsilon$  следующим образом (сравни с (3.1)):

$$\begin{aligned} \tau &= \Omega t, \quad \omega^2/\Omega^2 = \varepsilon \ll 1, \quad \ddot{h}(\Omega t)/(l\Omega^2) = \varepsilon h_0''(\tau) \\ k^2/l^2 &= \varepsilon \kappa^2, \quad \kappa^2 \sim 1, \quad c^2/(ml^2\Omega)^2 = \varepsilon \alpha^2, \quad \alpha^2 \sim 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда уравнение (1.5) с учетом соотношений (4.1) приводится к стандартной форме вида [5, 8]:

$$\theta'' + \varepsilon G(\theta, \varepsilon)\theta^2 + \varepsilon Q(\theta, \alpha^2, \varepsilon) + \varepsilon K(\theta, \varepsilon)h_0''(\tau) = 0 \quad (4.2)$$

$$G(\theta, \varepsilon) \equiv \frac{1}{2} \kappa^2 (\cos \theta / S^*) (2 \sin \theta + S' \cos \theta / S), \quad S \equiv \Gamma + (\delta + \sin \theta)^2 + \varepsilon \kappa^2$$

$$Q(\theta, \alpha^2, \varepsilon) \equiv (S / S^*) (\sin \theta - \frac{1}{2} \alpha^2 S' / S^2), \quad S' \equiv 2(\delta + \sin \theta) \cos \theta$$

$$K(\theta, \varepsilon) \equiv (S / S^*) \sin \theta, \quad S^* \equiv \Gamma + (\delta + \sin \theta)^2 + \varepsilon \kappa^2 \sin^2 \theta$$

Отметим, что в первом приближении по  $\varepsilon$  отношение  $S/S^* \equiv 1$ . Для уравнения (4.2) могут быть поставлены задачи определения квазистационарных периодических [1, 2, 5–8] и вращательных [5–10] решений. Используя методы Ляпунова – Пуанкаре, построим монотонно растущее во времени  $\tau$  решение, описывающее быстрые квазистационарные вращения маятника относительно несущего тела. Будем искать стационарное резонансное решение в виде [8–10]:

$$\theta = \theta(\tau, \varepsilon) = \theta_0(\tau + \psi) + \varepsilon \theta_1(\tau) + \varepsilon^2 \dots, \quad \theta_0 = n(\tau + \psi) \quad (4.3)$$

$$\theta_i(\tau + 2\pi) \equiv \theta_i(\tau) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Здесь неизвестные функции  $\theta_i(\tau)$  периодичны по  $\tau$  с периодом  $2\pi$ ;  $\psi$  – фазовая постоянная, также подлежащая определению. Подставляя представление (4.3) в уравнение (4.2), стандартными приемами получим соотношения для  $\theta_i$  и, в частности, для  $\theta_1$ :

$$\theta_1'' = -G_0(\theta_0)n^2 - Q_0(\theta_0) - \sin \theta_0 h_0''(\tau) \quad (4.4)$$

Функции  $G_0, Q_0$  в (4.4) получаются из  $G, Q$  при  $\varepsilon = 0$ ; кроме того  $S(\theta, 0) \equiv S^*(\theta, 0)$ ,  $K_0(\theta_0) \equiv \sin \theta_0$ . Из условия  $2\pi$ -периодичности  $\theta_1$  по  $\tau$  следует, что постоянная  $\psi$  должна удовлетворять условию [1, 4, 8]:

$$P(\psi) = \int_0^{2\pi} \sin n(\tau + \psi) h_0(\tau) d\tau = 0 \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) получается интегрированием по  $\tau$  на промежутке  $0 \leq \tau \leq 2\pi$  правой части уравнения (4.4) с учетом того факта, что функции  $G_0, Q_0$  имеют нулевое среднее. Кроме того, произведено двукратное интегрирование по частям в последнем члене (4.4) и деление на множитель  $n^2 \neq 0$ . Математическому условию (4.5) "ортогональности" двух функций на периоде вращений (переменная  $\theta$  получает приращение  $2\pi n$ ) можно придать механический смысл. А именно, постоянная  $\psi$  должна быть таковой, чтобы "работа момента внешних сил" на периоде была равна нулю. Искомые значения  $\psi_j^*$  могут быть получены в явном виде

$$\psi_{jn}^* = (j\pi - \lambda_n)/n \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad \sin \lambda_n = h_{0n}^s / h_{0n}, \quad \cos \lambda_n = h_{0n}^c / h_{0n} \quad (4.6)$$

$$h_{0n}^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h_0(\tau) \sin n\tau d\tau, \quad h_{0n}^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h_0(\tau) \cos n\tau d\tau, \quad h_{0n} = (h_{0n}^s{}^2 + h_{0n}^c{}^2)^{1/2} \neq 0$$

Здесь  $h_{0n}^{s,c}$  – коэффициенты Фурье  $2\pi$ -периодической функции  $h_0(\tau)$  по тригонометрической системе. Согласно [1, 8] каждому вещественному значению  $\psi_{jn}^*$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  отвечает единственное периодическое решение вида (4.3), если

$$P'(\psi_{jn}^*) = (-1)^j \pi n h_{0n} \neq 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-1, n = 1, 2, \dots) \quad (4.7)$$

Условие (4.7) выполняется для некоторого значения  $n$ , если коэффициент Фурье  $h_{0n}^s$  или (и)  $h_{0n}^c$  отличен от нуля. Итак, нулевое приближение  $\theta_0(\tau + \psi_{jn}^*)$  полностью определено, а последующие коэффициенты  $\theta_i$  находятся однозначно посредством квадратур и вычисления средних значений. Математическое моделирование удобнее проводить методом последовательных приближений [1, 4, 8], поскольку сложность выражений катастрофически нарастает с ростом индекса  $i$ .

Построенное решение  $\theta^*(\tau, \varepsilon)$  устойчиво в линейном приближении по Ляпунову [1], если  $P'(\psi_{jn}^*) < 0$ , т.е. для нечетных  $j$  [1, 8, 9]. Асимптотическая устойчивость вращения может быть обеспечена относительно малыми диссипативными моментами. Обратные неравенства  $P' > 0$  ( $j$  – четные) приводят к неустойчивым вращениям, которые не стабилизируемы диссипативными моментами. Критический случай  $h_{0n} = 0$  требует дополнительного анализа, приводящего к решениям высших степеней [1, 10] и, возможно, с разложениями по дробным степеням  $\varepsilon$  [1, 8].

Различные способы введения малого параметра (масштабирование) и применение методов теории возмущений позволяет исследовать другие режимы вращательно-колебательных движений, в том числе в общей нелинейной постановке. Таким образом, в двухмассовой системе с колеблющимся основанием обнаружены и построены семейства квазистационарных вращательно-колебательных режимов. Установлены достаточные условия существования, исследована зависимость от параметров системы и обнаружены интересные механические эффекты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00222).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
4. Акуленко Л.Д. Вынужденные периодические движения в негамильтоновых системах с одной степенью свободы // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 833–843.
5. Акуленко Л.Д. Асимптотический анализ динамических систем, подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 23–31.
6. Акуленко Л.Д. Анализ системы со сложным механизмом возбуждения параметрических колебаний // Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 37–45.
7. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.
8. Акуленко Л.Д. О некоторых вращательно-колебательных системах, подверженных высокочастотным возмущениям // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 1133–1139.
9. Акуленко Л.Д., Волосов В.М. О резонансе во вращательной системе // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1967. № 1. С. 12–16.
10. Акуленко Л.Д., Волосов В.М. Резонансные вращения высших степеней // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1967. № 2. С. 10–14.