МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2000

УДК 531

© 2000 г. Е.С. БРИСКИН

О ВЫБОРЕ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Один из методов составления дифференциальных уравнений, описывающих движение системы твердых тел, на которые накладываются голономные стационарные связи, состоит во введении избыточных координат [1, 2], что позволяет при использовании уравнений Лагранжа получать несложные выражения для кинетической энергии механической системы в канонической форме с постоянными инерционными коэффициентами $T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$, где q^α, q^β – обобщенные координаты, $a_{\alpha\beta}$ – инерционные коэффициенты, не зависящие от обобщенных координат и равные нулю при $\alpha \neq \beta$.

Здесь и далее используется соглашение о суммировании, согласно которому наличие повторяющихся индексов подразумевает суммирование по этим индексам.

Однако, при этом приходится учитывать дополнительные уравнения связей и вводить неопределенные множители Лагранжа, что приводит к необходимости интегрирования большего количества уравнений. Так например, если изучается движение плоского механизма, состоящего из N твердых тел и имеющего s степеней свободы ($s < 3N$), то можно составлять $3N$ дифференциальных уравнений и $3N–s$ уравнений связей относительно $3N$ избыточных координат и $3N–s$ неопределенных множителей Лагранжа λ_α.

Альтернативой, как известно [1, 2], является состояние s дифференциальных уравнений относительно s независимых обобщенных координат. Этот путь приводит к наименьшему количеству уравнений, но к более трудоемким операциям по определению инерционных коэффициентов, в общем случае зависящих от обобщенных координат, и необходимости их предварительного решения относительно старших производных с целью удобства последующего, как правило, численного интегрирования.

Предлагается метод выбора минимального количества обобщенных координат, в том числе и "избыточных", обеспечивающих структуре кинетической энергии каноническую форму с постоянными инерционными коэффициентами.

1. Известно [1, 2], что движение механической системы в трехмерном пространстве можно представить как движение изображающей точки в пространстве конфигураций. Если декартовы координаты всех точек механической системы выразить через s независимых обобщенных координат q^α, то пространство конфигураций в общем случае является римановым s измерений. Метрика пространства, характеризуемая фундаментальным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, полностью определяется видом зависимостей инерционных коэффициентов в выражении для кинетической энергии системы от обобщенных координат

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^1,\ldots, q^2,\ldots q^s) \tag{1.1}$$

В некоторых, по-видимому, частных и наиболее простых случаях, возможно найти такое преобразование обобщенных координат

$$x^k = x^k(q^1, q^2, \ldots q^s) \quad (k = 1, 2, \ldots s) \tag{1.2}$$

обеспечивающее представление кинетической энергии в канонической форме. Геометрически это означает, что для такого частного случая пространство конфигураций является евклидовым. Условием евклидовости пространства, как известно [3], является равенство нулю тензора Римана – Кристоффеля $R_{ij\mu\cdot}^{\cdots\nu}$. Для чисто ковариантных компонент тензора Римана – Кристоффеля

$$R_{\lambda\chi\beta\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\lambda}}{\partial q^\chi} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\chi}}{\partial q^\lambda} + g^{\mu\nu}[\Gamma_{\nu\beta\chi}\Gamma_{\mu\alpha\lambda} - \Gamma_{\nu\beta\lambda}\Gamma_{\mu\alpha\chi}] \tag{1.3}$$

Тогда должны тождественно выполняться равенства

$$R_{\lambda\chi\beta\alpha} = 0 \tag{1.4}$$

где $\Gamma_{\nu\alpha j}$ – символы Кристоффеля 1-го рода, $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты фундаментального метрического тензора

$$\Gamma_{\alpha\chi\nu} = \tfrac{1}{2}[\partial g_{\chi\alpha} / \partial q^\nu + \partial g_{\nu\alpha} / \partial q^\chi - \partial g_{\chi\nu} / \partial q^\alpha] \tag{1.5}$$

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad \delta^\alpha_\gamma = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha = \gamma \\ 0 \text{ при } \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

Однако, как правило, для реальных механических систем, например, механизмов, это не выполняется и, следовательно, искомое преобразование не существует. Если теперь рассматривать пространство конфигураций более высокой размерности, в котором исходное пространство является лишь подпространством, то можно добиться тождественного равенства нулю тензора Римана – Кристоффеля. Гарантированная минимальная размерность n такого евклидова пространства определяется формулой [3]:

$$n = s(s + 1)/2 \tag{1.6}$$

Анализ (1.6) показывает, что для механических систем с одной степенью свободы ($s = 1$) искомое преобразование (1.2) всегда существует, а следовательно, для кинетической энергии всегда можно получить каноническое выражение

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 \tag{1.7}$$

Для системы с двумя степенями свободы ($s = 2$) требуется рассматривать движение в трехмерном пространстве конфигураций и для этого определить преобразование

$$x^1 = x^1(q^1, q^2, D); \quad x^2 = x^2(q^1, q^2, D); \quad x^3 = x^3(q^1, \ q^2, D) \tag{1.8}$$

Для механической системы с s степенями свободы задача сводится к определению n функций

$$x^k = x^k(q^1, \ldots q^s, D_l, \ldots D_{n-s}) \quad (k = 1, 2 \ldots n) \tag{1.9}$$

где $D_1, \ldots, D_{n-s}$ – постоянные, например, характеризующие геометрические параметры рассматриваемой механической системы.

Предполагается, что уравнения (1.9) допускают и обратные преобразования, т.е.

$$q^j = q^j(x^1, \ldots x^n) \quad (j = 1, \ldots, s)$$

$$D_p(x^1, \ldots x^n) = \text{const} \ (p = 1, \ldots, n - s) \tag{1.10}$$

Здесь первая группа уравнений позволяет выразить старые координаты q^α через новые x^k, а вторая группа – уравнения связей.

Для определения преобразования (1.9) составляются выражения для кинетической энергии в старых q^α и новых координатах x^k:

$$T = \tfrac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q^1 \ldots q^s)\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \quad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,s)$$

$$T = \tfrac{1}{2} \delta_{ke} \dot{x}^k \dot{x}^l \quad (n,l = 1,2,\ldots,n) \tag{1.11}$$

где $\delta_{kl} = 1$, при $k = 1$ и $\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$.

Дифференцируя (1.9) по времени

$$\dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \tag{1.12}$$

и подставляя результат в (1.11), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных для определения функций $x^k(q^l,\ldots, q^s)$:

$$\delta_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = a_{\alpha\beta}(q^1,\ldots,q^s)\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \tag{1.13}$$

Откуда в силу независимости $\dot{q}^\alpha, \dot{q}^\beta$:

$$\delta_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial q^\beta} = a_{\alpha\beta}(q^1,\ldots,q^s) \tag{1.14}$$

В частном случае, например для системы с двумя степенями свободы, уравнения (1.14) имеют вид

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial q^1}\right)^2 = a_{11}(q^1,q^2)\\
\frac{\partial x^1}{\partial q^1}\frac{\partial x^1}{\partial q^2} + \frac{\partial x^2}{\partial q^1}\frac{\partial x^2}{\partial q^2} + \frac{\partial x^3}{\partial q^1}\frac{\partial x^3}{\partial q^2} = a_{12}(q^1,q^2)\\
\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial q^2}\right)^2 = a_{22}(q^1,q^2)
\end{gathered} \tag{1.15}$$

С геометрической точки зрения уравнения (1.15) служат для определения поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, в частности в декартовых координатах. Инерционные коэффициенты $a_{\alpha\beta}(q^1, q^2)$ тогда являются коэффициентами первой квадратичной формы поверхности.

В общем случае уравнения (1.14) служат для определения s-мерной гиперповерхности с римановой метрикой, вложенной в n-мерное евклидово пространство. Имея ввиду получение минимального количества уравнений связи, следует добиваться, чтобы размерность n евклидова пространства только на 1 превышала размерность гиперповерхности. Это возможно [3], если помимо тензора $a_{\alpha\beta}(q^1,\ldots q^s)$, являющегося первым основным, ввести второй основной тензор $b_{\alpha\beta}(q^1,\ldots q^\sigma)$, удовлетворяющий уравнениям Гаусса

$$R_{\lambda\chi\beta\alpha} = \pm(b_{\lambda\beta}b_{\chi\alpha} - b_{\chi\beta}b_{\lambda\alpha}) \tag{1.16}$$

и Петерсона – Кодацци

$$\nabla_\lambda b_{\chi\beta} = \nabla_\chi b_{\chi\beta} \tag{1.17}$$

где $R_{\lambda\chi\beta\alpha}$ – тензор кривизны, заданный своими ковариантными компонентами, ∇_λ – символ абсолютной (ковариантной производной) на s мерной римановой гиперповерхности. Причем $R_{\lambda\chi\beta\alpha}$ определяется только внутренней геометрией гиперповерхности и следовательно, зависит только от структуры инерционных коэффициентов $a_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots q^s)$.

Теперь для определения преобразования (1.9) необходимо решить систему уравнений, называемых деривационными формулами теории гиперповерхностей

$$\nabla_\chi \nu^i(q^1, \dots, q^s) = \mp b^\sigma(q^1, \dots, q^s)\xi^i_\sigma,$$

$$\nabla_\chi \xi^i_\beta(q^1, \dots, q^s) = b_{\chi\beta}(q^1, \dots, q^s)\nu^i \tag{1.18}$$

$$b^\sigma_\chi = a^{\sigma\lambda} b_{\chi\lambda}, \quad \xi^i_\beta = \partial x^i / \partial q^\beta \tag{1.19}$$

где $a^{\sigma\lambda}$ – тензор инерционных коэффициентов, заданный своими контравариантными компонентами; $\nu^i(q^l \dots q^s)$ – дополнительные неизвестные функции, геометрический смысл которых суть контравариантные компоненты единичного нормального вектора к гиперповерхности в точке, определяемой координатами $q^1, q^2, \dots, q^s$.

Отсюда ясен и механический смысл второго основного тензора $b_{\alpha\beta}(q^1, \dots q^s)$, компоненты которого являются коэффициентами разложения полного ускорения изображающей точке в евклидовом пространстве конфигураций или, что одно и тоже, это коэффициенты разложения реакции гиперповерхности, рассматриваемой как идеальная связь по компонентам единичного нормального вектора к гиперповерхности с римановой метрикой.

В результате решения системы уравнений (1.18) и определяется преобразование (1.19) или, что одно и тоже, уравнение гиперповерхности в евклидовом пространстве с точностью до ее перемещения в нем как твердого тела.

Таким образом, процедура реализации предлагаемого метода состоит в последовательном выполнении следующих этапов:

– определение инерционных коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ в выражении для кинетической энергии в независимых координатах (1.11);

– определение ковариантных компонент тензора кривизны $R_{\lambda\chi\beta\alpha}$ (1.3);

– совместное решение уравнений Гаусса (1.16) и Петерсона – Кодацци (1.17) с целью построения второго основного тензора $b_{\alpha\beta}$;

– интегрирование системы уравнений в частных производных (1.18), результатом которого будут являться искомые функции преобразования координат.

Отсюда становится ясно, что при решении конкретных инженерных задач эта процедура, в силу ее трудоемкости, уместна в тех случаях, когда определяется вид минимально необходимых новых обобщенных координат для описания движения механических систем с типовыми кинематическими схемами. Тогда каждой конкретной механической системе будет соответствовать своя система координат.

Обобщенные силы P_k, необходимые для составления уравнений движения, получаются в результате вычисления виртуальной работы

$$\delta A = Q_\alpha \delta q^\alpha = Q_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^k} \delta x^k \tag{1.20}$$

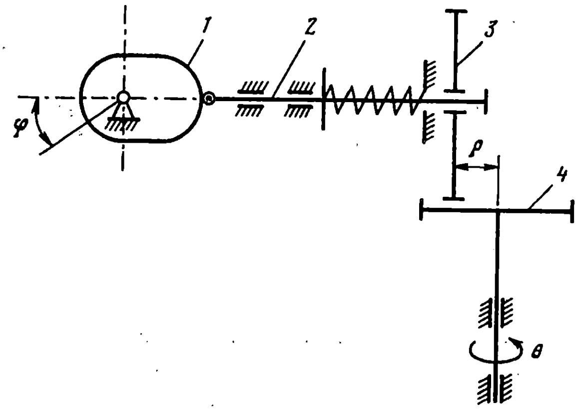
Откуда будем иметь

$$P_k = Q_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^k} \tag{1.21}$$

где Q_α – обобщенные силы, определяемые в старых координатах q^α, но выраженные через новые x^k. Окончательно уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид

$$\delta_{kl}\ddot{x}^l = P_k(x^1 \dots x^n) + \lambda \partial D / \partial x^k \quad (k = 1, \dots, n) \tag{1.22}$$

$$D(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$$



Фиг. 1

Отличие уравнений (1.22) от уравнений Лагранжа с определенными множителями состоит в минимальности привлекаемых уравнений связей (одно) и их разрешенности относительно вторых производных $\ddot{x}^k$.

2. В качестве примера реализации предлагаемого метода составления дифференциальных уравнений движения рассматривается механическая система с двумя степенями свободы (фигура), состоящая из кулачка *1* с осевым моментом инерции J_1, невесомого толкателя *2*, на свободном конце которого находится вращающийся вокруг горизонтальной оси толкателя маховик *3* с моментом инерции J_3. Маховик *3* радиуса r приводится во вращение за счет взаимодействия без проскальзывания с невесомым маховиком *4*, вращающимся вокруг вертикальной оси. Непрерывное взаимодействие толкателя с кулачком обеспечивается пружиной жесткости c. Положение рассматриваемой механической системы определяется двумя координатами φ и Θ, характеризующих соответственно углы поворота кулачка *1* и маховика *4*. Профиль кулачка выбирается таким образом, что

$$\rho = \rho_0 \cos\varphi \tag{2.1}$$

Для описания движения выбираются обобщенные координаты

$$q^1 = \varphi, \quad q^2 = \Theta \frac{r}{\rho_0}\sqrt{\frac{J_1}{J_3}} \tag{2.2}$$

Тогда для кинетической энергии T системы получаем

$$T = \tfrac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2} J_3 \omega^2 = \tfrac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2} J_3 \rho^2 \dot{\Theta}^2 / r^2 = \tfrac{1}{2} J_1 (\dot{q}^1)^2 + \tfrac{1}{2} J_1 \cos^2 q^1 (q^2)^2 \tag{2.3}$$

Фундаментальный метрический тензор $q_{\alpha\beta}$ и тензор Римана – Кристоффеля, имеющий одну существенную ковариантную компоненту R_{1212}, соответственно имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \cos^2 q^1 \end{vmatrix}, \quad R_{1212} = J_1 \cos^2 q^1 \tag{2.4}$$

Так как компонента тензора Римана – Кристоффеля R_{1212} тождественно нулю не равна, то не существует преобразование координат (1.2), позволяющее представить кинетическую энергию T в канонической форме. Для такого представления необходимо в соответствии с (1.8) ввести три новых координаты x^k, удовлетворяющие системе уравнений (1.15), где

$$a_{11}(q^1, q^2) = J_1, \quad a_{22}(q^1, q^2) = J_1 \cos^2 q^1, \quad a_{12}(q^1, q^2) = a_{21}(q^1, q^2) = 0 \tag{2.5}$$

Опуская в описанной ранее процедуре решение уравнений Гаусса и Петерсона–Кодацци, непосредственно проверкой можно убедиться, что одним из частных решений уравнений (1.15) являются функции

$$x^1 = J_1 \cos q^1 \cos q^2, \quad x^2 = J_1 \cos q^1 \sin q^2, \quad x^3 = J_1 \sin q^1 \tag{2.6}$$

Таким образом, движение рассматриваемой механической системы с двумя степенями свободы можно интерпретировать как движение изображающей точки единичной массы по поверхности сферы радиуса J_1 в трехмерном пространстве конфигураций.

Для определения обобщенных сил следует воспользоваться формулами (1.21):

$$P_1 = Q_1 \frac{\partial q^1}{\partial x^1} + Q_2 \frac{\partial q^2}{\partial x^2} = -Q_1 \frac{x^1 x^3}{[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2][(x^1)^2 + (x^2)^2]^{1/2}} - Q_2 \frac{(x^2)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

$$P_2 = Q_1 \frac{\partial q^1}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial q^2}{\partial x^3} = -Q_1 \frac{x^2 x^3}{[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2][(x^1)^2 + (x^3)^2]^{1/2}} + Q_2 \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

$$P_3 = Q_1 \frac{\partial q^1}{\partial x^3} + Q_2 \frac{\partial q^2}{\partial x^3} = Q_1 \frac{[(x^1)^2 + (x^2)^2]^{1/2}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \tag{2.7}$$

а единственное уравнение связи будет иметь вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = J_1^2 \tag{2.8}$$

В (2.7) Q_1, Q_2 – обобщенные силы, определенные в старой исходной системе координат.

3. Для упрощения процедуры определения инерционных коэффициентов $a_{\alpha\beta}(q^1, q^2,\ldots, q^s)$ в независимых координатах q^α целесообразно изначально выбирать обобщенные координаты, в том числе и "избыточные" x^m, таким образом и столько, чтобы кинетическая энергия для системы с s степенями свободы допускала представление в форме

$$T = \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\dot q^\alpha \dot q^\beta + \tfrac{1}{2}\delta_{mn}\dot x^m \dot x^n \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots s), \quad (m, n = 1, 2, \ldots N - s) \tag{3.1}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$, δ_{mn} – символы Кронекера.

Структура кинетической энергии (3.1) предполагает наличие уравнений связей

$$f_j(q^1, \ldots, q^s, x^1, \ldots, x^{N-s}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, N - s) \tag{3.2}$$

Разрешая (3.2) относительно "избыточных" координат

$$x^m = x^m(q^1, \ldots, q^s) \tag{3.3}$$

и подставляя результат в (3.1), для кинетической энергии имеем

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} + \delta_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^n}{\partial q^\beta}\right)\dot q^\alpha \dot q^\beta \tag{3.4}$$

Полученный результат следует рассматривать как определение кинетической энергии изображающей точки в римановом пространстве конфигураций, метрика которого определяется квадратичной формой

$$a_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \ldots, q^s) = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^m}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^n}{\partial q^\beta} \tag{3.5}$$

Таким образом, предлагаемый метод определения обобщенных координат позволяет минимизировать их количество, причем кинетическая энергия механической системы допускает представление в канонической форме. Одновременно возможна наглядная геометрическая интерпретация движения, особенно когда механическая система имеет две степени свободы. Введение таких обобщенных координат целесообразно при многократном изучении динамики механических систем с типовыми кинематическими схемами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 332 с.
2. *Добронравов В.В.* Основы аналитической механики. М.: Высш. школа, 1976. 262 с.
3. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

Волгоград

Поступила в редакцию
3.04.1998